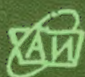
VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕПЛО-ОБМЕНА



С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕПЛО-ОБМЕНА

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ, ДОПОЛНЕННОЕ




МОСКВА · АТОМИЗДАТ · 1979

Scanned by Me
foRFree

УДК 536.24

Кутателадзе С. С. **Основы теории теплообмена.** — Изд. 5-е перераб. и доп. — М.: Атомиздат, 1979, 416 с.

В книге сжато изложены основные проблемы современной теории теплообмена, в том числе многие выходящие за рамки стандартных курсов.

Особое внимание уделено турбулентному переносу тепла в однородных и неоднородных средах, в частности асимптотическим свойствам турбулентного пограничного слоя при сложных граничных условиях. Значительное место занимают также гидродинамические закономерности теплообмена при конденсации и кипении. Как в теоретическом изложении, так и в приводимых экспериментальных материалах содержится большое число оригинальных результатов. Все результаты доведены до формы расчетных зависимостей и рекомендаций.

В данное, пятое, издание включены новые материалы по теплообмену в пакетах и засыпках, радиационно-конвективному и нестационарному теплообмену, переработаны и дополнены главы по кипению и конденсации и по теплообмену в разреженном газе.

Книга рассчитана на научных работников, инженеров-исследователей, аспирантов и студентов старших курсов университетов и политехнических институтов, работающих или специализирующихся в области теплофизики и физической гидроаэродинамики.

Рис. 286. Табл. 49. Список литературы 301 наименование.

К $\frac{30302-011}{034(01)-79}$ 11—79·2303010000

© Атомиздат, 1979

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Первое издание этой книги вышло ограниченным тиражом в 1954 г. и представляло собой курс лекций, читавшихся инженерам высшей квалификации. Два последующих (в 1957 и 1962 гг.), существенно дополненных издания были выпущены Машгизом. Английский перевод третьего издания был опубликован в 1963 г. (E. Arnold Publishers, London, Academic Press Inc., New York). Сибирское отделение издательства «Наука» выпустило четвертое издание в 1970 г. В 1976 г. четвертое издание книги было удостоено премии им. И. И. Ползунова АН СССР.

За эти годы книга складывалась как учебное пособие в значительной мере монографического характера, отражающее деятельность определенной научной школы. В создании ее отдельных глав принимали участие доктора наук В. М. Боришанский. Э. П. Волчков, А. Г. Кирдяшкин, А. И. Леонтьев, Б. П. Миронов, В. Е. Накоряков, А. К. Ребров, Н. А. Рубцов, Е. М. Хабахпашева и некоторые другие мои коллеги по Институту теплофизики и Центральному котлотурбинному институту.

В этом издании за счет некоторого сокращения традиционного материала расширено изложение новых проблем и результатов.

Академику М. А. Стыриковичу, членам-корреспондентам Академии наук СССР Б. С. Петухову и В. И. Субботину я признателен за просмотр рукописи.

Рукопись данного издания подготовлена В. Ю. Чеховичем, Н. И. Козинской, Э. Г. Маленковой.

Хотя этот труд в определенной мере и коллективный, но за недостатки и упущения, которые обнаружит читатель, ответствен только я.

*С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ*

# СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И ИНДЕКСОВ

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

A — поглощательная способность тела
$a = \lambda/c\rho$ — коэффициент температуропроводности, м²/с
$a^*$ — скорость распространения звука, м/с
$c$ — удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)
$c_f$ — коэффициент трения
$D$ — диаметр, м
$E$ — плотность поверхностного или полусферического излучения, Вт/м²
$F$ — площадь поверхности нагрева, поверхности раздела фаз и т. п., м²
$g$ — ускорение силы тяжести, м/с²
$H_{ik} = F_i\varphi_{ik}$ — средняя взаимная поверхность излучения между двумя телами, м²
$h=\varkappa y$; $h_0=\varkappa\delta$ — соответственно оптическая глубина и толщина слоя поглощающей среды;
$i$ — удельное теплосодержание (энтальпия), Дж/кг
$I$ — интенсивность или яркость излучения, Вт/(ср·м²)
$k$ — коэффициент теплопередачи, Вт/(м²·К)
$k_a$ — степень турбулентности потока
$k_n$ $(h)$ — экспоненциальный интеграл
$L$ — полная высота (длина) поверхности нагрева (охлаждения), м
$l$ — линейный размер, м
$p$ — давление, Па
$Q$ — количество тепла или общий тепловой поток, Дж или Вт
$q$ — плотность теплового потока, Вт/м²
$q_{кр_1}$ — плотность теплового потока, при которой происходит смена пузырькового режима кипения пленочным режимом (первая критическая плотность теплового потока), Вт/м²
$q_{кр_2}$ — плотность теплового потока, при которой происходит разрушение сплошной паровой пленки на поверхности нагрева и восстанавливается пузырьковый режим кипения (вторая критическая плотность теплового потока), Вт/м²
$q_V$ — плотность внутреннего источника тепла, Вт/м³
$R$ — радиус, м
$r$ — скрытая теплота парообразования, Дж/кг
$t$ — время, с
$T$ — абсолютная температура, К
$T_{кр}$ — критическая температура (в термодинамическом смысле), К
$T^*$ — температура торможения, К
$T''$ — температура насыщения пара, К
$u$ — объемная плотность лучистой энергии, Дж/м³
$V$ — объем, м³
$\mathbf{V}$ — пульсационная составляющая вектора скорости, м/с
$v$ — удельный объем, м³/кг
$v^* = \sqrt{\tau_{ст}/\rho}$ — «динамическая скорость», или «скорость касательного напряжения», м/с
$w$ — скорость течения, м/с
$w''$ — скорость течения пара или газа в двухфазной системе, м/с.
$x, y, z$ — координаты
$\alpha$ — коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К)
$\beta$ — коэффициент рассеяния излучения в объеме среды, м $^{-1}$
$\delta$ — толщина, м
$\varepsilon$ — излучательная способность тела (среды)
$\zeta$ — коэффициент гидравлического сопротивления
$\eta = v^*y/\nu$ — безразмерное расстояние от стенки
$\Theta$, $\vartheta$ — безразмерная температура
$\varkappa$ — константа структуры турбулентного потока со значительным поперечным градиентом скорости
$\lambda$ — коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К)
$\mu$ — коэффициент динамической вязкости, Па·с
$\nu = \mu/\rho$ — коэффициент кинематической вязкости, м²/с
$\xi$ — безразмерная координата
$\rho$ — плотность, кг/м³

$\sigma$ — коэффициент поверхностного натяжения, Н/м
$\sigma_n$ — нормальное напряжение, Па
$\sigma_0$ — постоянная Стефана — Больцмана, Вт/(м$^2\cdot$К$^4$)
$\tau$ — касательное напряжение, Па
$\Phi_{ik}$ — средний разрешающий угловой коэффициент излучения между двумя телами
$\varphi_{ik}$ — средний угловой коэффициент излучения между $i$-ым и $k$-ым телами
$\Psi_{ik}$ — средний разрешающий угловой коэффициент излучения между двумя телами с учетом экранирования промежуточной средой
$\psi_{ik}$ — средний угловой коэффициент излучения между двумя телами (зонами) с учетом экранирования промежуточной средой
$\Omega$ — площадь поперечного сечения, м$^2$
$\omega$ — безразмерная скорость течения

## ИНДЕКСЫ

гр — граничный
к — конвективный
кр — критический
от — относительный
п — падающий
э — эффективный
с — собственный
р — радиационный
ст — стенка (твердая поверхность)
$T$ — турбулентный, тепловой
н — нормальный к поверхности
$\varkappa$, А — поглощенный
$R$, $\beta$ — соответственно отраженный и рассеянный (объемная среда)
$i$, $k$ — номера изотермических зон (тел)
о — относится к масштабной точке системы
$'$ — показывает, что величина относится к твердой или жидкой фазе
$''$ — показывает, что величина относится к паровой (газовой) фазе
—, ~ — показывает относительное значение величины
‾ — знак осреднения

*Глава* 1

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ В ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА

## 1.1. ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА

При соприкосновении двух тел, имеющих различную температуру, происходит обмен энергией движения структурных частиц (молекул, атомов, свободных электронов), вследствие чего интенсивность движения частиц тела, имевшего меньшую температуру, увеличивается, а интенсивность движения частиц тела с более высокой температурой уменьшается. В результате одно из соприкасающихся тел нагревается, а другое остывает. Поток энергии, передаваемой частицами более горячего тела частицам тела более холодного, называется тепловым потоком.

Таким образом, для возникновения теплового потока, т. е. процесса теплообмена между различными областями пространства, заполненного вещественной средой, необходимо и достаточно, чтобы в этих областях имели место неодинаковые температуры. Иначе говоря, единственным условием возникновения теплообмена является наличие разности температур между рассматриваемыми телами. При этом тепловой поток направлен в сторону меньших температур.

Значимость процесса теплообмена как в природе, так и в технике определяется тем, что свойства тел самым существенным образом зависят от температуры, т. е. от их теплового состояния. Последнее же, в свою очередь, определяется условиями теплообмена, которые поэтому оказывают решающее влияние на процессы изменения агрегатного состояния вещества, на течение химических реакций (в частности, процесса горения), механические, электроизоляционные, магнитные и другие свойства тел.

Именно этими обстоятельствами и объясняются бурное развитие теории теплообмена в XX веке и то исключительное внимание, которое ей уделяется в физике планетарных процессов, энергетике, химической технологии и в ряде других отраслей науки и техники. Предметом теории теплообмена являются процессы переноса тепла из одной части пространства в другую.

Наряду с рассмотренным случаем теплообмена непосредственно в вещественной среде, являющегося следствием движения структурных частиц, имеет место также перенос теплоты посредством лучеиспускания (например, в космических процессах). Поэтому следует различать теплообмен путем непосредственного соприкосновения тел и лучистый теплообмен, когда энергия передается от одного тела к другому посредством электромагнитного поля.

В вещественной среде распространение тепла, в конечном счете, всегда связано с тепловым движением структурных частиц. Однако непосредственный перенос определенных порций теплоты из одной области в другую может происходить не только в результате последовательного обмена энергией частиц, заполняющих пространство между рассматриваемыми областями, но и в результате перемещения состоящих из большого количества молекул объемов среды.

Процесс распространения тепла только вследствие движения структурных частиц называется теплопроводностью, а процесс теплопередачи, обусловленный перемещениями молярных объемов среды, — конвекцией.

Таким образом, существуют три способа переноса тепла: теплопроводность (кондукция), перемешивание (конвекция) и излучение (радиация). В действительных процессах все эти три способа теплообмена обычно сопутствуют друг другу и часто связаны с переносом массы (диффузией), т. е. имеет место сложный тепло- и массообмен.

В теории теплопередачи расчет сложного теплообмена осуществляется с помощью методов, обобщающих результаты раздельного изучения каждого из

трех первичных способов переноса тепла. Следовательно, основным методом теории теплопередачи является расчленение сложного теплообмена на его составляющие по способу (механизму) переноса тепла и изучение этих составляющих методами математической физики и научного опыта.

При рассмотрении сложного теплообмена с сильно меняющимися в пространстве и времени температурными полями могут возникать задачи, которые не сводятся к моделям с квазиавтономными частными процессами теплообмена. В этих случаях понятия коэффициентов теплопередачи и теплоотдачи вообще лишены отчетливого смысла. Необходима постановка задачи, в достаточно общей форме описывающей как механизмы теплопереноса в отдельных элементах системы, так и их взаимодействия на границах раздела тел и фаз. Такие задачи называются сопряженными, и их конкретное рассмотрение, как правило, весьма индивидуализировано конкретными краевыми условиями. Общая же их постановка всегда опирается на основные уравнения, рассматриваемые в последующих главах этой книги.

Практически большинство процессов, рассматриваемых теорией теплообмена, протекает при взаимодействии твердых тел и жидких сред в областях, размеры которых чрезвычайно велики по сравнению с длиной свободного пробега структурных частиц (атомов, молекул). Так, в объеме газа, равном $10^{-3}$ мм$^3$, при давлении $9{,}8 \cdot 10^4$ Па и температуре 273 К содержится примерно $10^{16}$ молекул. Поэтому такие статистические понятия, как температура, давление, теплоемкость, вязкость и т. п., могут быть приписаны даже таким малым элементам системы, которые с физико-математической точки зрения могут рассматриваться в данном случае как дифференциалы ее объема.

Это означает, что в большинстве проблем теплообмена твердые и жидкие среды, составляющие систему, рассматриваются как непрерывные. Исключение приходится делать только для взаимодействия тел с весьма разреженным газом, когда размеры тела становятся соизмеримыми с длиной пути свободного пробега молекул.

## 1.2. ПОЛЕ ТЕМПЕРАТУР И ПОЛЕ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ

Выше было указано, что возникновение теплового потока связано не с абсолютным значением температуры тела, а с наличием разности температур в различных его точках. Но разности температур можно приписать вполне определенное направление, а именно: если соединить прямой две точки тела, то разность между их температурами можно считать положительной в направлении более высоких температур и отрицательной в направлении более низких температур.

Соединим сплошными линиями все точки некоторого плоского сечения тела, имеющие в данный момент времени одинаковую температуру. В трехмерном пространстве эти линии равных температур (изотермы) перейдут в соответствующие изотермические поверхности. Такое пространственное геометрическое место точек, в которых рассматриваемая физическая величина имеет одинаковое значение, называется поверхностью уровня. Очевидно, что поверхности уровня, и в частности интересующие нас изотермические поверхности, никогда не пересекаются друг с другом, ибо в данной точке пространства в данный момент времени возможно только одно значение данной физической величины.

Интенсивность изменения температуры в каком-либо направлении может быть охарактеризована густотой (плотностью) изотерм на некотором линейном отрезке $\Delta s$, т. е. производной $\partial T/\partial s$.

Если отрезок $\Delta s$ направлен по касательной к изотерме, то температура на бесконечно малом удалении от данной точки в этом направлении не меняется, и в таком случае $\partial T/\partial s = 0$. Наоборот, в направлении нормали к изотерме значение $\partial T/\partial s$ будет наибольшим, так как в этом направлении расстояние между двумя изотермами наименьшее. Следовательно,

$$(\partial T/\partial s)_{\text{макс}} = \partial T/\partial n. \qquad (1.2.1)$$

Вектор $\mathbf{n}\, dT/dn$ называется температурным градиентом (grad $T$) и определяет наибольшую скорость изменения температуры по нормали к изотерме в данной точке пространства. Очевидно, что температурный градиент как производная существует тогда, когда поле температур является непрерывным, а функция

$$T = T\,(x;\ y;\ z;\ t), \qquad (1.2.2)$$

выражающая математически это поле, дифференцируема.

Таким образом, скалярному полю температур соответствует векторное поле температурных градиентов, а условие возникновения теплового потока можно формулировать как условие неравенства нулю величины grad $T$. Соответственно этому тепловой поток направлен по линии температурного градиента, в обратную сторону по отношению к последнему.

## 1.3. КОЭФФИЦИЕНТЫ ТЕПЛООТДАЧИ И ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

В некоторых случаях количество тепла, приобретаемого или отдаваемого телом, при прочих равных условиях приблизительно пропорционально поверхности тела и разности между его температурой и температурой окружающей среды. Поэтому для практических расчетов установившегося (постоянного во времени) теплового потока, подводимого (или отводимого) к твердой поверхности от обтекающих ее жидкости или газа, исторически установилась формула

$$Q = \alpha \Delta \overline{T} F t, \qquad (1.3.1)$$

где $\Delta \overline{T} = \overline{T}_{\text{ст}} - \overline{T}$ — разность между средними температурами поверхности $F$ и потока жидкости (газа), К; $t$ — время, с. Множитель пропорциональности между величиной $Q$ и произведением $\Delta \overline{T} F t$, обозначаемый буквой $\alpha$, называется *коэффициентом теплоотдачи* и имеет размерность Вт/(м$^2\cdot$К).

Как будет ясно из дальнейшего, формула (1.3.1) отнюдь не отражает действительной зависимости теплового потока от температуры, физических свойств и размеров тел, находящихся в тепловом взаимодействии. По существу, эта формула является только некоторым формальным приемом, переносящим все трудности расчета теплопередачи на определение коэффициента $\alpha$, который обычно в меньшей степени зависит от размеров поверхности теплообмена и от температурного напора, чем тепловой поток $Q$.

При расчетах теплопередачи от одной жидкой среды к другой, отделенной от первой твердой стенкой, в расчетной практике пользуются выражением, аналогичным формуле (1.3.1), но множитель пропорциональности обозначают буквой $k$ и называют *коэффициентом теплопередачи*:

$$Q = k \Delta \overline{T} F t. \qquad (1.3.2)$$

Здесь $\Delta \overline{T} = \overline{T}_1 - \overline{T}_2$ — разность между средними температурами потока жидкости (газа), отдающего тепло, и потока жидкости (газа), воспринимающего это тепло, К.

## 1.4. ТЕРМИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Рассматривая величину $\Delta T$ как разность температурных уровней, можем представить формулу (1.3.1) в виде, аналогичном закону сопротивления для электрического тока, а именно:

$$Q = \Delta T F t / R_{\alpha}^{*}, \qquad (1.4.1)$$

где $R_{\alpha}^{*} = 1/\alpha$ — сопротивление теплообмену между твердой поверхностью и омывающей ее жидкостью (газом), м$^2\cdot$К/Вт.

Аналогично этому можно переписать и формулу (1.3.2):

$$Q = \Delta T F t / R_{k}^{*}, \qquad (1.4.2)$$

где $R_k^* = 1/k$ — сопротивление теплопередаче от одной жидкости к другой через разделяющую их твердую стенку, м²·К/Вт.

Величины $R^*$ называются термическими сопротивлениями. Удобство их введения в расчет теплопередачи заключается в том, что термическое сопротивление сложной системы представляет собой простую сумму частных термических сопротивлений, т. е.

$$R_k^* = 1/k = \Sigma R_{\alpha_i}^* \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{1.4.3}$$

В соответствии с этим общий коэффициент теплопередачи выражается через коэффициенты теплоотдачи различных частей системы более сложно, а именно:

$$k = (\Sigma R_{\alpha_i}^*)^{-1} \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{1.4.4}$$

Величина $q = \alpha \Delta T$, имеющая размерность Вт/м², называется плотностью теплового потока. Плотность теплового потока является мерой тепловой напряженности поверхности нагрева.

## 1.5. БАЛАНСНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛООБМЕННОГО АППАРАТА

Как уже было сказано, в действительных процессах все три способа теплообмена — теплопроводность, конвекция и излучение сопутствуют друг другу, т. е. имеет место сложный теплообмен. Если ведется расчет теплообмена между потоком жидкости (газа) и некоторым телом, т. е. вычисляется теплоотдача к поверхности этого тела, исходной расчетной формулой является выражение

$$Q = Q_к + Q_р \tag{1.5.1}$$

или

$$Q = (\alpha_к + \alpha_р) F \Delta T. \tag{1.5.2}$$

Здесь $Q$ — тепловой поток в единицу времени, а индексы «к» и «р» обозначают теплоотдачу конвекцией и излучением.

При расчетах теплопередачи от одной жидкой среды к другой (например, от пара к воде в трубах конденсатора) вместо коэффициента теплоотдачи вводится коэффициент теплопередачи. При этом входящие в выражение для $k$ значения коэффициента теплоотдачи слагаются из коэффициентов теплоотдачи конвекцией и излучением, т. е. расчетный коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \alpha_к + \alpha_р. \tag{1.5.3}$$

Практически излучение учитывают только при теплообмене с газовой средой, так как капельные жидкости в большинстве тепловых расчетов можно считать непрозрачными для теплового излучения. Методы вычисления коэффициентов теплоотдачи в различных условиях рассмотрены в последующих главах. Однако при переходе от частных способов теплоотдачи к сложному теплообмену возникают качественно новые особенности, существенно усложняющие задачу.

Основным вопросом в этом случае является выяснение того, что следует понимать в выражении (1.3.2) под разностью температур сред, так как эти температуры меняются вдоль течения вследствие самого процесса теплопередачи (греющая среда охлаждается, нагреваемая среда повышает свою температуру). Очевидно, в таком случае уравнение (1.3.2) следует писать в интегральной форме и совмещать с уравнением теплового баланса системы:

$$Q = \int_F k \Delta T dF. \tag{1.5.4}$$

Во многих случаях оказывается возможным считать коэффициент теплопередачи $k$ постоянным по всей поверхности нагрева, т. е. вводить некоторым образом усредненное значение этой величины. В таком случае уравнение (1.5.4) принимает вид

$$Q = kF\Delta\overline{T}, \tag{1.5.5}$$

где

$$\Delta\overline{T}=\frac{1}{F}\int\limits_F \Delta T dF. \qquad (1.5.6)$$

Величина $\Delta\overline{T}$ называется средней разностью температур или средним температурным напором. Знак осреднения $k$ в уравнении (1.5.5) опущен. Совмещая (1.5.5) с уравнением теплового баланса для стационарной теплопередачи, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &Q=kF\Delta\overline{T};\\ &Q=c_1 G_2 (T_{11}-T_{12});\\ &Q=c_2 G_2 (T_{22}-T_{21}). \end{aligned}\right\} \qquad (1.5.7)$$

Здесь $c_1$, $c_2$ — удельные теплоемкости греющей и нагреваемой сред при постоянном давлении, Дж/(кг·К); $G_1$, $G_2$ — массовые расходы сред, кг/с; $T_{11}$, $T_{12}$ — температура греющей среды на входе и выходе, К; $T_{12}$, $T_{22}$ — температура нагреваемой среды на входе и выходе, К.

Коэффициент теплопередачи $k$ в этом случае обычно вычисляют по значениям $\alpha$, отнесенным к температурам сред, осредненным по ходу течения. Как явствует из предыдущих разделов, допущение о постоянстве $k$ по всей поверхности теплообмена, вообще говоря, весьма условно, и в некоторых случаях такое упрощение задачи оказывается невозможным (например, в случае изменения $\alpha$ по длине трубы при конвекции). При этом производят расчеты, разбивая поверхность теплообмена на отдельные участки, в пределах которых коэффициент теплопередачи можно считать постоянным с достаточной для данного расчета степенью точности.

## 1.6. СРЕДНИЙ ТЕМПЕРАТУРНЫЙ НАПОР

Для элементарной поверхности теплообмена $dF$ (сечение $x$) система (1.5.7) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} &dQ=k(T_1-T_2)_x dF;\\ &dQ=-c_1 G_1 dT_1;\\ &dQ=c_2 G_2 dT_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1.6.1)$$

Знак минус во втором из этих уравнений взят потому, что в результате теплопередачи температура греющей среды понижается.

Далее будем полагать, что поверхность нагрева с обеих сторон омывается параллельными потоками жидкости. При этом, если направления течения сред совпадают, то такое течение будем называть прямотоком, а если направления течения сред противоположны (на 180°) — противотоком. Совмещая второе и третье уравнения системы (1.6.1), можно написать

$$d(T_1-T_2)=-[(c_1 G_1)^{-1}+(c_2 G_2)^{-1}]\,dQ. \qquad (1.6.2)$$

Совмещая это уравнение с первым уравнением системы (1.6.1), получаем

$$d(\Delta T)/\Delta T_x = d(T_1-T_2)/(T_1-T_2)_x = -zdF, \qquad (1.6.3)$$

где $z = k\,[(c_1G_1)^{-1} + (c_2G_2)^{-1}]$. Интегрируя уравнение (1.6.3) при $z = \text{const}$, получаем

$$\left.\begin{aligned} &\ln(\Delta T_x/\Delta T_1)=-zF;\\ &\Delta T_x=\Delta T_1 \exp(-zF). \end{aligned}\right\} \qquad (1.6.4)$$

Здесь $\Delta T_1 = (T_1 - T_2)_{x=0}$ — температурный напор на входе греющей среды в рассматриваемую область. Подставляя это выражение для $\Delta T$ в уравнение (1.5.6), получаем

$$\Delta\overline{T}=\frac{\Delta T_1}{F}\int\limits_F \exp(-zF)\,dF=-\frac{\Delta T_1}{zF}[\exp(-zF)-1]. \qquad (1.6.5)$$

Так как в этом уравнении интегрирование распространяется на всю поверхность нагрева, то величина $\Delta T_1 \exp(-zF)$ представляет собой, согласно уравнению (1.6.4), температурный напор на выходе греющей среды $\Delta T_2 = (T_1 - T_2)_{x=F}$. С другой стороны, $-zF = \ln(\Delta T_2/\Delta T_1)$, и, следовательно,

$$\Delta \overline{T} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln(\Delta T_2/\Delta T_1)}. \qquad (1.6.6)$$

Эта величина называется среднелогарифмическим температурным напором. При прямотоке $\Delta T_1 = T_{11} - T_{21}$ и $\Delta T_2 = T_{12} - T_{22}$; при противотоке $\Delta T_1 = T_{11} - T_{22}$ и $\Delta T_2 = T_{12} - T_{21}$. Из этих выражений видно, что при одной и той же начальной температуре греющей среды при противотоке можно получить более высокую температуру нагреваемой среды, т. е. в целях подогрева противоток является наиболее целесообразной формой организации движения теплоносителей (рис. 1.1).

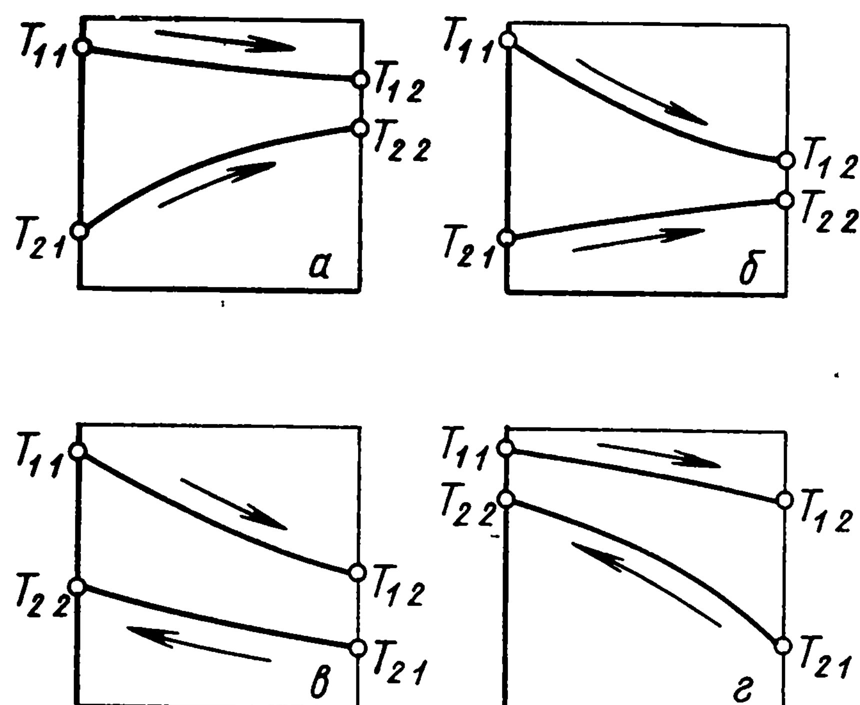



Рис. 1.1. Изменение температур теплоносителей при прямотоке ($а$—$c_1G_1 > c_2G_2$; $б$ — $c_1G_1 < c_2G_2$) и противотоке ($в$ — $c_1G_1 < c_2G_2$; $г$ — $c_1G_1 > c_2G_2$)

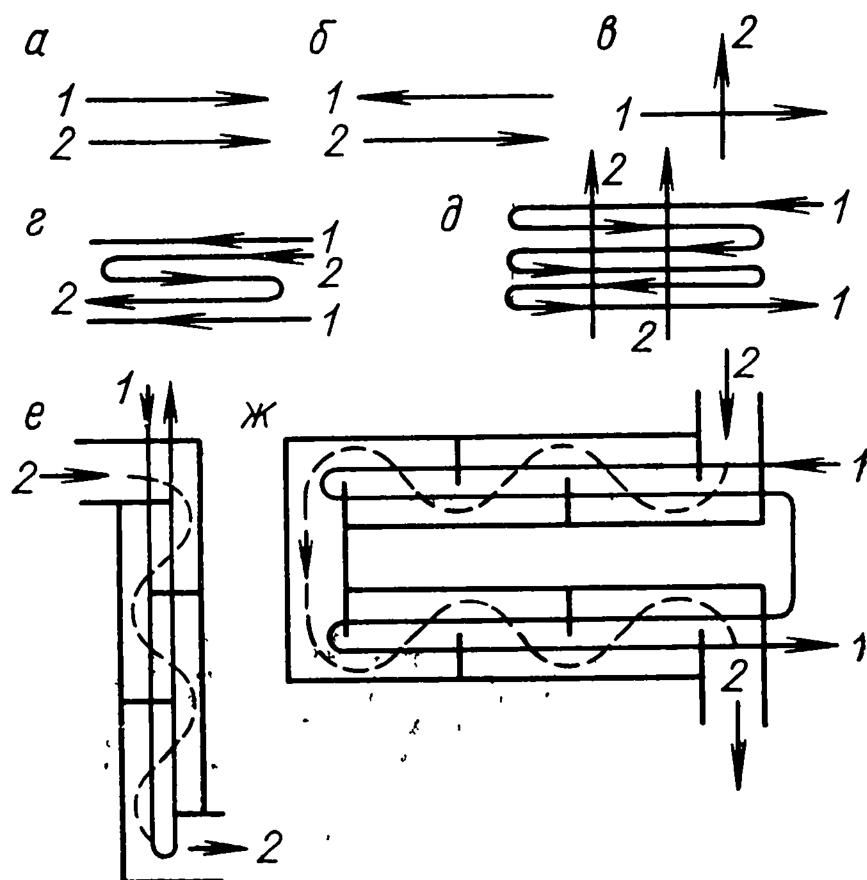



Рис. 1.2. Различные схемы течения теплоносителей в аппаратах:

$а$ — прямоток; $б$ — противоток; $в$ — перекрестный ток; $г$ — смешанный противоточно-прямоточный ток; $д$ — перекрестно-противоточный ток, $е$, $ж$ — смешанные токи при наличии отклоняющих перегородок

При изменении агрегатного состояния, когда температура одной из сред ($T_1$) остается постоянной и равной температуре фазового превращения $T''$, формула (1.6.6) принимает вид

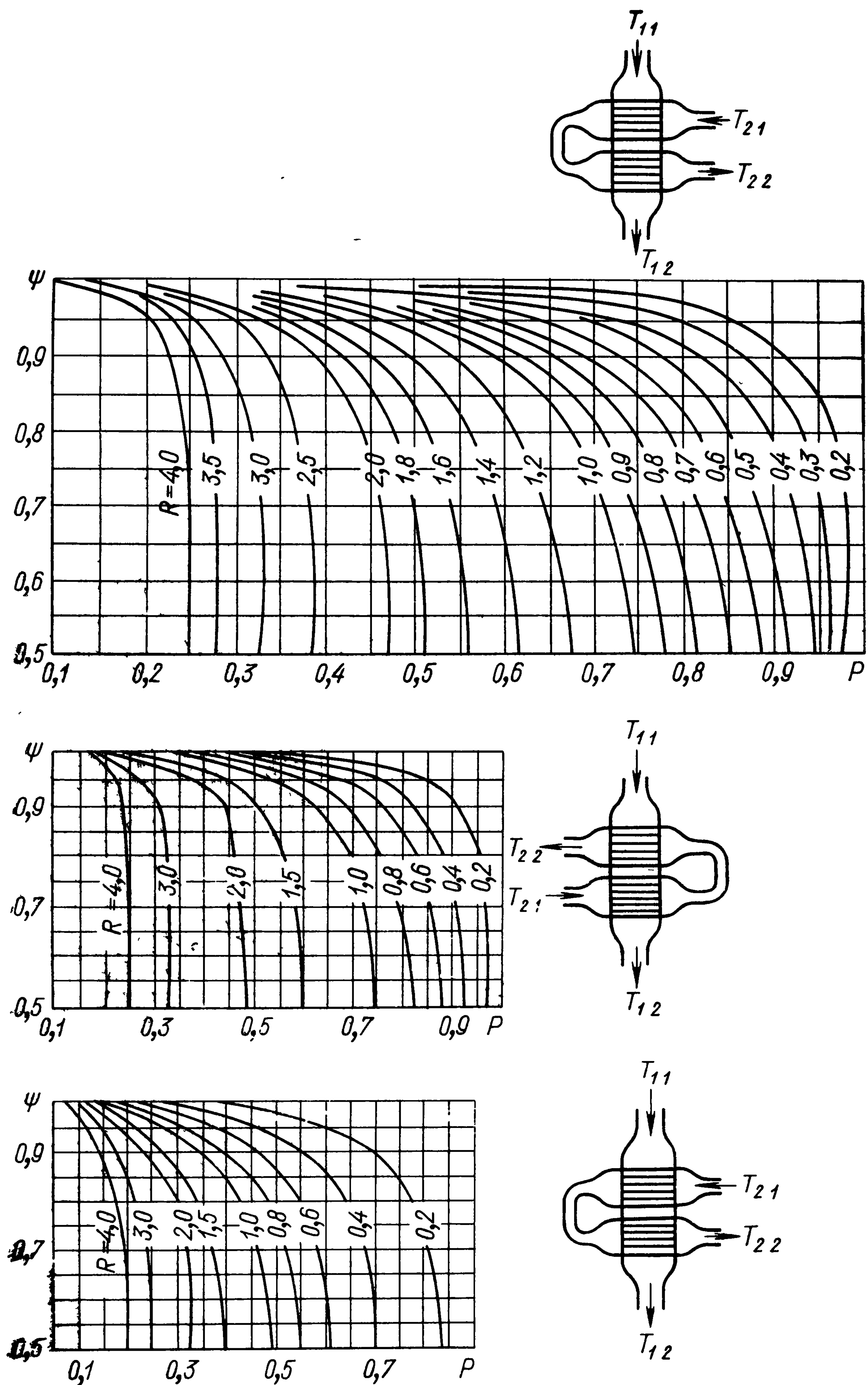
$$\Delta \overline{T} = \frac{T_{22} - T_{21}}{\ln[(T'' - T_{21})/(T'' - T_{22})]}. \qquad (1.6.7)$$

Как видно из рис. 1.2, наряду с прямотоком и противотоком могут иметь место смешанные формы течения. Вычисление средних разностей температур в этих случаях весьма громоздко и не имеет принципиального значения. На рис. 1.3 для некоторых схем течения приведены значения вспомогательных функций $\psi(P;\ R)$, при помощи которых определяют средний температурный напор по формуле

$$\Delta \overline{T} = \psi \frac{(T_{11} - T_{22}) - (T_{12} - T_{21})}{\ln[(T_{11} - T_{22})/(T_{12} - T_{21})]}. \qquad (1.6.8)$$

Вспомогательные параметры $P$ и $R$ также являются функциями начальных и конечных температур сред

$$\left. \begin{aligned} P &= (T_{22} - T_{21})/(T_{11} - T_{21}); \\ R &= (T_{11} - T_{12})/(T_{22} - T_{21}). \end{aligned} \right\} \qquad (1.6.9)$$




## 1.7. ХОД РАСЧЕТА ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

Обычно при расчете теплопередачи невозможно сразу определить температурный уровень процесса во всех точках системы. Так, если заданы начальные температуры теплоносителей, то конечные температуры обычно можно определить только путем последовательных приближений. Но так как от температурного уровня зависит и коэффициент теплопередачи (через входящие в него величины $\alpha$ и $\lambda$), то тепловой расчет еще более усложняется.

Применяемый в этом случае метод последовательных приближений заключается в том, что в первом приближении задаются вероятными значениями неизвестных температур, или коэффициентов теплопередачи, или тепловых потоков и затем, выполнив все вычисления, в поверочном расчете определяют эти величины. Если между вычисленными и принятыми значениями имеет место

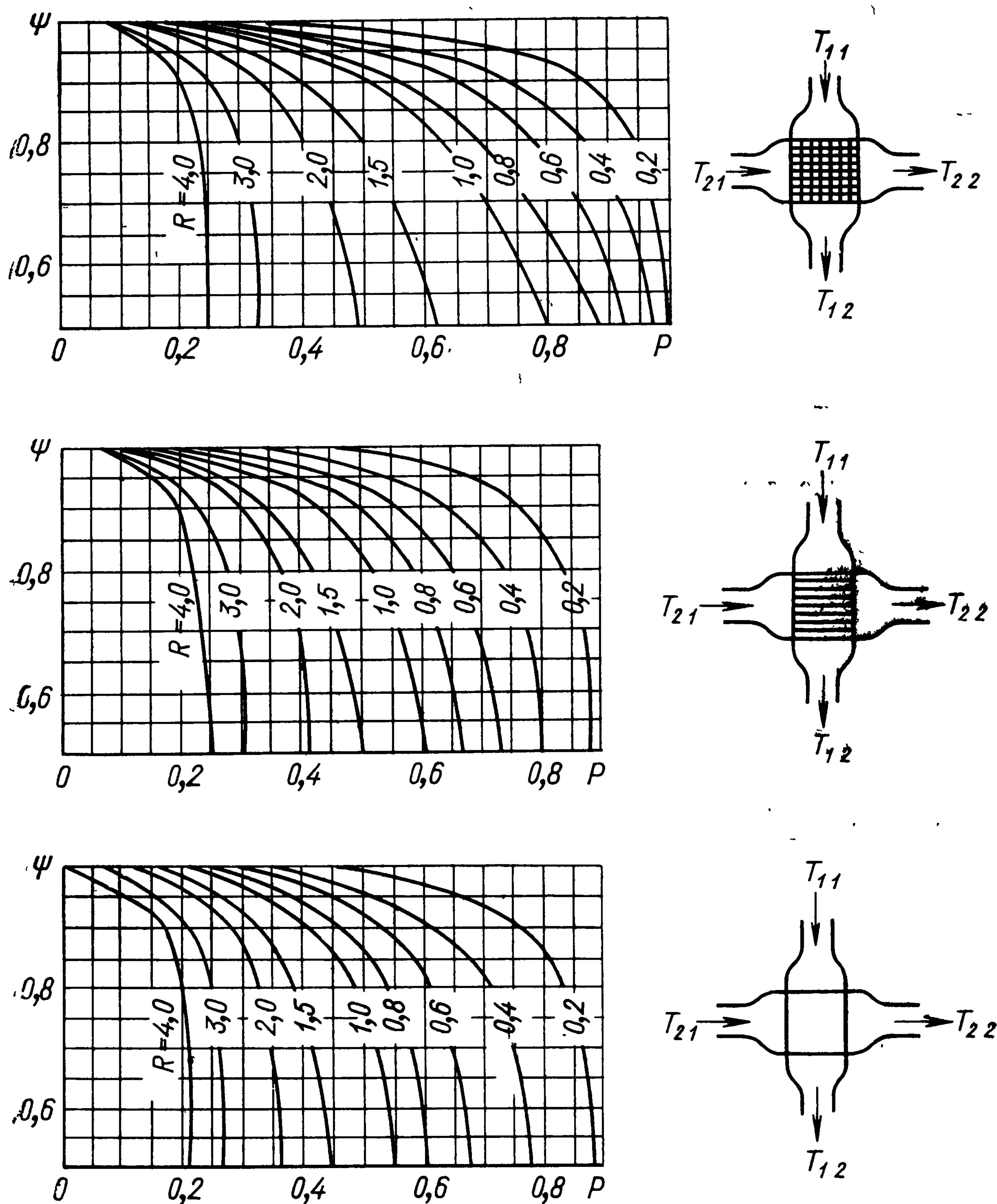



Рис. 1.3. Графики поправочных коэффициентов к среднелогарифмической разности температур для некоторых схем течения

большое расхождение, то расчет повторяют, приняв новые исходные значения неизвестных величин в соответствии с тенденцией, обнаруженной поверочным расчетом. Проведение таких расчетов и удачный выбор исходных значений достигаются, конечно, в результате большой практики.

Для наиболее ответственных агрегатов (ядерные реакторы, паровые котлы, камеры сгорания и т. п.) ход теплового расчета обычно стандартизируют и излагают в виде норм.

## 1.8. ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ЖИДКОСТНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ ЯДЕРНОГО РЕАКТОРА

В аппаратах с тепловыделением, не зависящим от процесса теплопередачи, основной задачей теплового расчета является определение поля температур в тепловыделяющих элементах и потоке охлаждающей среды. При этом следует определить максимальные температуры материала и жидкости для сравнения их с условиями безопасного режима работы. В условия безопасного режима работы входят, в частности, допустимый температурный предел работы конструкционных материалов, температура насыщения жидкости при охлаждении без кипения и первая критическая плотность теплового потока при охлаждении с кипением.

Рассмотрим охлаждение трубчатого элемента ядерного реактора некипящей жидкостью. Для простоты физические свойства жидкости будем считать неизменными по длине канала. Распределение тепловыделения запишем в виде закона синуса

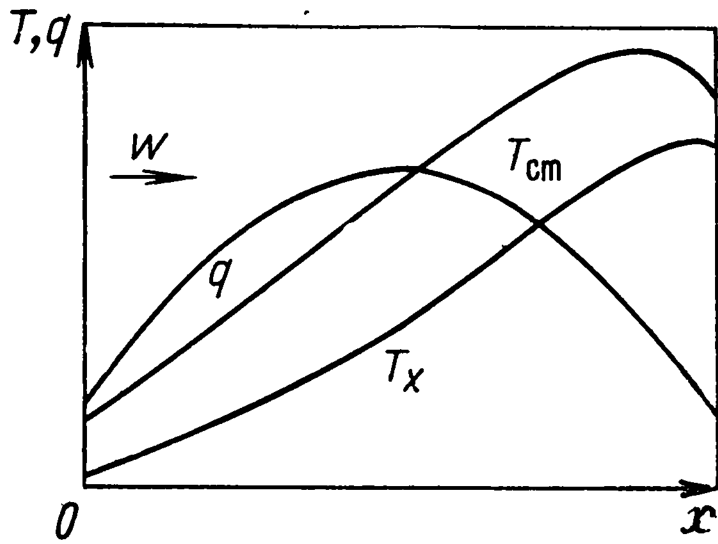



Рис. 1.4. Распределение температур и теплового потока по длине канала, охлаждаемого водой, при синусоидальном продольном распределении теплового потока

$$q = q_{\text{макс}} \sin \pi \frac{\chi + x/L}{2\chi + 1}, \tag{1.8.1}$$

где $q_{\text{макс}}$ — максимальная плотность теплового потока, имеющая место в центре канала; $\chi$ — постоянная данного канала.

Влиянием входного участка на величину $\alpha$ пренебрегаем, полагая, что канал достаточно длинен. Тепловой баланс элемента трубы имеет вид

$$q\pi D dx = c\rho \bar{w} (\pi/4) D^2 dT_x = \alpha\pi D (T_{\text{ст}} - T_x) dx. \tag{1.8.2}$$

Здесь $T_x$ — средняя температура жидкости в сечении; $\bar{w}$ — средняя расходная скорость жидкости; $D$ — внутренний диаметр трубы. Вводя в это выражение значение $q$ из (1.8.1) и решая попарно члены равенства (1.8.2), находим

$$T_x = T_1 + \frac{4q_{\text{макс}} L (2\chi + 1)}{\pi D c\rho \bar{w}} \left[\cos \frac{\pi\chi}{2\chi + 1} - \cos \pi \frac{\chi + x/L}{2\chi + 1}\right]; \tag{1.8.3}$$

$$T_{\text{ст}} = T_x + q/\alpha. \tag{1.8.4}$$

Температура жидкости на выходе из активной зоны

$$T_2 = T_1 - \frac{4q_{\text{макс}} L (2\chi + 1)}{\pi D c\rho \bar{w}} \left(2 \cos \frac{\pi\chi}{2\chi + 1} + 1\right). \tag{1.8.5}$$

Максимальная температура стенки находится при данном распределении плотности теплового потока не в конце трубы, а в некоторой точке ее второй половины. Положение этой точки определяется условием $dT_{\text{ст}}/dx = 0$.

На рис. 1.4 показан характер распределения теплового потока, температуры стенки тепловыделяющего элемента и температуры охлаждающей жидкости по длине реактора.

*Глава* 2

# УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ВЕЩЕСТВЕННОЙ СРЕДЕ

## 2.1. ГИПОТЕЗА О ПРЯМОЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ ВЕКТОРА ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ГРАДИЕНТУ ТЕМПЕРАТУР

При стационарном процессе теплообмена и постоянной плотности теплового потока количество тепла, проходящего через некоторый элемент тела, прямо пропорционально площади рассматриваемого элемента и промежутку времени. Для нестационарного процесса такого рода пропорциональность может быть сохранена только в том случае, если мы будем рассматривать весьма малые промежутки времени и площади. В соответствии с этим

$$d^2\mathbf{Q} = \mathbf{q}dFdt. \qquad (2.1.1)$$

где $dF$ — элементарная площадь, через которую проходит тепловой поток; $dt$ — элементарный период времени; $d^2\mathbf{Q}$ — элементарный поток тепла, который рассматривается в данном случае как дифференциал второго порядка (поскольку величины $dF$ и $dt$ рассматриваются как дифференциалы первого порядка). Величина $\mathbf{q}$, имеющая размерность Вт/м$^2$, представляет собой вектор теплового потока, направленный по нормали к площадке в сторону, обратную направлению градиента температур.

В середине XVIII столетия М. В. Ломоносов указал [1], что количество теплоты, передаваемое от одного тела к другому, пропорционально разности количеств движения составляющих эти тела «частиц», т. е. молекул. Количество движения, передаваемое молекулам, пропорционально разности их кинетических энергий в рассматриваемых областях тела, т. е. пропорционально разности температур этих областей. Формально в математическую физику это положение было введено в начале XIX столетия в виде гипотезы Био-Фурье о прямой пропорциональности вектора теплового потока градиенту температуры:

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T. \qquad (2.1.2)$$

Знак минус показывает взаимообратную направленность вектора теплового потока и градиента температур, а множитель пропорциональности $\lambda$ рассматривается как некоторая физическая характеристика, именуемая *коэффициентом теплопроводности*. Размерность коэффициента теплопроводности

$$\lambda = \frac{|q|}{|\operatorname{grad} T|} \ [\text{Вт/м}\cdot\text{К}].$$

В действительности коэффициент теплопроводности данного вещества отнюдь не является строго постоянной величиной, а так же, как и другие физические характеристики (удельная теплоемкость, коэффициент вязкости и т. п.), меняется с изменением состояния тела и, в первую очередь, в связи с изменением его температуры. Так, коэффициент теплопроводности газов возрастает с повышением температуры (рис. 2.1). То же наблюдается и у многих теплоизоляционных твердых материалов (рис. 2.2). У чистых металлов коэффициент теплопроводности уменьшается с ростом температуры (рис. 2.3), а у жидкостей эта зависимость подчас имеет весьма сложный характер (рис. 2.4. и 2.5). Так, коэффициент теплопроводности воды в некотором интервале температур возрастает, а затем уменьшается (рис. 2.6). В газах импульс и энергия теплового движения передаются при непосредственном взаимодействии (столкновении) молекул, вследствие чего коэффициенты теплопроводности, вязкости и диффузии пропорциональны друг другу:

$$\lambda \sim c\mu \sim c\rho D, \qquad (2.1.3)$$

где $D$ — коэффициент диффузии, м$^2$/с.

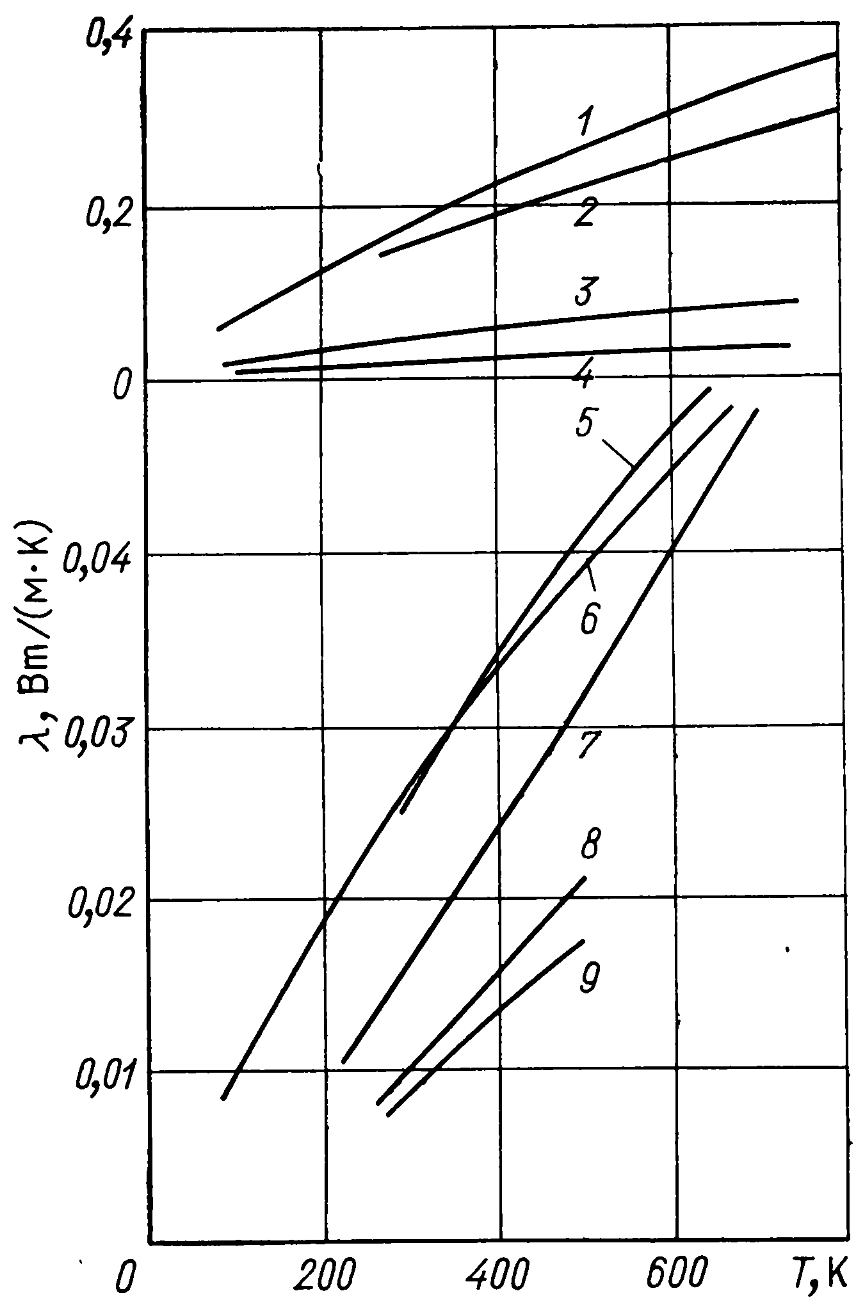



Рис. 2.1. Температурные зависимости коэффициентов теплопроводности некоторых газов при нормальном давлении:

*1* — водород; *2* — гелий; *3* — неон; *4* — аргон; *5* — воздух; *6* — азот; *7* — двуокись углерода; *8* — фреон-12; *9* — фреон-11

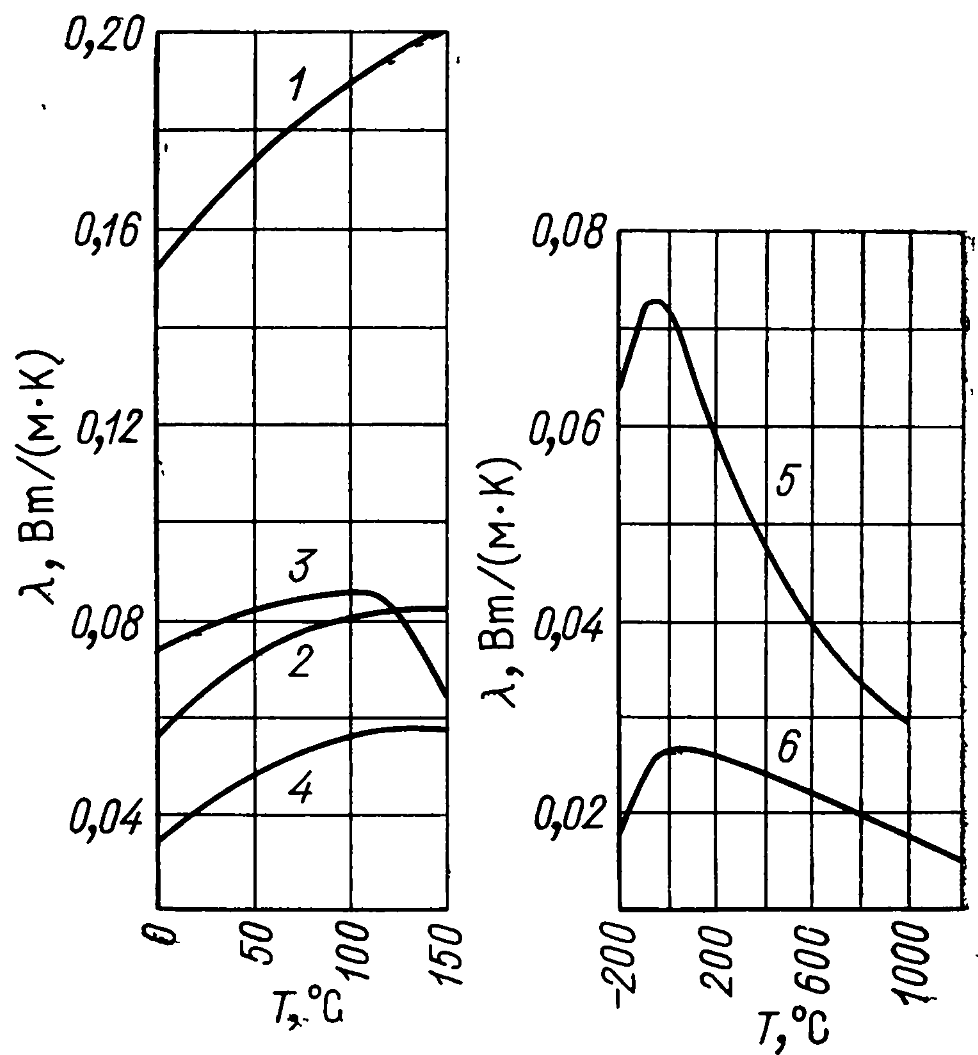



Рис. 2.2. Температурные зависимости коэффициентов теплопроводности некоторых изоляционных материалов:

*1* — асбест; *2* — инфузорная земля; *3* — трепельный кирпич (обожженный); *4* — пробковая мелочь; *5* — 88%-ный карборундовый кирпич; *6* — 57%-ный карборундовый кирпич

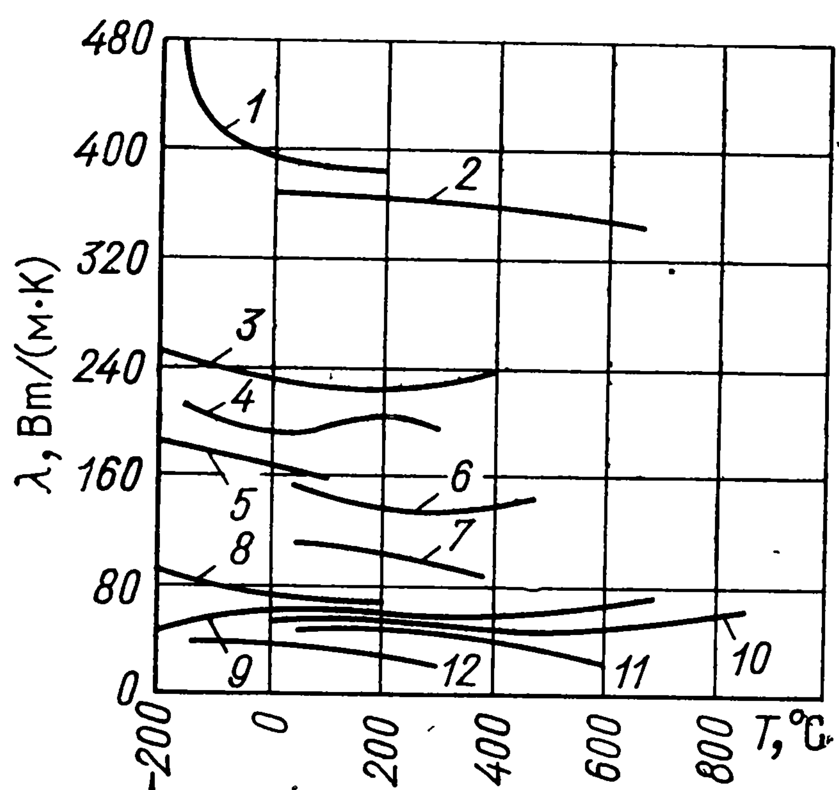



Рис. 2.3. Температурные зависимости коэффициентов теплопроводности некоторых металлов:

*1* — медь 100%-ная; *2* — медь 99,9%-ная; *3* — алюминий 99,7%-ный; *4* — алюминий 99,0%-ный; *5* — марганец 100%-ный; *6* — марганец 99,6%-ный; *7* — цинк 99,8%-ный; *8* — платина 100%-ная; *9* — никель 99%-ный; *10* — никель 97%-ный; *11* — железо 99,2%-ное; *12* — свинец технически чистый

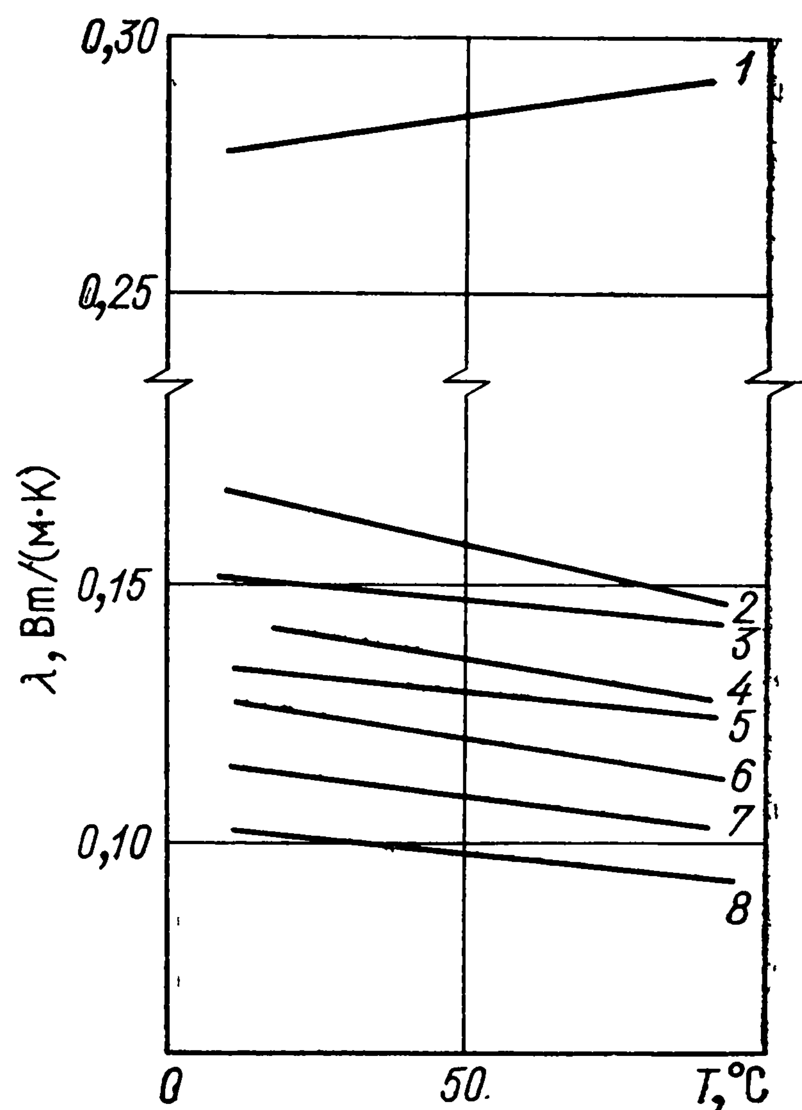



Рис. 2.4. Температурные зависимости коэффициентов теплопроводности некоторых жидкостей:

*1* — глицерин; *2* — уксусный ангидрид; *3* — масляная кислота; *4* — пропилацетат; *5* — амиловый спирт; *6* — масло ВМ-4; *7* — бромбензол; *8* — дибромэтан

В неметаллических конденсированных средах энергия теплового движения передается в основном за счет колебаний молекул, т. е. имеет место фононная теплопроводность. В чистых конденсированных металлах теплота переносится движением свободных электронов, что обусловливает высокую теплопроводность и пропорциональность ей электропроводности. В сплавах фононная и электронная теплопроводности могут быть соизмеримыми. Для кристаллов имеет место анизотропия теплопроводности, т. е. значение λ не одинаково в направлении различных осей кристалла.

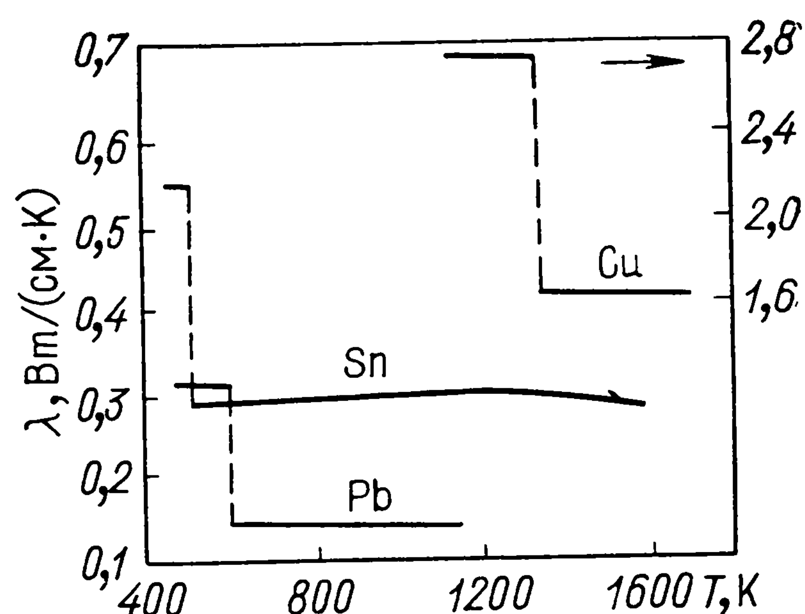



Рис. 2.5. Температурные зависимости коэффициентов теплопроводности некоторых жидких металлов по данным Л. П. Филиппова

Таким образом, в уравнении (2.1.2) множитель пропорциональности λ в общем случае следует рассматривать как некоторую функцию температуры и координат, а следовательно, и времени. Однако во многих практически интерес-

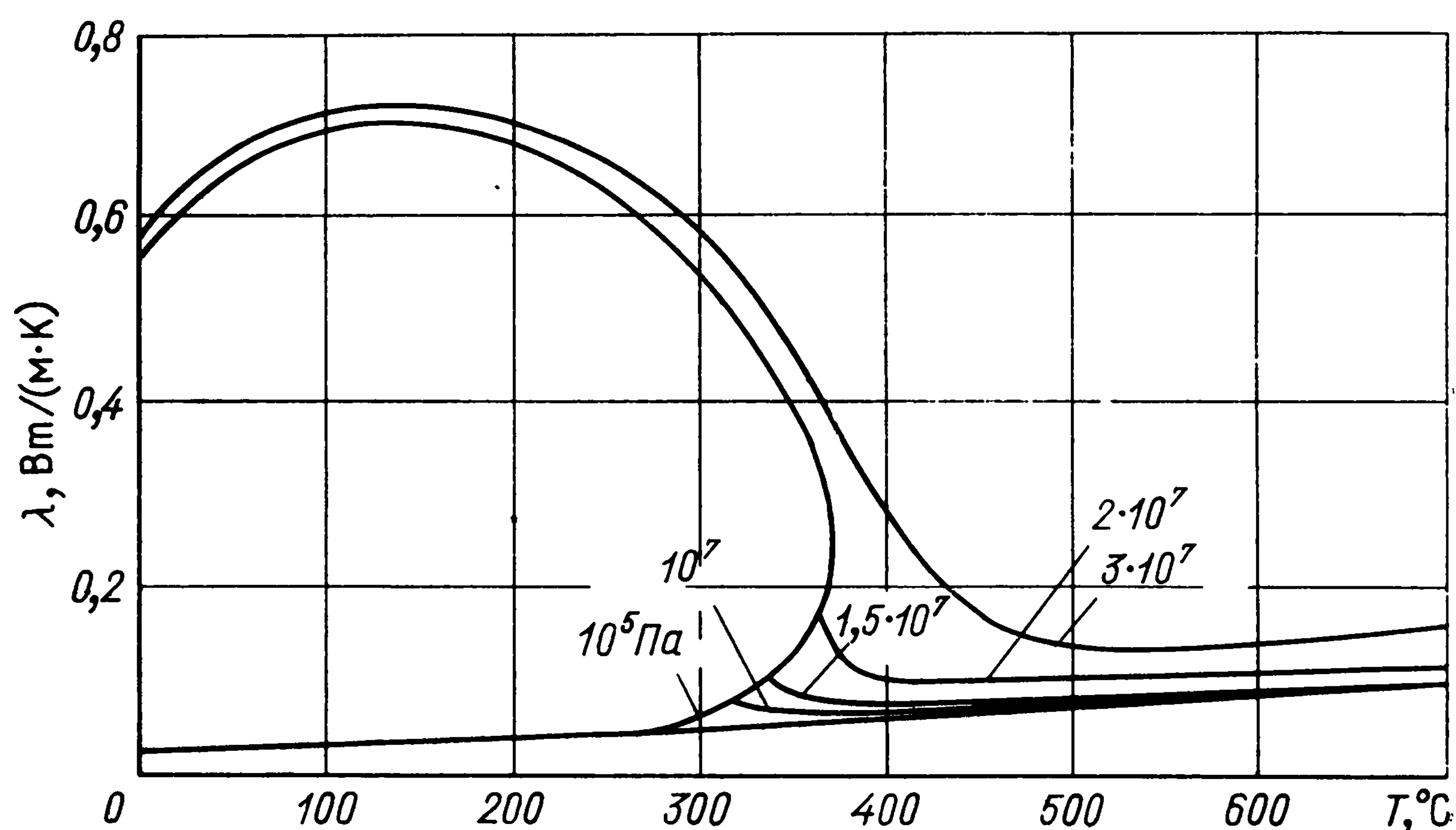



Рис. 2.6. Температурные зависимости коэффициентов теплопроводности воды и водяного пара

ных случаях с достаточной степенью точности оказывается возможным считать величину λ постоянной, вводя в расчет ее некоторое среднее значение в данном интервале температур.

## 2.2. УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ВЕЩЕСТВЕННОЙ СРЕДЕ

Вывод дифференциального уравнения распространения тепла основан на применении закона сохранения и превращения энергии. Для тепловых процессов этот закон выражается в виде первого начала термодинамики, которое для единицы объема движущейся среды можно записать в виде уравнения

$$Q_V\,dt + L_V\,dt = \rho\,[du + d\,(w^2/2)]. \tag{2.2.1}$$

Здесь $Q_V$ — количество тепла, втекающего в единицу объема среды за единицу времени, Вт/м³; $L_V$ — работа, совершаемая внешними силами над единицей объема среды за единицу времени, Вт/м³; $u$ — внутренняя энергия одного килограмма среды, Дж/кг; $w$ — скорость движения (течения) среды, м/с.

Уравнение (2.2.1) выражает то обстоятельство, что изменение полной энергии тела, складывающееся в данном случае из его внутренней энергии $\rho u$ и кинетической энергии $\rho w^2/2$, обусловлено количеством теплоты, подводимой к

телу, и внешней работой, совершаемой над телом. Поскольку рассматривается движение элемента потока жидкости, то работа в данном случае связана с изменением давления и внутренним трением текущей среды. Внутренняя энергия среды связана с ее энтальпией (теплосодержанием) уравнением

$$du = di - d\,(p/\rho). \tag{2.2.2}$$

Для совершенного газа $di = c_p\,dT$. Воспользовавшись этими соотношениями, получаем

$$du + d\,(w^2/2) = di + d\,(w^2/2) - \rho^{-1}\,dp + p\rho^{-2}\,d\rho. \tag{2.2.3}$$

Выделим в рассматриваемом теле объем $V$, ограниченный поверхностью $F$. Уравнение теплового баланса этого объема, отнесенное к единице времени, можно записать в виде

$$\int\limits_V Q_V\,dV + \int\limits_F \mathbf{q}dF = \int\limits_V q_V\,dV. \tag{2.2.4}$$

Внутренние источники тепла могут возникать вследствие излучения, объемных химических реакций, радиоактивного распада вещества, прохождения электрического тока, работы трения и т. п. Первый член этого уравнения представляет собой изменение теплосодержания рассматриваемого объема; второй член — количество тепла, ушедшее через поверхность $F$ путем теплопроводности; третий — количество тепла, выделенное внутренними источниками (если $q_V$ имеет знак минус, то в теле находятся стоки тепла).

Между потоком вектора через замкнутую поверхность $F$, ограничивающую объем $V$, и расходимостью (дивергенцией) вектора существует связь, выражаемая формулой Гаусса — Остроградского:

$$\int\limits_F \mathbf{q}dF = \int\limits_V \operatorname{div}\mathbf{q}dV. \tag{2.2.5}$$

Преобразование (2.2.5) справедливо, если в объеме $V$ нет сильных разрывов функции. Следовательно, в тепловой задаче это означает, что область $V$ не должна включать границы раздела фаз. Вводя преобразование (2.2.5) в левую часть уравнения (2.2.4), находим

$$Q_V = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q_V. \tag{2.2.6}$$

В прямоугольных координатах

$$\operatorname{div}\mathbf{q} = \partial q_x/\partial x + \partial q_y/\partial y + \partial q_z/\partial z. \tag{2.2.7}$$

Если принять гипотезу (2.1.2), то

$$q_i = -\lambda \partial T/\partial x_i. \tag{2.2.8}$$

Тогда выражение (2.2.6) в прямоугольных координатах имеет вид

$$Q_V = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z} + q_V. \tag{2.2.9}$$

Подставляя это значение $Q_V$ в уравнение (2.2.1) и принимая во внимание соотношение (2.2.3), получаем уравнение Фурье — Кирхгофа:

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z} + q_V + L_V + \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \left[\frac{di}{dt} + \frac{d\,(w^2/2)}{dt}\right]\rho. \tag{2.2.10}$$

Это уравнение параболического типа, т. е. имеет нестационарные решения при бесконечно большой скорости распространения теплового возмущения. Реальная же скорость распространения теплового возмущения в вещественной среде имеет порядок не более средней скорости теплового движения структурных частиц, а для излучения равна скорости распространения электромагнит-

ных волн. Однако во многих практических приложениях можно ограничиться уравнением распространения тепла в форме (2.2.10).

Оно содержит давление $p$, скорость течения среды $w$ и плотность $\rho$. Следовательно, для общего решения задачи о теплообмене в движущейся вещественной среде к уравнению (2.2.10) необходимо присоединить еще уравнения, определяющие поле скоростей и связь между термодинамическими параметрами состояния среды. Такое замыкание системы дифференциальных уравнений теплообмена в движущейся вещественной среде достигается присоединением к уравнению распространения тепла уравнений движения и сплошности потока жидкости и уравнения состояния.

Полные производные по времени от давления, теплосодержания, квадрата скорости и плотности являются функциями координат и времени, в связи с чем полный дифференциал любой из них:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz. \qquad (2.2.11)$$

Отсюда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \qquad (2.2.12)$$

Величины $dx/dt = w_x$; $dy/dt = w_y$; $dz/dt = w_z$ представляют собой проекции вектора скорости течения среды на соответствующие координаты. Таким образом, рассматриваемая полная производная распадается на две с физической точки зрения разные части. Первый член правой части выражения (2.2.12) характеризует изменение данной величины, связанное с изменением поля этой величины во времени. Сумма остальных трех членов правой части выражения (2.2.12) характеризует изменение данной величины, происходящее в связи с перемещением рассматриваемого элемента среды из одной точки пространства в другую. Иначе говоря, частная производная $\partial\varphi/\partial t$ представляет собой скорость изменения $\varphi$ во времени в той точке пространства, в которой элементарный объем среды находится в данный момент времени, а сумма

$$w_x \partial\varphi/\partial x + w_y \partial\varphi/\partial y + w_z \partial\varphi/\partial z = (\mathbf{w}, \operatorname{grad}\varphi) \qquad (2.2.13)$$

представляет собой скорость изменения $\varphi$, обусловленного перемещением элементарного объема среды $dV$ из точки со значением $\varphi = \varphi_1$ в точку со значением $\varphi = \varphi_2$.

В связи с изложенным величина $\partial\varphi/\partial t$ называется местным или локальным изменением, а величина $(\mathbf{w}, \operatorname{grad}\varphi)$ — изменением перемещения или конвективным изменением. Для того чтобы подчеркнуть непосредственную связь производной $d\varphi/dt$ с движущейся средой (субстанцией), ее обозначают специальным символом $D\varphi/dt$ и называют субстанциональной производной:

$$D\varphi/dt = \partial\varphi/\partial t + w_x \partial\varphi/\partial x + w_y \partial\varphi/\partial y + w_z \partial\varphi/\partial z \qquad (2.2.14)$$

или, в векторной форме:

$$D\varphi/dt = \partial\varphi/\partial t + (\mathbf{w}, \operatorname{grad}\varphi). \qquad (2.2.15)$$

### 2.3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Вводя полученное выше значение субстанциональной производной в уравнение (2.2.10), получаем

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z} + q_V =$$
$$= \rho\left(\frac{\partial i}{\partial t} + w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z}\right) +$$
$$+ \rho\left(\frac{\partial w^2/2}{\partial t} + w_x \frac{\partial w^2/2}{\partial x} + w_y \frac{\partial w^2/2}{\partial y} + w_z \frac{\partial w^2/2}{\partial z}\right) -$$

$$-L_V-\left(\frac{\partial p}{\partial t}+w_x\frac{\partial p}{\partial x}+w_y\frac{\partial p}{\partial y}+w_z\frac{\partial p}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+w_x\frac{\partial \rho}{\partial x}+w_y\frac{\partial \rho}{\partial y}+w_z\frac{\partial \rho}{\partial z}\right). \quad (2.3.1)$$

В векторной форме это уравнение имеет вид

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T)+q_V+L_V+\frac{Dp}{dt}-\frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{dt}=\rho\frac{Di}{dt}+\rho\frac{Dw^2/2}{dt}. \quad (2.3.2)$$

При умеренных скоростях течения жидкости, когда работа внешних сил и кинетическая энергия потока малы по сравнению с его энтальпией (т. е. практически можно пренебречь влиянием изменения давления и кинетической энергией), уравнение распространения тепла в вещественной среде существенно упрощается и принимает вид

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T)+q_V=\rho Di/dt. \quad (2.3.3)$$

Если коэффициент теплопроводности и удельную теплоемкость среды можно с достаточной точностью считать постоянными, то

$$\lambda\nabla^2 T+q_V=c\rho DT/dt. \quad (2.3.4)$$

В неподвижной среде, в частности в твердом теле, $w=0$ и при постоянных физических свойствах

$$\lambda\nabla^2 T+q_V=c\rho\partial T/\partial t. \quad (2.3.5)$$

При отсутствии внутренних источников тепла, умеренных скоростях течения и постоянных физических свойствах среды уравнение распространения тепла принимает наиболее простую форму (уравнение Фурье — Остроградского [2]):

$$\frac{\lambda}{c\rho}\nabla^2 T=\partial T/\partial t+(\mathbf{w},\ \operatorname{grad} T). \quad (2.3.6)$$

В это уравнение $\lambda$, $c$ (для газа $c_p$) и $\rho$ входят не порознь, а вместе — в виде комплекса

$$a=\lambda/c\rho, \quad (2.3.7)$$

играющего здесь ту же роль, что и коэффициент диффузии в уравнении массопереноса.

Очевидно, что всякий комплекс, составленный из нескольких физических характеристик, может, в свою очередь, рассматриваться как новая физическая величина, характеризующая некоторые особые свойства среды.

Комплекс $a$, имеющий размерность м²/с, представляет собой отношение коэффициента теплопроводности среды к ее объемной теплоемкости. Это отношение можно рассматривать как меру скорости изменения температуры единицы объема тела при прохождении через него теплового потока, пропорционального $\lambda$. В соответствии с этой трактовкой комплексная физическая характеристика (2.3.7) называется коэффициентом температуропроводности среды или коэффициентом диффузии тепла. Таким образом, скорость изменения температурного поля во времени в твердом теле и жидкости, текущей с умеренной скоростью, при отсутствии внутренних источников тепла зависит только от одной физической характеристики — коэффициента температуропроводности.

При стационарном процессе $\partial T/\partial t=0$ и, поскольку $a\neq 0$,

$$\nabla^2 T=0. \quad (2.3.8)$$

Следовательно, конфигурация стационарного температурного поля в неподвижной среде с постоянными физическими свойствами и без внутренних источников тепла не зависит от физических свойств среды, а определяется только формой рассматриваемого тела и распределением температуры на его границах.

При наличии внутренних источников тепла стационарное температурное поле в неподвижной среде с постоянными свойствами примет вид

$$\nabla^2 T + q_V/\lambda = 0. \qquad (2.3.9)$$

В этом случае конфигурация температурного поля зависит от геометрии тела, плотности внутреннего источника тепла и коэффициента теплопроводности среды.

В среде, движущейся с умеренной скоростью, стационарное температурное поле определяется уравнением

$$a\nabla^2 T + q_V/c\rho = (\mathbf{w}, \operatorname{grad} T). \qquad (2.3.10)$$

Следовательно, в этом случае конфигурация температурного поля зависит от коэффициента теплопроводности и объемной теплоемкости $c\rho$.

При отсутствии внутренних источников тепла стационарное температурное поле в среде с постоянными физическими свойствами, движущейся с умеренной скоростью, зависит только от коэффициента температуропроводности.

## 2.4. ТЕМПЕРАТУРА ТОРМОЖЕНИЯ

Запишем сумму дифференциальных операторов в правой части уравнения (2.3.2) как

$$\frac{D}{dt}(i + w^2/2) = \frac{Di^*}{dt}. \qquad (2.4.1)$$

Величина

$$i^* = i + w^2/2 \qquad (2.4.2)$$

имеет размерность энтальпии и, очевидно, является некоторой специфической характеристикой энергетического состояния потока.

Для газов в довольно широком интервале температур удельную теплоемкость можно считать постоянной и

$$T^* = T + w^2/2c_p. \qquad (2.4.3)$$

Физический смысл этой величины может быть выяснен из следующих соображений. Полная энергия потока складывается из его энтальпии и кинетической энергии, т. е. равна $i^*$. При изоэнтропическом торможении полная энергия потока не изменяется, т. е.

$$i_{w=0} = i^* = \text{const}. \qquad (2.4.4)$$

В связи с этим величина $i^*$ называется энтальпией торможения, а величина $T^*$ — температурой торможения. Эти величины играют важную роль при исследовании теплообмена в потоках, двигающихся с большими скоростями.

## 2.5. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КОНЕЧНОЙ СКОРОСТЬЮ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ

Простейшая модель с конечной скоростью распространения теплового возмущения была предложена Вернотом. Эта модель представляет собой обобщение модели Био — Фурье путем введения времени релаксации теплового потока $t_r$. Тогда

$$\mathbf{q} + t_r \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\lambda \operatorname{grad} T. \qquad (2.5.1)$$

Скорость распространения теплового возмущения может быть связана со временем тепловой релаксации через коэффициент температуропроводности. Из соотношения размерностей имеем

$$w_r = \sqrt{a/t_r}. \qquad (2.5.2)$$

При кинетической и фононной проводимостях величина $w_r$ имеет порядок скорости звука, что и позволяет оценивать вклад первого и второго членов левой части формулы (2.5.1) в решение задач нестационарной теплопроводности.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Ломоносов М. В.** Размышления о причине теплоты и холода. Новые комментарии Петербургской Академии наук, т. 1, 1750.
2. **Остроградский М. В.** Замечания по теории теплоты. Записки С.-Петербургской Академии наук, т. 1, 1831.
3. **Пехович А. И., Жидких В. М.** Расчеты теплового режима твердых тел. Изд. 2-е, перераб. и доп. Л., «Энергия», 1976.
4. **Fourier I. B.** Theorie analitique de la chaleur, Paris, 1822.
5. **Kirchhoff G.** Vorlesungen über Mathematik, Physik, Mechanik, B. U. Vorlesungen über die Theorie der Wärme, Leipzig, 1894.
6. **Vernotte P.** La nouvelle equation de la chaleur; peut—il y avoir propagation?—In: Journees internationales de la transmission de la chaleur. V. 1. Paris, 1961, p. 17.

*Глава* 3

# УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

## 3.1. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПОЛЕМ ТЕМПЕРАТУР И ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Наличие конвективного члена в уравнении (2.3.1) показывает, что в движущейся среде теплообмен осуществляется не только за счет теплопроводности, но и вследствие переноса тепла перемещающимися частицами среды (жидкости, газа). При этом интенсивность конвективного переноса тепла пропорциональна мгновенному значению скорости течения среды в данной точке пространства. Следовательно, конфигурация поля температур в движущейся среде существенным образом зависит от конфигурации поля скоростей.

С другой стороны, температурное поле вызывает нарушение однородности физических свойств среды. В областях с более высокой температурой плотность среды вследствие теплового расширения уменьшается, и получается неустойчивое распределение плотности. Элементы жидкости приходят в движение, обусловленное температурным полем. Если жидкость (газ) не подвергается какому-либо внешнему механическому воздействию, побуждающему ее к перемешиванию (например, воздействию насоса), то единственным источником движения среды в этом случае оказывается процесс теплообмена. Такое движение жидкости или газа называется свободной тепловой конвекцией, в отличие от вынужденной конвекции, когда движение среды обусловливается внешним воздействием.

Кроме того, наличие неоднородного температурного поля обусловливает и переменность вязкости жидкости, что также сказывается на характере поля скоростей.

Таким образом, поля температур и скоростей в движущейся среде являются следствием тепловых и механических взаимодействий и, строго говоря, не могут рассматриваться в отрыве друг от друга. При этом поле температур всегда самым существенным образом зависит от поля скоростей. В отношении же поля скоростей можно выделить такие течения, в которых тепловое воздействие весьма мало по сравнению с воздействием внешнего побудителя движения. Поэтому в условиях вынужденной конвекции часто пренебрегают влиянием поля температур на поле скоростей и учитывают только обратное воздействие.

Этот прием имеет важное методологическое значение, так как самым существенным образом упрощает исследование теплообмена в ряде практически важных задач с дозвуковыми скоростями течения.

## 3.2. УРАВНЕНИЕ СПЛОШНОСТИ ПОТОКА ЖИДКОСТИ

Система дифференциальных уравнений гидродинамики строится на основе законов сохранения массы и энергии. Рассмотрим поток жидкости через поверхность $F$, замыкающую объем $V$. В случае несжимаемой жидкости суммарный расход жидкости через поверхность равен нулю. В случае сжимаемой жидкости часть ее может задержаться или вытечь из рассматриваемого объема. При этом плотность жидкости в данной точке пространства будет возрастать или уменьшаться в единицу времени со скоростью $\partial\rho/\partial t$. Следовательно, изменение количества вещества в объеме $V$ будет

$$-\int\limits_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV = \int\limits_F \rho \mathbf{w}\,dF = \int\limits_V \operatorname{div}(\rho\mathbf{w})\,dV. \tag{3.2.1}$$

Знак минус при $\partial\rho/\partial t$ взят потому, что плотность жидкости в рассматриваемом объеме возрастает тогда, когда приращение расхода жидкости по координатам меньше нуля, и убывает, когда приращение расхода положительно.

Из уравнения (3.2.1) следует, что

$$\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}(\rho\mathbf{w}) = 0, \tag{3.2.2}$$

или в прямоугольных координатах

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w_z) = 0. \tag{3.2.3}$$

Для установившегося течения сжимаемой жидкости, когда $\partial\rho/\partial t = 0$,

$$\mathrm{div}(\rho\mathbf{w}) = 0. \tag{3.2.4}$$

Для несжимаемой жидкости уравнение сплошности принимает вид

$$\mathrm{div}\,\mathbf{w} = 0. \tag{3.2.5}$$

### 3.3. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В вязкой жидкости возможны как нормальные напряжения, так и напряжения сдвига. Нормальные напряжения обусловливаются наличием сил давления, а напряжения сдвига вызываются трением между слоями жидкости, двигающимися с различной скоростью. Напряжения сдвига (или касательные напряжения) в жидкости зависят от градиента скорости. По закону Ньютона для одномерного течения

$$\tau_{xy} = \mu\partial w_x/\partial y. \tag{3.3.1}$$

Жидкости, подчиняющиеся этому закону, называются ньютоновскими, а множитель пропорциональности $\mu$ — коэффициентом внутреннего трения или динамическим коэффициентом вязкости жидкости. Этот коэффициент имеет размерность Па·с, т. е. размерность импульса силы, отнесенного к единице поверхности трения.

Уравнения движения невязкой жидкости были составлены Эйлером. Навье и Стокс обобщили эти уравнения для случая течения жидкости, подчиняющейся закону трения Ньютона. В векторной форме уравнение движения ньютоновской жидкости имеет вид

$$\rho\frac{D\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{g}\rho + 2\,\mathrm{div}(\mu\dot{S}) - \mathrm{grad}\left(p + \frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}\right). \tag{3.3.2}$$

Здесь $D\mathbf{w}/dt$ — вектор с проекциями $Dw_x/dt$, $Dw_y/dt$ и $Dw_z/dt$; $\dot{S}$ — тензор скоростей деформаций, компонентами которого являются:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x};\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}\right);\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x}\right);$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y}\right);\quad \frac{\partial w_y}{\partial y};\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y}\right);$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z}\right);\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_z}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial z}\right);\quad \frac{\partial w_z}{\partial z}.$$

В проекциях на прямоугольные координаты векторному уравнению (3.3.2) соответствует система уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho \frac{Dw_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}\right)\right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\right] - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\mu \operatorname{div} \mathbf{w}); \\
&\rho \frac{Dw_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)\right] + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w_y}{\partial y}\right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y}\right)\right] - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\mu \operatorname{div} \mathbf{w}); \\
&\rho \frac{Dw_z}{dt} = g\rho - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z}\right)\right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w_z}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial z}\right)\right] + 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}(\mu \operatorname{div} \mathbf{w}).
\end{aligned}\right\} \quad (3.3.3)$$

Для изотермического течения несжимаемой жидкости, когда вязкость и плотность постоянны, из уравнения (3.3.2) следует:

$$\rho D\mathbf{w}/dt = g\rho - \operatorname{grad} p + \mu\nabla^2 \mathbf{w}. \quad (3.3.4)$$

Здесь $\nabla^2\mathbf{w}$ — вектор с проекциями $\nabla^2 w_x$, $\nabla^2 w_y$ и $\nabla^2 w_z$.

Работа потока, отнесенная к единице объема текущей среды, равна

$$L_V = \frac{\rho}{2}\frac{Dw^2}{dt} + 2\mu\dot{S}^2 - p \operatorname{div} \mathbf{w} - \frac{2}{3}\mu(\operatorname{div} \mathbf{w})^2, \quad (3.3.5)$$

где

$$\dot{S}^2 = \left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial z}\right)^2\right]. \quad (3.3.6)$$

Выражение

$$\operatorname{diss} F(\mathbf{w}) = 2\dot{S}^2 - \frac{2}{3}(\operatorname{div} \mathbf{w})^2 \quad (3.3.7)$$

называется функцией рассеяния (диссипации) механической энергии потока. Это рассеяние энергии происходит путем перехода ее в теплоту в результате действия внутреннего трения жидкости.

## 3.4. ПОДЪЕМНАЯ СИЛА, ОБУСЛОВЛЕННАЯ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Допустим, что температура $T$ в рассматриваемой точке отличается от температуры $T_0$ в некоторой определенной области или точке потока. Приняв $T_0$ за начало отсчета температурного уровня, обозначим через $\Delta T$ разность температур $T - T_0$.

Соотношение плотности жидкости в двух рассматриваемых точках (областях) потока равно

$$\rho_0/\rho = 1 + \beta\Delta T, \quad (3.4.1)$$

где $\beta$ — коэффициент объемного расширения, 1/K. Отсюда

$$\rho_0 - \rho = \rho\beta\Delta T. \quad (3.4.2)$$

Подъемная (архимедова) сила единицы объема определяется выражением (3.4.2), умноженным на $g$ и взятым с обратным знаком.

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*

1. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
2. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М., «Наука», 1973, Т. I, 536 с.; Т. 2, 584 с.
3. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1968.

*Глава* 4

# УРАВНЕНИЯ ОСРЕДНЕННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

## 4.1. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Путем ввода краски в поток жидкости или дыма в поток газа, движущихся в канале с прозрачными стенками, можно наблюдать траектории отдельных элементов изучаемого потока. При этом оказывается, что характер движения существенно меняется при переходе от одних значений скоростей течения к другим.

В области малых скоростей окрашенные частицы следуют в потоке по вполне определенным плавным траекториям, все время сохраняя движение в направлении вектора средней скорости потока, а возникающие в потоке случайные нерегулярности не развиваются, а гаснут. Этот вид движения называется ламинарным (слоистым) течением. При этом под средней скоростью потока при $\rho = \text{const}$ понимается отношение

$$\bar{w} = \frac{1}{\Delta t \Omega} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\Delta t} w d\Omega dt, \tag{4.1.1}$$

где $\Delta t$ — промежуток времени, за который производится осреднение, с. При некотором значении средней расходной скорости потока упорядоченное течение резко нарушается: в потоке возникают пульсации скорости, подкрашенные струйки быстро размываются, отдельные объемы («комки») жидкости начинают двигаться поперек потока и даже в обратном направлении к общему осредненному движению.

Возникшее нерегулярное, случайное в отношении малых элементов потока движение является весьма устойчивым в среднем и единственным реально существующим в области значительных скоростей течения. Таким образом, наиболее характерным видом движения жидкой среды является движение, неупорядоченное в малых элементах потока. Такого рода течение называется турбулентным.

В области скоростей, при которых имеет место ламинарное течение, не только капельные жидкости, но и газы во многих случаях могут рассматриваться как практически несжимаемые среды. Кроме того, при вынужденном течении обычно можно пренебречь действием силы тяжести. Уравнения движения и сплошности установившегося течения при этих условиях примут вид

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\,\text{grad}\, p + \nu \nabla^2 \mathbf{w} &= (\mathbf{w}, \text{grad})\, \mathbf{w}; \\ \text{div}\, \mathbf{w} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.1.2}$$

Если величины $\rho$ и $\nu$ заданы, то уравнения (4.1.2) содержат только два неизвестных: давление $p$ и скорость течения $w$. Следовательно, движение рассматриваемого потока определяется вполне однозначно, если известны геометрическая конфигурация канала, кинематическая вязкость жидкости и поле скоростей течения или поле относительных перепадов давления ($(1/\rho)$ grad $p$).

Выбирая в качестве независимой переменной скорость течения жидкости, имеем в качестве определяющих параметров потока три величины $\{\nu; \bar{w}; l\}$. Здесь $l$ — характерный геометрический размер канала (для круглой трубы $l = D$); $\bar{w}$ — осредненная по сечению канала скорость течения жидкости. Составляя безразмерную комбинацию этих трех величин, получаем комплекс

$$\text{Re} = \bar{w} l / \nu. \tag{4.1.3}$$

Рейнольдс показал, что переход от одного режима течения жидкости к другому происходит при некотором определенном значении этого безразмерного комплекса, а именно: при движении жидкости в круглой трубе ламинарное течение имеет место, когда $Re < 2000$, а турбулентное — при $Re > 2000$.

Комплекс Re получил наименование критерия режима движения и называется числом Рейнольдса. Как будет показано в дальнейшем, этот критерий имеет весьма общее значение, характеризуя основные гидродинамические свойства потока. Таким образом, можно сказать, что число Рейнольдса характеризует степень устойчивости потока по отношению к внешним и внутренним возмущениям.

Значение числа Re, при котором нарушается устойчивость течения жидкости, называется критическим и обозначается символом $Re_{кр}$. При $Re < Re_{кр}$ любые возмущения, возникающие в потоке, с течением времени затухают и не могут изменить общий ламинарный характер течения. Наоборот, при $Re > Re_{кр}$ любые, даже весьма малые, возмущения самопроизвольно возрастают и приводят к неустойчивости течения, т. е. к турбулизации потока.

Опыты показали, что путем удаления источников возмущений можно искусственно затянуть ламинарное движение в области значений числа $Re \gg Re_{кр}$. Таким образом удавалось сохранять ламинарное течение в круглой трубе при Re до 50 000. Однако при этом малейшее возмущение мгновенно нарушало устойчивость такого течения и переводило его в турбулентное.

На значение $Re_{кр}$ существенно влияет форма потока. Например, в сходящихся каналах (конфузоры) критическое значение числа Рейнольдса больше, чем в цилиндрической трубе, а в расширяющемся потоке (диффузоре) это число может быть весьма малым.

## 4.2. УРАВНЕНИЯ ОСРЕДНЕННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Турбулентное течение характеризуется беспорядочным перемещением внутри потока отдельных объемов жидкости, существенно бо́льших тех, к которым еще можно применить понятие дифференциального объема сплошной среды. Следовательно, общие уравнения гидродинамики приложимы и к турбулентному течению.

При этом необходимо тем или иным способом учесть статистическую природу турбулентности. Опыт показывает, что инерционные приборы (например, трубка Пито), помещенные в турбулентный поток, дают достаточно устойчивые во времени показания, т. е. значения скоростей и температур в турбулентном потоке за достаточно большой промежуток времени в среднем остаются постоянными. Таким образом, при установившемся осредненном движении потока его средняя за некоторый промежуток времени $\Delta t$ скорость течения $\bar{w}$ остается постоянной, истинные же (актуальные) скорости элементов потока непрерывно отклоняются от этого среднего значения как по величине, так и по направлению. Наблюдать эти отклонения можно с помощью термоанемометра, доплер-лазерного анемометра, электронного стробоскопа и других малоинерционных методов.

Актуальную скорость можно представить в виде суммы

$$\mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}} + \mathbf{V}, \tag{4.2.1}$$

где $\bar{\mathbf{w}}$ — вектор осредненной скорости в данной точке потока; $\mathbf{V}$ — вектор пульсационной составляющей истинной скорости, дающий отклонение этой скорости по величине и направлению от осредненного значения. Значение осредненной скорости потока в данной точке определяется интегралом

$$\bar{\mathbf{w}} = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{\Delta t} \mathbf{w} dt, \tag{4.2.2}$$

где промежуток времени $\Delta t$ должен быть достаточно большим по сравнению с периодом пульсации скорости, чтобы для различных промежутков времени результат осреднения был один и тот же. Отсюда очевидно, что

$$\int_{\Delta t} \mathbf{V}\, dt = 0, \tag{4.2.3}$$

поскольку за период $\Delta t$ все пульсационные составляющие скорости взаимно компенсируются.

Пульсации скорости вызывают в потоке также пульсации давления, температуры (в случае теплообмена), концентрации растворенного вещества (в случае диффузии) и т. п. Связь между пульсационными составляющими и осредненными значениями этих величин может быть определена по формулам того же типа, что приведенные выше выражения (4.2.1) и (4.2.2) для скорости течения.

Так как турбулентные пульсации согласно всем имеющимся наблюдениям не упорядочены, то, следовательно, осредненные характеристики турбулентного потока имеют статистическую природу, аналогично параметрам системы, состоящей из большого числа беспорядочно перемещающихся частиц, с тем, однако, принципиальным отличием, что сами элементы турбулентного потока не являются устойчивыми в пространстве и времени.

Обозначим пульсацию плотности через $\delta$ и пульсацию расхода через $j$:

$$\left.\begin{aligned}
w_x &= \overline{w}_x + V_x;\\
w_y &= \overline{w}_y + V_y;\\
w_z &= \overline{w}_z + V_z;\\
\rho &= \overline{\rho} + \delta;\\
\rho w_x &= \overline{\rho w}_x + j_x;\\
\rho w_x &= \overline{\rho w}_y + j_y;\\
\rho w_z &= \overline{\rho w}_z + j_z.
\end{aligned}\right\} \tag{4.2.4}$$

Принимая во внимание уравнение сплошности (3.2.2), можно написать, что

$$\left.\begin{aligned}
\rho \frac{Dw_x}{dt} &= \frac{\partial(\rho w_x)}{dt} + \frac{\partial(\rho w_x w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y w_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z w_x)}{\partial z};\\
\rho \frac{Dw_y}{dt} &= \frac{\partial(\rho w_y)}{dt} + \frac{\partial(\rho w_x w_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z w_y)}{\partial z};\\
\rho \frac{Dw_z}{dt} &= \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_x w_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y w_z)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z w_z)}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.2.5}$$

Подставим эти значения проекций вектора $\rho D\mathbf{w}/dt$ в уравнения (3.3.3) и произведем по типу (4.2.2) операцию осреднения по времени величин, входящих в эти уравнения. Получим

$$\frac{\partial \overline{\rho w_x}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho w_x w_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho w_y w_x}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\rho w_z w_x}}{\partial z} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial \overline{w}_x}{\partial x} +$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\mu\left(\frac{\partial \overline{w}_x}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\mu\left(\frac{\partial \overline{w}_x}{\partial z} + \frac{\partial \overline{w}_z}{\partial x}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\mu\left(\frac{\partial \overline{w}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w}_y}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}_z}{\partial z}\right). \tag{4.2.6}$$

Аналогичные выражения могут быть составлены и для двух других проекций. Осредненное уравнение сплошности имеет вид

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho w}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho w}_y}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\rho w}_z}{\partial z} = 0. \tag{4.2.7}$$

Далее, следуя Рейнольдсу, примем следующие правила осреднения.

1. Вторичное осреднение по той же переменной не изменяет значения, полученного после первого осреднения, т. е. если

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{\Delta t} \varphi dt, \tag{4.2.8}$$

то

$$\overline{\overline{\varphi}} = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{\Delta t} \overline{\varphi} dt = \overline{\varphi}. \tag{4.2.9}$$

Последнее означает, что на отрезке $\Delta t$ величина $\varphi$ может рассматриваться или как постоянная, или как линейная функция времени.

2. Осредненное произведение осредненного значения на актуальное значение равно произведению осредненных значений, т. е.

$$\overline{\overline{\varphi}\psi} = \overline{\varphi}\,\overline{\psi}. \tag{4.2.10}$$

3. В соответствии с равенством (4.2.3), если пульсационная составляющая величины $\varphi$ есть $\Phi$, то

$$\int\limits_{\Delta t} \Phi dt = 0. \tag{4.2.11}$$

При этом значение $\Delta t$ существенно больше периода пульсации.

Принимая во внимание эти соотношения, находим

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\overline{\rho w_x}\, w_x} = \overline{(\overline{\rho w_x} + j_x)(\overline{w}_x + V_x)} = \overline{\rho w_x}\,\overline{w}_x + \overline{j_x V_x};\\ &\overline{\rho w_x} = \overline{(\overline{\rho} + \delta)(\overline{w}_x + V_x)} = \overline{\rho}\,\overline{w}_x + \overline{\delta V_x}. \end{aligned}\right\} \tag{4.2.12}$$

Соответственно

$$\frac{\overline{\rho D w_x}}{dt} = \frac{\partial \overline{\rho w_x}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho w_x}\,\overline{w}_x + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho w_y}\,\overline{w}_x + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho w_z}\,\overline{w}_x + \frac{\partial}{\partial x} \overline{j_x V_x} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{j_y V_x} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{j_z V_x}. \tag{4.2.13}$$

Подставив эти выражения в уравнение (4.2.6) и приняв во внимание уравнение сплошности (4.2.7), получим уравнения осредненного движения сжимаемой жидкости в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\rho} \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial t} + \overline{\rho w_x} \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial x} + \overline{\rho w_y} \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial y} + \overline{\rho w_z} \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial z} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial t}(-\overline{\delta V_x}) + \frac{\partial}{\partial x}(-\overline{j_x V_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{j_y V_x}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\overline{j_z V_x})\right] + \\ &+ 2\frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial \overline{w}_x}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \mu \left(\frac{\partial \overline{w}_x}{\partial z} + \frac{\partial \overline{w}_z}{\partial x}\right) - \\ &- \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial \overline{w}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w}_y}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}_z}{\partial z}\right); \\ &\overline{\rho} \frac{\partial \overline{w}_y}{\partial t} + \overline{\rho w_x} \frac{\partial \overline{w}_y}{\partial x} + \overline{\rho w_y} \frac{\partial \overline{w}_y}{\partial y} + \overline{\rho w_z} \frac{\partial \overline{w}_y}{\partial z} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial t}(-\overline{\delta V_y}) + \frac{\partial}{\partial x}(-\overline{j_x V_y}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{j_y V_y}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\overline{j_z V_y})\right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial \overline{w}_y}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial \overline{w}_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \mu \left(\frac{\partial \overline{w}_y}{\partial z} + \frac{\partial \overline{w}_z}{\partial y}\right) - \\ &- \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial \overline{w}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w}_y}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}_z}{\partial z}\right); \end{aligned}\right\} \tag{4.2.14}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial\overline{w}_z}{\partial t}+\overline{\rho w}_x\frac{\partial\overline{w}_z}{\partial x}+\overline{\rho w}_y\frac{\partial\overline{w}_z}{\partial y}+\overline{\rho w}_z\frac{\partial\overline{w}_z}{\partial z}=g\overline{\rho}-\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}+\\
&+\left[\frac{\partial}{\partial t}(-\overline{\delta V}_z)+\frac{\partial}{\partial x}(-\overline{j_x V_z})+\frac{\partial}{\partial y}(-\overline{j_y V_z})+\frac{\partial}{\partial z}(-\overline{j_z V_z})\right]+\\
&+\frac{\partial}{\partial x}\mu\left(\frac{\partial\overline{w}_z}{\partial x}+\frac{\partial\overline{w}_x}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\mu\left(\frac{\partial\overline{w}_z}{\partial y}+\frac{\partial\overline{w}_y}{\partial z}\right)+2\frac{\partial}{\partial z}\mu\frac{\partial\overline{w}_z}{\partial z}-\\
&-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}\mu\left(\frac{\partial\overline{w}_x}{\partial x}+\frac{\partial\overline{w}_y}{\partial y}+\frac{\partial\overline{w}_z}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\}$$

Пульсации расхода связаны с пульсациями плотности и скорости соотношениями вида

$$\overline{j_i V_k}=\overline{[(\overline{\rho}+\delta)(\overline{w}_i+V_i)-\overline{\rho w}_i]\,V_k}=\overline{\rho}\overline{V_i V_k}+\overline{w}_i\overline{\delta V_k}+\overline{\delta V_i V_k}. \tag{4.2.15}$$

Если плотность и вязкость жидкости остаются неизменными при изменении $p$ и $T$, то $\rho$ = const, $\mu$ = const, $\delta = 0$, и уравнения (4.2.14) и (4.2.7) переходят в известные уравнения Рейнольдса:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\frac{D\overline{w}_x}{dt}=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\mu\nabla^2\overline{w}_x+\left[\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{V_x^2})+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{V_yV_x})+\right.\\
&\left.+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{V_zV_x})\right];\\
&\rho\frac{D\overline{w}_y}{dt}=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial y}+\mu\nabla^2\overline{w}_y+\left[\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{V_xV_y})+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{V_y^2})+\right.\\
&\left.+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{V_zV_y})\right];\\
&\rho\frac{D\overline{w}_z}{dt}=g\rho-\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}+\mu\nabla^2\overline{w}_z+\left[\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{V_xV_z})+\right.\\
&\left.+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{V_yV_z})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{V_z^2})\right];\\
&\frac{\partial\overline{w}_x}{\partial x}+\frac{\partial\overline{w}_y}{\partial y}+\frac{\partial\overline{w}_z}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{4.2.16}$$

Из этих уравнений видно, что в осредненном движении пульсации скорости вызывают появление членов, стоящих в квадратных скобках и аналогичных по смыслу членам вязкого трения. Они называются членами турбулентного трения и выражают потерю энергии в результате переноса количества движения значительными (молярными) объемами жидкости, перемещающимися вследствие пульсации скорости в потоке.

Нагляднее всего можно пояснить эту мысль на примере установившегося плоского потока, осредненное движение которого параллельно оси $x$, а скорость $w$ является функцией только координаты $y$. В этом случае из уравнений (4.2.16) следует, что

$$-\frac{d\overline{p}}{dx}+\mu\frac{d^2\overline{w}}{dy^2}+\frac{d}{dy}(-\rho\overline{V_xV_y})=0. \tag{4.2.17}$$

Введя обозначение для турбулентных касательных напряжений

$$\tau_T=-\rho\overline{V_xV_y}=\mu_T\frac{d\overline{w}}{dy} \tag{4.2.18}$$

и заметив, что

$$\frac{dp}{dx}=\frac{d\tau}{dy}=\mu\frac{d^2\overline{w}}{dy^2}+\frac{d}{dy}\left(\mu_T\frac{d\overline{w}}{dy}\right), \tag{4.2.19}$$

получим выражение для суммарных касательных напряжений

$$\tau=(\mu+\mu_T)\,d\bar{w}/dy. \tag{4.2.20}$$

Величина $\mu_T$ рассматривается при этом как некоторый коэффициент турбулентной «вязкости» и называется коэффициентом турбулентного переноса количества движения. Следует отчетливо представлять, что величина $\mu_T$, так же как и аналогичные ей коэффициенты турбулентного переноса теплоты и массы, о которых будет идти речь в дальнейшем, отнюдь не является неким физическим свойством текущей среды. Так, в потоке жидкости с постоянными $\rho$ и $\mu$ величина $\mu_T$ зависит от абсолютного значения $\mu$, числа Рейнольдса потока и координат. В развитом турбулентном потоке $\mu_T \gg \mu$.

Можно показать, что степень турбулентности потока может быть оценена отношением среднеквадратичного значения пульсационной составляющей скорости и средней скорости — критерием Кармана:

$$\mathrm{Ka}=\sqrt{\frac{\overline{V_x^2}+\overline{V_y^2}+\overline{V_z^2}}{3\bar{w}^2}}\,. \tag{4.2.21}$$

### 4.3. УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА

В неизотермическом турбулентном потоке следствием пульсаций скорости является также и пульсация температуры. В этом случае можно написать

$$T=\bar{T}+\Theta, \tag{4.3.1}$$

где $\Theta$ — пульсация температуры $T$.

В соответствии с уравнением сплошности можно записать:

$$c_p\,\frac{\overline{\rho DT}}{dt}=c_p\left(\frac{\partial\overline{\rho T}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{\rho w_x T}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\rho w_y T}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\rho w_z T}}{\partial z}\right). \tag{4.3.2}$$

Аналогично уравнению (4.2.12)

$$\overline{\rho w_i\,T}=\overline{(\overline{\rho w_i}+j_i)(\bar{T}+\Theta)}=\overline{\rho w_i}\,\bar{T}+\overline{j_i\Theta}. \tag{4.3.3}$$

Для простоты выкладок ограничимся рассмотрением уравнения распространения тепла (2.3.1) для скоростей течения, при которых члены, пропорциональные квадрату скорости, относительно малы. Используя уравнение (4.3.2) и произведя осреднение, получим

$$\overline{\operatorname{div}(\lambda\,\operatorname{grad}T)}=c_p\left(\frac{\partial\overline{\rho T}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{\rho w_x T}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\rho w_y T}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\rho w_z T}}{\partial z}\right)-q_V. \tag{4.3.4}$$

Используя зависимость (4.3.3) и уравнение сплошности, приводим выражение (4.3.4) к виду

$$c_p\left(\bar{\rho}\,\frac{\partial\bar{T}}{\partial t}+\overline{\rho w_x}\,\frac{\partial\bar{T}}{\partial x}+\overline{\rho w_y}\,\frac{\partial\bar{T}}{\partial y}+\overline{\rho w_z}\,\frac{\partial\bar{T}}{\partial z}\right)=\overline{\operatorname{div}(\lambda\,\operatorname{grad}T)}+$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(-c_p\overline{\delta\Theta}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(-c_p\overline{j_x\Theta}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-c_p\overline{j_y\Theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-c_p\overline{j_z\Theta}\right)\right]+q_V. \tag{4.3.5}$$

Для стационарного, развитого турбулентного потока, когда турбулентный перенос теплоты много больше молекулярного, из последнего уравнения следует

$$c_p\left(\overline{\rho w_x}\,\frac{\partial\bar{T}}{\partial x}+\overline{\rho w_y}\,\frac{\partial\bar{T}}{\partial y}+\overline{\rho w_z}\,\frac{\partial\bar{T}}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-c_p\overline{j_x\Theta}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-c_p\overline{j_y\Theta}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(-c_p\overline{j_z\Theta}\right)+q_V. \tag{4.3.6}$$

Члены, стоящие в правой части этого уравнения, характеризуют турбулентную теплопроводность. При $\rho$ = const и $\lambda$ = const уравнение (4.3.5) принимает относительно простую форму:

$$a\nabla^2 \overline{T} + \mathrm{div}\left(-\overline{\mathbf{V}\Theta}\right) + q_V/c_p\rho = D\overline{T}/dt, \tag{4.3.7}$$

где

$$\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{V}\Theta} = \frac{\partial}{\partial x}\overline{V_x\Theta} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{V_y\Theta} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{V_z\Theta}.$$

При $q_V = 0$ уравнение (4.3.7) может быть приведено к виду

$$a\,\mathrm{div}\left[\left(1 + \lambda_T/\lambda\right)\mathrm{grad}\,\overline{T}\right] = D\overline{T}/dt. \tag{4.3.8}$$

Здесь $\lambda_T$ — коэффициент турбулентной теплопроводности, компонентами которого являются:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{T,x} &= c_p\,\rho\overline{V_x\Theta}\Big/\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}; \\ \lambda_{T,y} &= c_p\,\rho\overline{V_y\Theta}\Big/\frac{\partial\overline{T}}{\partial y}; \\ \lambda_{T,z} &= c_p\,\rho\overline{V_z\Theta}\Big/\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3.9}$$

## 4.4. ТУРБУЛЕНТНОЕ ТРЕНИЕ И ТУРБУЛЕНТНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ПЛОСКОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

В плоском, установившемся и развитом турбулентном потоке (т. е. при $\mu_T \gg \mu$ и $\lambda_T \gg \lambda$), когда поперечные градиенты скоростей и температур много больше продольных, а продольный градиент давления много больше поперечного, из уравнений (4.2.7), (4.2.14) и (4.3.6) следует система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{j_y\Theta}\right) = \overline{\rho w_x}\frac{\partial\overline{T}}{\partial x} + \overline{\rho w_y}\frac{\partial\overline{T}}{\partial y}; \\ &-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{j_y V_x}\right) = \overline{\rho w_x}\frac{\partial\overline{w}_x}{\partial x} + \overline{\rho w_y}\frac{\partial\overline{w}_x}{\partial y}; \\ &\frac{\partial\overline{\rho w}_x}{\partial x} + \frac{\partial\overline{\rho w}_y}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.4.1}$$

Эта система описывает движение и теплообмен в турбулентном ядре потока жидкости в плоской трубе и в плоском пограничном слое при достаточно умеренных скоростях течения.

Из (4.4.1) следует, что для такого течения

$$\left.\begin{aligned} q_T &= -c_p\overline{j_y\Theta}; \\ \tau_T &= -\overline{j_y V_x}. \end{aligned}\right\} \tag{4.4.2}$$

Входящие в эти выражения величины можно выразить в виде явной функции пульсации плотности $\delta$, имея в виду зависимость (4.2.15) и то, что

$$\overline{j_i\Theta} = \overline{[(\overline{\rho}+\delta)(\overline{w}_i + V_i) - \overline{\rho w_i}]\,\Theta} = \overline{\rho}_i\,\overline{V_i\Theta} + \overline{w}_i\,\overline{\delta\Theta} + \overline{\delta V_i\,\Theta}. \tag{4.4.3}$$

Отсюда для рассматриваемого потока

$$\left.\begin{aligned} -q_T &= c_p\left(\overline{\rho}\overline{V_y\Theta} + \overline{w}_y\overline{\delta\Theta} + \overline{\delta V_y\Theta}\right); \\ -\tau_T &= \overline{\rho}\overline{V_x V_y} + \overline{w}_y\overline{\delta V_x} + \overline{\delta V_x V_y}. \end{aligned}\right\} \tag{4.4.4}$$

При $\rho = \text{const}$ $\delta = 0$ и из уравнения (4.4.4) следует

$$\left.\begin{aligned} q_T &= -c_p \rho \overline{V_y \Theta}; \\ \tau_T &= -\rho \overline{V_x V_y}. \end{aligned}\right\} \tag{4.4.5}$$

Если пульсации плотности связаны только с температурным полем (т. е. $\rho = \rho\,(T)$), но не зависят от $p$, что хорошо выполняется у капельных жидкостей и приближенно при дозвуковом течении газа, то

$$\delta = \rho - \bar{\rho} = -\bar{\rho}\beta\Theta, \tag{4.4.6}$$

где $\beta$ — температурный коэффициент объемного расширения жидкости, $K^{-1}$. При этом условии

$$\left.\begin{aligned} q_T &= -c_p \bar{\rho} \left(\overline{V_y \Theta} - \overline{w}_y \beta\overline{\Theta^2} - \overline{\beta\Theta^2 V_y}\right); \\ \tau_T &= \bar{\rho} \left(\overline{V_x V_y} - \overline{w}_y \beta\overline{\Theta V_x} - \beta\overline{\Theta V_x V_y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.4.7}$$

В этих уравнениях отчетливо обнаруживается тесная связь между коэффициентами турбулентного переноса тепла и количества движения.

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*


1. **Проблемы** турбулентности. Сб. статей. Под ред. М.А. Великанова и Н. Т. Швейковского. М.— Л., Объед. науч.-техн. изд-во НКТП СССР, 1936. Авт.: О. Рейнольдс, Л. Прандтль, Т. Карман, К. Тейлор и др.
2. **Хинце И. О.** Турбулентность. Пер. с англ. М., Физматгиз, 1963.
3. **Van Driest E. R.** Note on effects of density fluctuations on the turbulent skin friction of an insulated flat plate at high supersonic speeds.— «J. Aeron. Sci.», 1953, vol. 20, N 5, p. 360.

*Глава* 5

# КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

## 5.1. ВРЕМЕННЫЕ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

Совокупность уравнений распространения тепла в движущейся среде, сплошности и движения вязкой жидкости в общей форме описывает все процессы теплообмена путем теплопроводности и конвекции. В этом смысле говорят, что данная система уравнений описывает (является математической моделью) некоторый класс физических явлений. Число различных единичных явлений, входящих в данный класс, неограниченно велико. Это обстоятельство находит математическое отображение в том факте, что всякое дифференциальное уравнение имеет сколь угодно большое число частных решений. Решение, соответствующее данной конкретной задаче, выбирается с помощью краевых условий.

Временные краевые условия определяют поле переменных, входящих в уравнения данного класса физических явлений, в начальный или конечный момент времени протекания рассматриваемого конкретного процесса. Пространственные краевые условия определяют значения переменных на границах области, в которой протекает рассматриваемый процесс. В связи с этим такого рода условия называются также граничными. Таким образом, краевые условия дают те конкретные значения величин, которые выделяют определенное единичное явление из всего класса явлений той же физической природы.

Для стационарного (установившегося) процесса, т. е. такого процесса, в котором поля характеризующих его переменных не меняются во времени, временные краевые условия отпадают. Поэтому единичный стационарный процесс однозначно выделяется путем задания только граничных условий.

## 5.2. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ К УРАВНЕНИЯМ ГИДРОДИНАМИКИ

При рассмотрении задач, связанных с движением жидкой среды, важнейшим пространственным краевым условием является скорость течения в непосредственной близости к твердой ограждающей поверхности (стенки канала, поверхность обтекаемого тела). В том случае, когда неподвижная твердая стенка непроницаема, нормальная к ее поверхности составляющая вектора относительной скорости потока среды равна нулю. Если на ограждающих поверхностях в результате какого-либо физического или химического процесса происходит поглощение или выделение жидкости, то нормальная к стенке составляющая вектора скорости потока среды определяется скоростью протекания соответствующего процесса на стенке.

В отношении составляющей вектора относительной скорости потока, касательной к твердой стенке, опытом установлено, что на стенке она равна нулю. Это обстоятельство является следствием «прилипания» всякой реальной жидкости к твердой поверхности. Исключение составляет только движение сильно разреженного газа, когда длина свободного пробега молекул становится большой по сравнению с поперечным размером канала, по которому этот газ движется.

Таким образом, если плоскость $xz$ касательна в данной точке к поверхности ограждения и $y$ нормальна к ней, то составляющие вектора скорости течения на стенке равны

$$\left.\begin{aligned} w_{x,\text{ст}} = w_{z,\text{ст}} = 0; \\ w_{y,\text{ст}} = \pm j_{\text{ст}}/\rho. \end{aligned}\right\} \quad (5.2.1)$$

Здесь $w_{y,\text{ст}}$ — объемная скорость поглощения (выделения) жидкости на твердой стенке, м³/(м²·с); $j_{\text{ст}}$ — массовая скорость того же процесса, кг/(м²·с).

Величина $w_{y,ст}$ считается положительной, если она направлена от стенки в глубь потока. В этом случае и величину $j_{ст}$ считают положительной, а количество текущей среды возрастает в направлении осредненного движения потока. При поглощении части среды на стенке величине $j_{ст}$ приписывают знак минус. В этом случае скорость $w_{y,ст}$ направлена из потока к стенке, а количество текущей среды в направлении осредненного движения уменьшается.

В соответствии со сказанным составляющие градиента скорости на твердой стенке

$$\left.\begin{aligned}(\partial w_x/\partial x)_{ст} = (\partial w_z/\partial z)_{ст} = 0;\\ (\partial w_x/\partial y)_{ст} = \tau_{ст}/\mu,\end{aligned}\right\} \tag{5.2.2}$$

где $\tau_{ст}$ — касательные напряжения на стенке, Па. В местах втекания и стока жидкости должны быть заданы распределения скоростей и давления.

## 5.3. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ К УРАВНЕНИЯМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Временные краевые условия к уравнению распространения тепла сводятся к заданию скалярной функции

$$T = T_0(x; y; z), \tag{5.3.1}$$

дающей распределение температуры в рассматриваемой области в некоторый момент времени. Пространственные краевые условия сводятся к заданию условий теплообмена на ограждающих поверхностях. Способов задания таких условий три.

Пространственное краевое условие *первого рода* задается распределением температуры на ограждающих поверхностях как функции положения точки поверхности и времени. Эта функция должна быть задана для всех точек ограждающих поверхностей. В ряде практически важных задач оказывается возможным положить, что температура на твердой стенке одинакова во всех ее точках.

Пространственное краевое условие *второго рода* задается тепловым потоком, пронизывающим ограждающую поверхность, как функцией точки этой поверхности и времени.

Пространственное краевое условие *третьего рода* связывает температуру твердой стенки с температурой окружающей среды через заданное значение коэффициента теплоотдачи от стенки к этой среде. В этом случае температура в данной точке ограждающей поверхности

$$T_{ст} = T_0 + q/\alpha, \tag{5.3.2}$$

где $T_0$ — характерная температура среды. Выражая плотность теплового потока $q$ через градиент температуры в твердой стенке, получаем

$$T_{ст} = T_0 - (\lambda_{ст}/\alpha)(\partial T/\partial n)_{ст}, \tag{5.3.3}$$

или

$$(\partial T/\partial n)_{ст} = -(\alpha/\lambda_{ст})(T_{ст} - T_0). \tag{5.3.4}$$

Величина $h = \alpha/\lambda_{ст}$ имеет размерность $м^{-1}$ и называется *относительным коэффициентом теплоотдачи*. Величина, обратная относительному коэффициенту теплоотдачи, т. е.

$$1/h = \lambda_{ст}/\alpha, \tag{5.3.5}$$

имеет размерность длины и называется *дополнительной стенкой*. Физический смысл этого термина заключается в том, что значение дополнительной стенки равно толщине плоского слоя, имеющего ту же теплопроводность, что и рассматриваемое твердое тело, в котором при данном тепловом потоке $q$ имеет место перепад температур:

$$\Delta T = T_{ст} - T_0. \tag{5.3.6}$$

## 5.4. УСЛОВИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО И ТЕПЛОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ГРАНИЦАХ ФАЗ В МНОГОФАЗНОЙ СИСТЕМЕ

В ряде процессов, например при изменении агрегатного состояния теплоносителя, поток состоит из смеси жидкости и ее пара. В воздушных подъемниках (эрлифтах) имеет место совместное движение по трубам извлекаемой жидкости и увлекающего ее газа. Совместное течение жидкости и газа (или пара) получило общее наименование *двухфазного потока**.

В двухфазном потоке существуют кроме внешних поверхностей (стенок канала) также и внутренние поверхности — поверхности раздела фаз. Перемещения элементарных объемов каждой из фаз в области, ограниченной поверхностями раздела, определяются обычно уравнениями движения. Однако на поверхностях раздела фаз возникают силовые и тепловые взаимодействия. Эти взаимодействия определяют изменения полей скорости, давления, температуры и тепловых потоков при переходе из одной точки пространства к другой, отделенной от первой поверхностью раздела фаз.

Таким образом, при рассмотрении теплообмена и движения в двухфазном потоке необходимо: 1) в пространственных и временных краевых условиях задать поля скоростей (а тем самым и распределение на контурах и во времени) обеих фаз потока и соответственно краевые условия по температурам и давлениям; 2) определить уравнения, описывающие взаимодействие фаз потока, т. е. условия равновесия поверхности раздела.

Выделим контрольной поверхностью $F$ замкнутую область $V$, заключающую в себе поверхность раздела фаз. К поверхности $F$ приложены нормальные напряжения $\sigma_n$ и касательные напряжения $\tau_{\text{тр}}$. Условие динамического равновесия рассматриваемой области будет иметь вид

$$\int_V \mathbf{g}\rho dV + \int_F \sigma_n \, dF + \int_F \tau_{\text{тр}} \, dF = M d\mathbf{w}_0/dt, \tag{5.4.1}$$

где $M$ — масса, заключенная в объеме $V$; $d\mathbf{w}_0/dt$ — ускорение центра массы этого объема.

С другой стороны,

$$\left.\begin{aligned} \int_F \sigma_n \, dF &= \int_{F'} \sigma_n' \, dF + \int_{F''} \sigma_n'' \, dF; \\ \int_F \tau_{\text{тр}} \, dF &= \int_{F'} \tau_{\text{тр}}' \, dF + \int_{F''} \tau_{\text{тр}}'' \, dF. \end{aligned}\right\} \tag{5.4.2}$$

Предположим, что объем $V$ стремится к нулю, стягивая поверхность $F$ к поверхности раздела фаз $F_{\text{гр}}$. Тогда массовые и инерционные силы, пропорциональные $V$, также обращаются в нуль. С другой стороны, нормальные и касательные напряжения, будучи перпендикулярными друг другу, взаимно не уравновешиваются. Следовательно, условие динамического равновесия на границе раздела фаз распадается на условие попарного равенства нормальных и касательных напряжений:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{n,\text{гр}}' &= \sigma_{n,\text{гр}}''; \\ \tau_{\text{тр,гр}}' &= \tau_{\text{тр,гр}}''. \end{aligned}\right\} \tag{5.4.3}$$

---

* Поток жидкости или газа, несущий распыленные в нем твердые частицы, также является двухфазным. Однако в силу различий в механизмах движения, обусловленных, в первую очередь, постоянством формы твердых частиц и переменностью формы газовых пузырей, такой поток называется запыленным или диспергированным.

Если координата $y$ направлена по нормали к поверхности раздела фаз, а плоскость $xz$ касательна к ней в данной точке, то согласно уравнениям гидродинамики

$$\left.\begin{aligned} \sigma_n = \sigma_y = -p + (2/3)\,\mu\,\mathrm{div}\,\mathbf{w} + 3\mu\partial w_y/\partial y; \\ \tau_{\text{тр},xy} = \mu\,(\partial w_x/\partial y + \partial w_y/\partial x); \\ \tau_{\text{тр},zy} = \mu\,(\partial w_z/\partial y + \partial w_y/\partial z). \end{aligned}\right\} \quad (5.4.4)$$

При этом следует иметь в виду скачок давления, вызываемый кривизной поверхности раздела фаз и определяемый формулой Лапласа:

$$p''_{\text{гр}} = p'_{\text{гр}} + \sigma\,(1/R_1 + 1/R_2). \quad (5.4.5)$$

Здесь $R_1$ и $R_2$ — главные радиусы кривизны границы раздела в данной точке, м. Если выпуклость поверхности раздела обращена в сторону жидкости, то радиусы кривизны имеют знак плюс, если в сторону газа, то знак минус.

Из условия отсутствия скольжения фаз в местах их контакта следует, что

$$w'_{xz,\text{гр}} = w''_{xz,\text{гр}}. \quad (5.4.6)$$

Составляя тепловой баланс рассматриваемого объема $V$ и предполагая, что этот объем стремится к нулю в результате стягивания вокруг него поверхности раздела фаз, получим уравнение равенства тепловых потоков, пронизывающих эту поверхность со стороны жидкости и газа:

$$-\lambda'\,(\partial T'/\partial n)_{\text{гр}} = -\lambda''\,(\partial T''/\partial n)_{\text{гр}} + (i'' - i')_{\text{гр}}\, j_{\text{гр}}. \quad (5.4.7)$$

Здесь $j_{\text{гр}}$ — аналогично величине $j_{\text{ст}}$ уравнения (5.2.1) — плотность потока вещества через поверхность раздела, кг/(м$^2$·с).

Из условия отсутствия скачка температур следует, что $T'_{\text{гр}} = T''_{\text{гр}}$, где $T''_{\text{гр}}$ — температура фазового превращения, соответствующая давлению в рассматриваемой точке поверхности раздела фаз. Но при температуре насыщения разность теплосодержаний пара и жидкости $i'' - i' = r$, где $r$ — скрытая теплота парообразования, Дж/кг.

Таким образом, окончательно условия теплового взаимодействия на границах раздела фаз запишутся в виде уравнений:

$$\left.\begin{aligned} T'_{\text{гр}} = T''_{\text{гр}}; \\ -\lambda'\,(\partial T'/\partial n)_{\text{гр}} = r j_{\text{гр}} - \lambda''\,(\partial T''/\partial n)_{\text{гр}}. \end{aligned}\right\} \quad (5.4.8)$$

Если рассматривается тепловое взаимодействие на границе раздела фаз без изменения агрегатного состояния (например, на границе раздела двух жидкостей или двух твердых тел), то во втором уравнении (5.4.8) следует положить $j_{\text{гр}} = 0$.

Условия теплового взаимодействия тогда примут вид

$$\left.\begin{aligned} T_{1\text{гр}} = T_{2\text{гр}}; \\ \lambda_1\,(\partial T_1/\partial n)_{\text{гр}} = \lambda_2\,(\partial T_2/\partial n)_{\text{гр}}, \end{aligned}\right\} \quad (5.4.9)$$

где индексами 1 и 2 обозначены величины, относящиеся к двум соприкасающимся телам.

Из уравнений (5.4.9) видно, что на границе раздела двух тел температура меняется непрерывно, а градиент температур в случае неравенства коэффициентов теплопроводности соприкасающихся сред — скачкообразно. Если скорость перемещения границы раздела фаз по нормали к оси $y$ есть $w_{y,\text{гр}}$, то нормальная составляющая вектора скорости жидкой фазы на границе раздела

$$(w'_y)_{\text{гр}} = w_{y,\text{гр}} \pm j_{\text{гр}}/\rho', \quad (5.4.10)$$

а соответствующая составляющая вектора скорости газовой фазы

$$(w''_y)_{\text{гр}} = w_{y,\text{гр}} \pm j_{\text{гр}}/\rho''. \quad (5.4.11)$$

Таким образом, нормальные составляющие векторов скорости фаз на границе раздела равны друг другу только при $j_{гр} = 0$, т. е. при отсутствии процесса фазового превращения. В этом случае

$$\mathbf{w}'_{гр} = \mathbf{w}''_{гр}. \tag{5.4.12}$$

## 5.5. РЕАКТИВНАЯ СИЛА ПРИ ФАЗОВОМ ПРЕВРАЩЕНИИ

Неравенство величин $(w'_y)_{гр}$ и $(w''_y)_{гр}$ при наличии процесса фазового превращения приводит к тому, что количество движения потока вещества $j_{гр}$ меняется при переходе через поверхность раздела фаз. Изменение количества движения потока вещества, меняющего агрегатное состояние, вызывает появление реактивной силы, приложенной по нормали к поверхности раздела фаз:

$$p_n = j_{гр}(w''_y - w'_y)_{гр}; \tag{5.5.1}$$

$$p_n = (j^2_{гр}/\rho'')(1 - \rho''/\rho'). \tag{5.5.2}$$

Массовая скорость фазового превращения

$$j_{гр} = q_a/r, \tag{5.5.3}$$

где $q_a$ — плотность теплового потока, идущего на изменение агрегатного состояния, отнесенная к единице поверхности раздела фаз.

Подставляя значение $j_{гр}$ в уравнение (5.5.2), получаем

$$p_n = (q^2_a/\rho'' r^2)(1 - \rho''/\rho'). \tag{5.5.4}$$

Воспользовавшись последней формулой, легко показать, что реакция, вызываемая изменением скорости течения при прохождении через поверхность раздела фаз, обычно невелика.

Глава

# 6 УСЛОВИЯ ПОДОБИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООБМЕНА

## 6.1. ПОНЯТИЕ О ПОДОБИИ ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Законы природы и их математические модели, являясь отражением объективной реальности, в наиболее общих формулировках не зависят от выбора системы мер. В общей форме это есть проявление того фундаментального экспериментального факта, что локально физический мир описывается законами геометрии подобия. Иными словами, множество размерных величин, характеризующих некоторый конкретный процесс, в действительности эквивалентно множеству некоторых безразмерных комплексов этих величин. Наибольшее возможное число этих комплексов определяется следующей формулой анализа размерностей:

$$m = i - z. \tag{6.1.1}$$

Здесь $m$ — общее число безразмерных комплексов; $i$ — общее число размерных переменных, характеризующих данный процесс; $z$ — число первичных размерностей, из которых составлены эти переменные.

Если процесс описывается множеством уравнений

$$\mathfrak{M} = \{\sum D_i = 0\} \ (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{6.1.2}$$

где $D_i$ — некоторые размерные операторы, то каждое из этих уравнений может быть приведено к безразмерной форме путем деления на один из членов ряда. Рассмотренные в предыдущих главах основные дифференциальные уравнения теплопереноса и гидродинамики состоят из операторов вида

$$D = ay^b \, \partial^c y / \partial x^c, \tag{6.1.3}$$

где $a$ — некоторый параметр, например физическое свойство; $x$, $y$ — переменные; $b$, $c$ — натуральные числа. Введем безразмерные переменные вида

$$\bar{y} \equiv y/y_0; \quad \bar{x} \equiv x/x_0, \tag{6.1.4}$$

где индекс 0 означает, что величина отнесена к некоторой масштабной точке системы, и приведем уравнения (6.1.2) с операторами типа (6.1.3) к безразмерному виду путем деления каждого из уравнений на размерную часть первого члена. Получим множество уравнений

$$\mathfrak{M}_1 = \left[ (\bar{y}^b \, \partial^c \bar{y} / \partial \bar{x}^c)_1 + \sum_{i=2}^{n} (K \bar{y}^b \, \partial^c \bar{y} / \partial \bar{x}^c)_i = 0 \right], \tag{6.1.5}$$

в котором комплексы имеют вид

$$K_i \equiv (a y_0^{b+1} / x_0^c)_i \, (x_0^c / a y_0^{b+1})_i. \tag{6.1.6}$$

Процессы, в которых безразмерные функции $\bar{y}_i$ $(\bar{x}_i)$ тождественны, называются подобными. Иначе говоря, подобными являются процессы одной и той же физической природы, у которых поля безразмерных параметров геометрически тождественны.

## 6.2. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Поскольку в подобных процессах безразмерные поля одноименных величин тождественны, то абсолютные значения этих величин отличаются друг от друга только масштабом, т. е. в двух подобных процессах значения одноименных величин в сходственных пространственно-временных точках отличаются друг от друга на некоторый постоянный множитель преобразования.

Пространственно-сходственными точками называются точки, сходственные геометрически. Это означает, что если $A$ и $B$ — геометрические фигуры, причем $B$ получено преобразованием подобия $\varphi$ из $A$, то геометрически сходственной к точке $x$ из фигуры $A$ называется точка $\varphi(x)$ из фигуры $B$. Очевидно, что свойство точек быть геометрически сходственными является отношением эквивалентности (и, в частности, рефлексивно).

Временная координата, поскольку релятивистские эффекты здесь не рассматриваются, ничем не отличается от пространственных координат. Тем самым определяются четырехмерные нерелятивистские пространственно-временные сходственные точки.

Нетрудно заметить, что хотя множители преобразования отдельных величин, характеризующих данный процесс, могут быть неодинаковыми, однако для соблюдения подобия между ними должна существовать определенная взаимосвязь. В самом деле, тождественность безразмерных полей означает, что в подобных процессах безразмерные дифференциальные операторы имеют одно и то же значение. В символах это положение выражается записью

$$(\varphi^b \partial^c \varphi/\partial\psi^c)_i = \text{idem}, \tag{6.2.1}$$

где idem — «одно и то же» в отличие от символа const, означающего «постоянное значение».

С другой стороны, рассматриваемые процессы имеют одну физическую природу и соответственно описываются одними и теми же основными уравнениями. Следовательно, для подобных процессов должно быть также удовлетворено все уравнение (6.1.5) в целом. Последнее возможно только тогда, когда наряду с условиями (6.2.1) будет также выполнено условие

$$K_i = \text{idem}. \tag{6.2.2}$$

Таким образом, в подобных процессах безразмерные комплексы $K$ имеют одно и то же значение и называются критериями подобия. При этом следует отчетливо помнить, что подобие требует не равенства всех критериев друг другу, а одинаковости значений одноименных критериев, т. е. условие (6.2.2) в развернутой форме имеет вид

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \text{idem};\\ K_2 &= \text{idem};\\ &\dots\\ K_m &= \text{idem}.\end{aligned}\right\} \tag{6.2.3}$$

Из уравнений (6.1.5) видно, что число критериев равно числу членов уравнения без единицы, т. е.

$$m = n - 1. \tag{6.2.4}$$

### 6.3. ЗАВИСИМЫЕ И НЕЗАВИСИМЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ. УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОСТИ

Физический процесс полностью описывается некоторой системой основных уравнений и присоединенных к ним краевых условий в том случае, когда эта система является замкнутой. Тогда в принципе существует некоторая функция

$$y_i = \Phi_i(x_1;\ x_2;\ x_3; \dots;\ x_n), \tag{6.3.1}$$

где $y_i$ — искомая неизвестная (зависимая) переменная; $x_i$ — независимые переменные, входящие в основную систему уравнений.

Для того чтобы выяснить, какие из входящих в уравнения переменных являются независимыми, необходимо определить следующие условия протекания изучаемого процесса: 1) геометрические свойства системы, в которой происходит процесс (включая и координатную систему); 2) существенные для этого процесса физические характеристики тел, образующих систему; 3) началь-

ное или конечное состояние системы; 4) условия на границах системы в течение процесса.

Как видно, этот перечень представляет собой расширенное определение краевых условий и называется условиями однозначности физического процесса. Таким образом, условия однозначности являются комплексом физических и математических условий, обеспечивающим локальное существование и единственность решения заданной системы уравнений.

Величины, входящие в условия однозначности, задаются внешним образом по отношению к основным уравнениям и являются поэтому независимыми переменными, множество которых однозначно определяет протекание данного физического явления. В соответствии с этим все остальные переменные, входящие в основные уравнения, являются зависимыми переменными.

## 6.4. КОМБИНИРОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ. СОБСТВЕННО КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Рассмотренная выше безразмерная форма основных уравнений может быть получена путем деления ряда на любой из его членов, а не только на первый, как это было сделано в уравнениях (6.1.5). При этом нельзя указать какие-либо твердые правила выбора того или иного члена в качестве делителя. Следовательно, форма критериев $K_i$, получающихся в результате приведения уравнения к безразмерному виду, вообще говоря, случайна, и количество возможных форм зависит от числа членов уравнения. Неизменным остается только общее число критериев, определяемое формулой (6.2.4).

Таким образом, первичные критерии, содержащиеся в уравнениях типа (6.1.5), могут состоять из масштабов как независимых, так и зависимых переменных.

Допустим, что некоторая система основных уравнений содержит $m$ критериев (6.2.3). Очевидно, что множество условий $\{K_i = \mathrm{idem}\}$, где $i = 1,2,\ldots, m$, эквивалентно множествам вида $\{K_i/K_j = \mathrm{idem}\}$, где $j$ фиксировано.

Отсюда следует, что комбинация двух или нескольких первичных критериев также является критерием подобия. Однако общее число критериев подобия данного явления остается неизменным, т. е. не зависит от тех перестановок и рекомбинаций отдельных критериев, которые производятся внутри системы (6.2.3). Установленное правило комбинирования критериев подобия позволяет внутри любой системы первичных критериев выделить такие, которые состояли бы только из величин, входящих в условия однозначности.

Таким образом, каждой системе первичных критериев подобия

$$\{K_1;\ K_2;\ K_3;\ \ldots;\ K_m\} \tag{6.4.1}$$

эквивалентна система критериев подобия

$$\{K_{\alpha_1};\ K_{\alpha_2};\ K_{\alpha_3};\ \ldots;\ K_{\alpha_{m_\alpha}};\ K_{\beta_1};\ K_{\beta_2};\ K_{\beta_3};\ \ldots;\ K_{\beta_{m_\beta}}\}, \tag{6.4.2}$$

где $m_\alpha$ критериев $K_\alpha$ составлено как из зависимых, так и из независимых переменных и $m_\beta$ критериев $K_\beta$ составлено только из условий однозначности. При этом $m_\alpha + m_\beta = m$, т. е. общее число критериев (6.4.1) и (6.4.2) одно и то же.

Как уже было указано ранее, совокупность условий однозначности полностью определяет протекание данного процесса. В связи с этим критерии типа $K_\beta$, представляющие собой безразмерную форму условий однозначности, называются определяющими, а критерии типа $K_\alpha$ — неопределяющими, любой из которых является функцией системы определяющих критериев. Иными словами, размерной функциональной связи (6.3.1) всегда соответствует некоторая безразмерная связь типа

$$K_{\alpha_i} = \Phi_i\,(K_{\beta_1};\ K_{\beta_2};\ K_{\beta_3};\ \ldots;\ K_{\beta_{m_\beta}}). \tag{6.4.3}$$

Отсюда непосредственно следует основное правило моделирования, сформулированное в свое время М. В. Кирпичевым и А. А. Гухманом: подобны процессы, у которых подобны условия однозначности и численно одинаковы определяющие критерии.

Каждая точка функции (6.4.3) соответствует группе подобных процессов, а множество точек этой зависимости эквивалентно множеству групп данного класса. При анализе размерностей число определяющих критериев устанавливается формулой, аналогичной (6.1.1), т. е.

$$m_\beta = i_\beta - z_\beta, \tag{6.4.4}$$

где $i_\beta$ — число независимых переменных данного процесса; $z_\beta$ — число первичных размерностей, из которых составлены независимые переменные.

## 6.5. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ КАК ОБОБЩЕННЫЕ БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

В разд. 6.4 безразмерные параметры мы образовывали путем деления значения некоторой величины в данной точке на значение той же величины в масштабной точке. Теперь поступим несколько иначе. Выпишем уравнения теплопроводности и движения несжимаемой жидкости, полагая, что величины $\lambda$, $c$, $\rho$, $\mu$ остаются постоянными в данном процессе:

$$\left.\begin{aligned} &a\nabla^2 T + q_V/c\rho = \partial T/\partial t + (\mathbf{w}, \operatorname{grad} T); \\ &\mathbf{g} - (1/\rho)\operatorname{grad} p + \nu\nabla^2 \mathbf{w} = \partial \mathbf{w}/\partial t + (\mathbf{w}, \operatorname{grad})\,\mathbf{w}; \\ &\operatorname{div} \mathbf{w} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.5.1}$$

Так как температура и давление входят в эти уравнения только под знаками дифференциальных операторов, то уравнения (6.5.1) определяют не абсолютные значения $T$ и $p$, а их отклонения от температуры и давления в некоторой масштабной точке. Поэтому уравнения (6.5.1) можно переписать так:

$$\left.\begin{aligned} &a\nabla^2 (\Delta T) + q_V/c\rho = \partial (\Delta T)/\partial t + (\mathbf{w}, \operatorname{grad} (\Delta T)); \\ &\mathbf{g} - (1/\rho)\operatorname{grad} (\Delta p) + \nu\nabla^2 \mathbf{w} = \partial \mathbf{w}/\partial t + (\mathbf{w}, \operatorname{grad})\,\mathbf{w}; \\ &\operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6.5.2}$$

где $\Delta T$ и $\Delta p$ — соответствующие перепады температур и давлений, определенные относительно некоторых заданных значений $T_0$ и $p_0$. Разделим первое из этих уравнений на величину $a\Delta T_0/l_0^2$, а второе и третье — на величину $w_0^2/l_0$, где $\Delta T_0$ — масштабный перепад температур; $w_0$ — масштаб скорости и $l_0$ — масштаб длины.

Введя масштабные величины и физические характеристики (рассматриваемые в данном случае как постоянные) непосредственно под знаки дифференциальных операторов, получим

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 \vartheta + \frac{q_V l_0^2}{\lambda \Delta T_0} = \frac{\partial \vartheta}{\partial (at/l_0^2)} + \left(\frac{\mathbf{w} l_0}{a},\ \operatorname{grad} \vartheta\right); \\ &\frac{\mathbf{g} l_0}{w_0^2} - \operatorname{grad}\left(\frac{\Delta p}{\rho w_0^2}\right) + \frac{\nu}{w_0 l_0}\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial (w_0 t/l_0)} + (\boldsymbol{\omega}, \operatorname{grad})\,\boldsymbol{\omega}; \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.5.3}$$

Здесь $\vartheta \equiv \Delta T/\Delta T_0$ — безразмерный температурный напор; $\omega \equiv w/w_0$ — безразмерная скорость; $\bar{x} \equiv x/l_0$, $\bar{y} \equiv y/l_0$, $\bar{z} \equiv z/l_0$ — безразмерные координаты в дифференциальных операторах этих уравнений.

Полученные безразмерные уравнения (6.5.3) содержат ряд комплексов в виде самостоятельных членов уравнения, сомножителей при дифференциальных операторах и непосредственно под знаками дифференциальных операторов.

Таким образом, уравнения (6.5.3) представляют собой связь между критериями подобия, выступающими в них в качестве не только безразмерных пара-

метров при дифференциальных операторах, как в уравнениях типа (6.1.5), но и в качестве обобщенных переменных. Это обстоятельство позволяет строить безразмерные поля точечных значений соответствующих критериев рассматриваемого процесса.

## 6.6. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ НЕКОТОРЫХ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ

Рассмотренные выше уравнения теплопроводности и движения несжимаемой жидкости дают семь критериев подобия:

$$\{wl/a;\ w^2/gl;\ \Delta p/\rho w^2;\ wl/\nu;\ at/l^2;\ wt/l;\ q_V\, l^2/\lambda\Delta T\}. \qquad (6.6.1)$$

Физический смысл некоторых из этих величин непосредственно ясен из самой их записи. Так, очевидно, что комплекс $\Delta p/\rho w^2$ является мерой отношения перепада статических давлений в потоке $\Delta p$ к его динамическому напору $\rho w^2/2$. Комплекс $wt/l$ можно трактовать как отношение времени протекания процесса к некоторому масштабу, равному времени перемещения рассматриваемого элемента жидкости со скоростью $w$ на пути $l$. Комплекс $q_V l^2/\lambda\Delta T$ можно рассматривать как меру отношения количества тепла $q_V l^3$, выделившегося в теле, к количеству тепла $(\lambda/l)\ \Delta T l^2$, прошедшему через тело за счет теплопроводности. При этом величина $l^3$ является масштабом объема тела, $l^2$ — мерой поверхности и $l$ — мерой толщины. Остальные комплексы системы (6.6.1) требуют более детального исследования.

Раскрывая значение коэффициента температуропроводности, представим комплекс $wl/a$ в виде отношения $c\rho w\ /(\lambda/l)$. Числитель этого отношения можно рассматривать как изменение теплосодержания потока в осевом направлении при изменении температуры на 1°, а знаменатель — как тепловой поток за счет теплопроводности при поперечном градиенте температур 1°. Следовательно, критерий $wl/a$ является мерой отношения тепла, переносимого конвекцией, к теплу, проникающему в поток за счет теплопроводности.

Физический смысл комплекса $w^2/gl$ становится ясным, если умножить и разделить это выражение на плотность жидкости $\rho$. Очевидно, что величина $\rho w^2/g\rho l$ является мерой отношения динамического напора потока (его кинетической энергии) к силе тяжести, пропорциональной $g\rho l$.

Умножая и деля комплекс $wl/\nu$ на $w$, легко установить, что этот уже известный нам критерий режима движения представляет собой меру отношения динамического напора потока $\rho w^2/2$ (силы инерции) к силе вязкого трения, пропорциональной $\mu\ (w/l)$.

Наконец, комплекс $at/l^2$, рассматриваемый как отношение масштаба количества тепла, притекшего за счет теплопроводности $(\lambda/l)l^2 t$, к масштабу изменения теплосодержания тепла $c\rho l^3$, является мерой скорости изменения температуры тела при неустановившемся тепловом состоянии.

## 6.7. КРИТЕРИЙ ТЕПЛОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОМ ПРЕВРАЩЕНИИ ВЕЩЕСТВА

Все физико-химические превращения разделяются на гомогенные и гетерогенные. В первом случае превращение вещества происходит во всем рассматриваемом объеме, а во втором — только по поверхности раздела. Легко установить, что скорость превращения вещества при гомогенном процессе в несжимаемой жидкости

$$dG = \rho\ \mathrm{div}\ \mathbf{w} dV. \qquad (6.7.1)$$

При этом плотность возникающего внутреннего распределенного источника тепла

$$q_V = r dG/dV = r\rho\ \mathrm{div}\ \mathbf{w}, \qquad (6.7.2)$$

где $r$ — теплота реакции. Подставляя это выражение в критерий $q_V l_0^2/\lambda\Delta T_0$, получаем

$$\frac{r\rho l_0^2}{\lambda\Delta T_0}\operatorname{div}\mathbf{w}=\frac{r\rho l_0 w_0}{\lambda\Delta T_0}\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}. \qquad (6.7.3)$$

Таким образом, безразмерное уравнение теплопроводности в потоке несжимаемой жидкости при гомогенной реакции имеет вид

$$\nabla^2\vartheta+\frac{r\rho l_0 w_0}{\lambda\Delta T_0}\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}=\frac{D\vartheta}{d\,(at/l_0^2)}, \qquad (6.7.4)$$

или, выделяя критерий $w_0 l_0/a$, можно записать

$$\nabla^2\vartheta+\frac{r}{c\Delta T_c}\,\frac{w_0 l_0}{a}\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}=\frac{\partial\vartheta}{\partial\,(at/l_0^2)}+\frac{w_0 l_0}{a}(\boldsymbol{\omega},\operatorname{grad}\vartheta). \qquad (6.7.5)$$

При гетерогенном превращении, когда реакция протекает на поверхностях раздела, тепловое взаимодействие реагирующих веществ определится уравнением (5.4.8). Приведя последнее к безразмерному виду и принимая во внимание, что $g_n=\rho w_n=\rho'' w_n''$, получаем

$$-\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi_n}\right)_{\text{гр}}=\frac{r}{c\Delta T_0}\,\frac{w_0 l_0}{a}\,\omega_{n,\text{гр}}-\frac{\lambda''}{\lambda}\left(\frac{\partial\vartheta''}{\partial\xi_n}\right)_{\text{гр}}. \qquad (6.7.6)$$

Из сопоставления уравнений (6.7.5) и (6.7.6) следует, что специфические особенности теплообмена при любом физико-химическом превращении характеризуются значением введенного в свое время автором критерия $r/c\Delta T$, представляющего собой отношение скрытой теплоты реакции $r$ к теплоте перегрева (переохлаждения) данной фазы $\Delta i=c\Delta T$.

## 6.8. БЕЗРАЗМЕРНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛООТДАЧИ

В связи с тем что непосредственно на границе с обтекаемым твердым телом скорость жидкости равна нулю, тепловой поток передается через пристеночный слой только теплопроводностью, т. е. может быть выражен уравнением

$$q=-\lambda\,(\partial T/\partial n)_{\text{ст}}, \qquad (6.8.1)$$

где $\lambda$ — коэффициент теплопроводности жидкости; $(\partial T/\partial n)_{\text{ст}}$ — градиент температуры в тонком слое жидкости, непосредственно контактирующем с твердой стенкой.

С другой стороны, вводя коэффициент теплоотдачи, можем написать

$$q=\alpha\,(T_{\text{ст}}-T_0). \qquad (6.8.2)$$

Совмещая эти два выражения теплового потока на границе твердого тела и жидкости, получаем

$$\alpha\Delta T=-\lambda\,(\partial T/\partial n)_{\text{ст}} \qquad (6.8.3)$$

или, в безразмерном виде,

$$\alpha l_0/\lambda=-(\partial\vartheta/\partial\xi_n)_{\text{ст}}. \qquad (6.8.4)$$

Величину $\alpha l_0/\lambda$ можно рассматривать как безразмерную форму коэффициента теплоотдачи.

Основные критерии подобия приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

**Основные критерии подобия гидродинамических и тепловых процессов**

| Критерий | Символ | Наименование | Пояснение |
|---|---|---|---|
| $\frac{wt}{l}$ | Ho | Критерий гидродинамической гомохронности | Характеризует скорость изменения поля скоростей течения среды во времени |
| $\frac{wl}{\nu}$ | Re | Критерий режима движения (число Рейнольдса) | Характеризует гидродинамический режим потока, являясь мерой отношения в потоке сил инерции и молекулярного трения |
| $\frac{w^2}{gl}$ | Fr | Критерий гравитационного подобия (число Фруда) | Является мерой отношения сил инерции и тяжести в однородном потоке |
| $\frac{wl}{a}$ | Pe | Критерий теплового подобия (число Пекле) | Является мерой отношения молекулярного и конвективного переносов тепла в потоке |
| $\frac{\nu}{a}=\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Re}}$ | Pr | Критерий подобия температурных и скоростных полей (число Прандтля) | Является мерой подобия температурных и скоростных полей в потоке (при $\mathrm{Pr}=1$ и $\mathrm{grad}\ p=0$ поля температур и скоростей подобны) |
| $\frac{\Delta p}{\rho w^2}$ | Eu | Критерий подобия полей давления (число Эйлера) | Является мерей отношения сил давления и инерции в потоке |
| $\frac{gl^3}{\nu^2}=\frac{\mathrm{Re}^2}{\mathrm{Fr}}$ | Ga | Критерий подобия полей свободного течения (число Галилея) | Является мерой отношения сил молекулярного трения и тяжести в потоке. В форме критерия Грасгофа $\mathrm{Gr}=\mathrm{Ga}\beta\Delta T$ характеризует взаимодействие сил молекулярного трения и подъемной силы, обусловленной различием плотностей в отдельных точках неизотермического потока |
| $\frac{w}{a^*}$ | M | Критерий газодинамического подобия (число Маха—Маиевского) | Является мерой отношения между скоростью течения среды и скоростью распространения в ней упругих деформаций $a^*$ |
| $\frac{w''_{\text{кр}}\sqrt{\rho''}}{\sqrt[4]{g\sigma(\rho'-\rho'')}}$ | $k$ | Критерий устойчивости двухфазной системы (введен автором) | Характеризует критическую скорость газовой (паровой) фазы |
| $\frac{at}{l^2}$ | Fo | Критерий тепловой гомохронности (число Фурье) | Характеризует связь между скоростью изменения температурного поля, физическими свойствами и размерами тела |
| $\frac{r}{c\Delta T};\ \frac{r}{\Delta i}$ | $K$ | Тепловой критерий фазового превращения (введен автором) | Является мерой отношения теплового потока, идущего на фазовое превращение вещества, к теплоте перегрева (переохлаждения) одной из фаз по отношению к температуре насыщения. В форме $\mathrm{Ja}=K\rho''/\rho'$ представляет меру отношения теплоты фазового превращения к теплоте перегрева (переохлаждения) одной из фаз в объемных единицах и называется часто критерием Якоба. В форме $q/r\rho w \equiv \mathrm{Nu}/K\,\mathrm{Pe}$ является мерой отношения скорости фазового превращения $q/r\rho$ к скорости течения данной фазы. В форме $ql/r\rho\nu \equiv \mathrm{Nu}/K\,\mathrm{Pr}$ является мерой отношения инерционных сил в потоке, возникающих под влиянием процесса фазового превращения, к силам внутреннего трения, т. е. представляет собой специфическую форму критерия Re |

| Критерий | Символ | Наименование | Пояснение |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{\sigma}{g(\rho-\rho'')\,l^2}$ | We | Критерий поверхностного натяжения (критерий Вебера) | Является мерой влияния давления, создаваемого поверхностным слоем молекул |
| $\dfrac{\alpha l}{\lambda}$ | Nu | Безразмерный коэффициент теплоотдачи (критерий Нуссельта) | Характеризует связь между интенсивностью теплоотдачи и температурным полем в пограничном слое |
| $\dfrac{\alpha}{c\rho w}$ | St | Критерий конвективного переноса тепла (критерий Стентона) | Является мерой отношения интенсивности теплоотдачи и удельного теплосодержания потока |
| $\dfrac{\alpha l}{\lambda_{ст}}$ | Bi | Критерий краевого подобия (критерий Био) | Характеризует связь между полем температур в твердом теле и условиями теплоотдачи на его поверхности, являясь мерой отношения внутреннего и внешнего термических сопротивлений |

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*


1. **Гухман А. А.** Введение в теорию подобия. М., «Высшая школа», 1963.
2. **Кирпичев М. В.** Теория подобия. М., Изд-во АН СССР, 1953.
3. **Кутателадзе С. С., Ляховский Д. Н., Пермяков В. А.** Моделирование теплоэнергетического оборудования. М., «Энергия», 1966.
4. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехтеориздат, 1954.
5. **Эйгенсон Л. С.** Моделирование. М., «Советская наука», 1952.

*Глава* 7

# УСТАНОВИВШИЙСЯ ТЕПЛОВОЙ ПОТОК В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

## 7.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

При $w = 0$ и $dT/dt = 0$ из уравнения (2.3.4) следует уравнение стационарной теплопроводности в неподвижной среде:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q_V = 0. \qquad (7.1.1)$$

При постоянном коэффициенте теплопроводности ($\lambda = \mathrm{const}$) и отсутствии внутреннего источника тепла ($q_V = 0$) уравнение температурного поля максимально упрощается и сводится к условию равенства нулю лапласиана температуры

$$\nabla^2 T = 0,$$

т. е. в прямоугольных координатах:

$$\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 + \partial^2 T/\partial z^2 = 0, \qquad (7.1.2)$$

в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial T}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \qquad (7.1.3)$$

в сферических координатах:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial T}{\partial R} + \frac{\cos\psi}{R^2 \sin\psi}\frac{\partial T}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} + \frac{1}{R^2 \sin^2\psi}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0. \qquad (7.1.4)$$

В случае изотропного тела с коэффициентом теплопроводности, являющимся функцией только температуры, целесообразно ввести функцию

$$U = \int_0^T \lambda dT, \text{ где } \lambda = \lambda(T). \qquad (7.1.5)$$

Дифференцируя функцию $U$ по координатам, получаем

$$\partial U/\partial x_i = \lambda \partial T/\partial x_i; \qquad (7.1.6)$$

$$\nabla^2 U = \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) (1 \leqslant i \leqslant 3). \qquad (7.1.7)$$

Теперь уравнение теплопроводности (7.1.1) можно переписать в виде

$$\nabla^2 T + q_V = 0, \qquad (7.1.8)$$

и при $q_V = 0$

$$\nabla^2 U = 0. \qquad (7.1.9)$$

Тепловой поток через заданную поверхность $F$ определяется формулой

$$Q = -\int_F \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF, \qquad (7.1.10)$$

или в соответствии с (7.1.6)

$$Q = -\int_F \frac{\partial U}{\partial n} dF. \qquad (7.1.11)$$

У геометрически подобных тел с аналогично заданными граничными условиями функции

$$\Phi = \int\limits_F \frac{\partial (U-U_2)}{(U_1-U_2)\,\partial n}\,dF \qquad (7.1.12)$$

должны иметь одно и то же значение. Следовательно, стационарный тепловой поток через твердое тело, коэффициент теплопроводности которого является функцией температуры, определяется в общем виде формулой

$$Q = (U_1 - U_2)\,\Phi\,. \qquad (7.1.13)$$

Здесь $U_1$ и $U_2$ — значения функций $U$ в характерных местах тела (например на внутреннем и внешнем изотермических контурах). Величина $\Phi$ в этой формуле характеризует геометрические свойства тела и называется *формфактором.*

При $\lambda$ = const из (7.1.13) следует, что

$$Q = \lambda\,(T_1 - T_2)\,\Phi. \qquad (7.1.14)$$

Как видно, величина формфактора обратно пропорциональна термическому сопротивлению тела при постоянном коэффициенте теплопроводности $\lambda = 1$.

Разность значений функций $U_1$ и $U_2$ может быть определена так:

$$U_1 - U_2 = \int\limits_{T_2}^{T_1} \lambda dT = \bar{\lambda}\Delta T;\; Q = \bar{\lambda}\Phi\,(T_1 - T_2). \qquad (7.1.15)$$

Здесь

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{T_1 - T_2}\int\limits_{T_2}^{T_1} \lambda\,(T)\,dT. \qquad (7.1.16)$$

Таким образом, тепловой поток в изотропных телах с коэффициентом теплопроводности, являющимся функцией температуры, может вычисляться по формулам, выведенным для случая $\lambda$ = const, при подстановке в эти формулы среднего коэффициента теплопроводности, определенного по формуле (7.1.16). Если поверхности, ограждающие данное тело, изотермические, то граничные условия к уравнениям (7.1.1) и (7.1.8) всегда подобны. Действительно, в этом случае на контурах системы соответственно заданы условия:

$$T_1 = \text{const},\; U_1 = \int\limits_{T_2}^{T_1} \lambda dT = \text{const};\; T_2 = \text{const},\; U_2 = \int\limits_{0}^{T_2} \lambda dT = \text{const}.$$

При $\lambda$ = const $U = \lambda T$ и, следовательно, в геометрически подобных телах с подобно заданными граничными условиями поле температур для тела с $\lambda$ = = const подобно полю функции $U$ для тела с $\lambda = \lambda\,(T)$.

Обычно с достаточной для большинства практически важных задач точностью можно считать коэффициент теплопроводности или постоянным, равным его среднему значению в данном интервале температур, или линейно меняющимся с температурой:

$$\lambda = a + bT. \qquad (7.1.17)$$

В последнем случае

$$U = aT + T^2 b/2 \qquad (7.1.18)$$

и поле температур связано с полем функции $U$ (т. е. с полем температур для тела той же конфигурации и $\lambda$ = const) формулой

$$T = (a/b)\left(\sqrt{1 + 2bU/a^2} - 1\right). \qquad (7.1.19)$$

## 7.2. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ЧЕРЕЗ ПЛОСКУЮ СТЕНКУ

Рассмотрим плоскую стенку из однородного материала. Высоту и длину стенки будем считать настолько большими по сравнению с ее толщиной $\delta$, что температура в этих направлениях практически не меняется. Для этих условий

$$d^2U/dx^2=0;\ U=U_1-x(U_1-U_2)/\delta. \qquad (7.2.1)$$

Тепловой поток, проходящий через 1 м$^2$ поверхности стенки, равен

$$q=-dU/dx=\Delta T\bar{\lambda}/\delta, \qquad (7.2.2)$$

где $\Delta T = T_1 - T_2$ — разность температур поверхностей стенки. При этом принимается, что $T_1 > T_2$.

Когда $\lambda$ = const, линейной функции $U$ соответствует линейное же распределение температуры:

$$T=T_1+x(T_1-T_2)/\delta. \qquad (7.2.3)$$

При линейно меняющемся с температурой коэффициенте теплопроводности поле температур определяется через поле функции $U$ — в данном случае формула (7.2.1) — по формуле (7.1.18). Поскольку эти связи не зависят от конфигурации тела, далее все задачи рассматриваются для наиболее простого случая $\lambda$ = const.

При установившемся процессе и отсутствии внутренних источников тепла тепловой поток, проходящий через любое сечение многослойной стенки, один и тот же, т. е. при $dq/dx = 0$

$$T_{\text{ст},1}-T_{\text{ст},2}=q[1/\alpha_1+\sum(\delta_i/\lambda_i)+1/\alpha_2]\ (1\leqslant i\leqslant n). \qquad (7.2.4)$$

Здесь $\alpha_1$ — коэффициент теплоотдачи от более горячей среды к поверхности стенки, Вт/(м$^2\cdot$К); $\alpha_2$ — коэффициент теплоотдачи от стенки к более холодной среде, Вт/(м$^2\cdot$К); $T_1$ — температура горячей среды, К$_2$; $T_2$ — температура холодной среды, К; $\lambda_i$ — коэффициент теплопроводности $i$-го слоя стенки, Вт/(м$\cdot$К); $\delta_i$ — толщина $i$-го слоя стенки, м.

Введя обозначения

$$k=[1/\alpha+\sum(\delta_i/\lambda_i)+1/\alpha_2]^{-1}\ (1\leqslant i\leqslant n), \qquad (7.2.5)$$

можем написать

$$q=k\,(T_1-T_2). \qquad (7.2.6)$$

Здесь $k$ — коэффициент теплопередачи через многослойную плоскую стенку, Вт/(м$^2\cdot$К).

Величина $R_k^*=1/k$ является общим термическим сопротивлением многослойной стенки и слагается из термических сопротивлений $1/\alpha_1$, $1/\alpha_2$ и термического сопротивления собственно стенки:

$$R^*_{\text{ст}}=\sum(\delta_i/\lambda_i). \qquad (7.2.7)$$

Частные температурные напоры могут быть выражены через полную разность температур с помощью формул

$$\left.\begin{aligned} &T_1-T_{\text{ст},1}=(T_1-T_2)\,k\alpha_1;\\ &T_{\text{ст},i}-T_{\text{ст},i+1}=(T_1-T_2)\,k\delta_i/\lambda_i;\\ &T_{\text{ст},n+1}-T_2=(T_1-T_2)k/\alpha_2.\end{aligned}\right\} \qquad (7.2.8)$$

## 7.3. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ЧЕРЕЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ СТЕНКУ

На внутренней поверхности цилиндра задана температура $T_1$, а на наружной $T_2$. Внутренний радиус равен $R_1$, наружный $R_2$. Длина цилиндра достаточно велика для того, чтобы пренебречь потоком тепла к его торцам вдоль

оси $z$. При этих условиях в уравнении теплопроводности (7.1.3) температура является функцией только одной координаты — радиуса $R$:

$$\frac{d^2T}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dT}{dR}=0;\ T=T_1-\frac{T_1-T_2}{\ln(R_2/R_1)}\ln\frac{R}{R_1}. \qquad (7.3.1)$$

Отсюда тепловой поток через цилиндрическую стенку

$$Q=-\lambda\left(\frac{dT}{dR}\right)_{R_1}2\pi R_1 L=\frac{2\pi\lambda L(T_1-T_2)}{\ln(R_2/R_1)}, \qquad (7.3.2)$$

где $L$ — длина цилиндра.

Для многослойной цилиндрической стенки

$$dQ/dR=0;\ Q=k^*(T_1-T_2)L, \qquad (7.3.3)$$

где

$$k^*=2\pi\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1}+\sum\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{R_{i+1}}{R_i}+\frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}}\right)^{-1}(1\leqslant i\leqslant n). \qquad (7.3.4)$$

Величина $k^*$ называется коэффициентом теплопередачи с поверхности трубы длиной 1 м и равна тепловому потоку, проходящему через цилиндрическую стенку длиной 1 м при разности температур 1° С.

Если относить количество тепла не к 1 м длины трубы, а к площади ее внутренней поверхности или наружной поверхности изоляции, то

$$\left.\begin{aligned}Q&=k_1 2\pi R_1 L(T_1-T_2);\\ Q&=k_2 2\pi R_{n+1}L(T_1-T_2),\end{aligned}\right\} \qquad (7.3.5)$$

где

$$\left.\begin{aligned}k_1&=k^*/2\pi R_1;\\ k_2&=k^*/2\pi R_{n+1}.\end{aligned}\right\} \qquad (7.3.6)$$

Для промежуточных температур многослойной цилиндрической стенки существуют уравнения:

$$\left.\begin{aligned}T_1-T_{\text{ст},1}&=(T_1-T_2)k^*/2\pi R_1\alpha_1;\\ T_{\text{ст},i}-T_{\text{ст},i+1}&=(T_1-T_2)\frac{k^*}{2\pi\lambda_i}\ln\frac{R_{i+1}}{R_1};\\ T_{\text{ст},n+1}-T_2&=(T_1-T_2)k^*/2\pi R_{n+1}\alpha_2.\end{aligned}\right\} \qquad (7.3.7)$$

Цилиндрическая тепловая изоляция в отличие от изоляции плоской может иметь некоторое конечное значение критического диаметра, соответствующего максимуму теплового потока. Действительно, тепловое сопротивление трубы с цилиндрической изоляцией равно

$$R^*=\frac{1}{k^*}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha_1 D_1}+\frac{1}{2\lambda_{\text{тр}}}\ln\frac{D_2}{D_1}+\frac{1}{2\lambda_{\text{из}}}\ln\frac{D_{\text{из}}}{D_1}+\frac{1}{\alpha_1 D_{\text{из}}}\right). \qquad (7.3.8)$$

Здесь $D_1$ — внутренний диаметр трубы; $D_2$ — наружный диаметр трубы; $D_{\text{из}}$— наружный диаметр изоляции; $\lambda_{\text{тр}}$ — коэффициент теплопроводности материала трубы; $\lambda_{\text{из}}$ — коэффициент теплопроводности изоляции.

Продифференцировав это выражение по $D_{\text{из}}$ и при условии $\alpha=\text{const}$, получаем формулы Власова:

$$\left.\begin{aligned}&\pi D_{\text{из}}\partial R^*/\partial D_{\text{из}}=1/2\lambda_{\text{из}}-1/\alpha_2 D_{\text{из}};\\ &\pi D_{\text{из}}^2\partial^2R^*/\partial D_{\text{из}}^2=2/\alpha_2 D_{\text{из}}-1/2\lambda_{\text{из}};\\ &D_{\text{кр}}=2\lambda_{\text{из}}/\alpha_2;\ \partial^2R^*/\partial D_{\text{из}}^2=\alpha_2/8\pi\lambda_{\text{из}}^3>0.\end{aligned}\right\} \qquad (7.3.9)$$

Следовательно, при $D_{\text{из}}=D_{\text{кр}}$ тепловое сопротивление трубы минимально и соответственно тепловой поток достигает наибольшего значения.

Критический диаметр изоляции не зависит от размеров трубопровода и коэффициента теплоотдачи $\alpha_1$, а определяется только коэффициентом теплопроводности изоляции и коэффициентом теплоотдачи в окружающую изоляцию

среду. Чем лучше изоляционный материал, т. е. чем меньше его коэффициент теплопроводности, и чем интенсивнее охлаждение изоляции, т.е. чем больше $\alpha_2$, тем меньше критический диаметр изоляции.

Толщину изоляции, при которой тепловой поток становится равным теплопотерям неизолированного трубопровода, можно найти из уравнения

$$\alpha_2 (T_{\text{ст}, 2} - T_2) \pi D_2 = \pi (T_{\text{ст}, 2} - T_2) \Bigg/ \left( \frac{1}{2\lambda_{\text{из}}} \ln \frac{D_{\text{из}}}{D_2} + \frac{1}{\alpha_2 D_{\text{из}}} \right). \quad (7.3.10)$$

Изоляция становится эффективной тогда, когда сопротивление теплопереходу от поверхности неизолированной трубы к окружающей среде становится меньше термического сопротивления теплопереходу через слой изоляции (рис. 7.1):

$$\frac{1}{\alpha_2 D_2} < \frac{1}{2\lambda_{\text{из}}} \ln \frac{D_{\text{из}}}{D_2} + \frac{1}{\alpha_2 D_{\text{из}}}. \quad (7.3.11)$$

Отсюда диаметр эффективной изоляции должен быть больше значения $D_{\text{из,э}}$, определяемого из условия

$$\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_{\text{из, э}}} = \frac{\alpha_2}{2\lambda_{\text{из}}} \ln \frac{D_{\text{из, э}}}{D_2}. \quad (7.3.12)$$

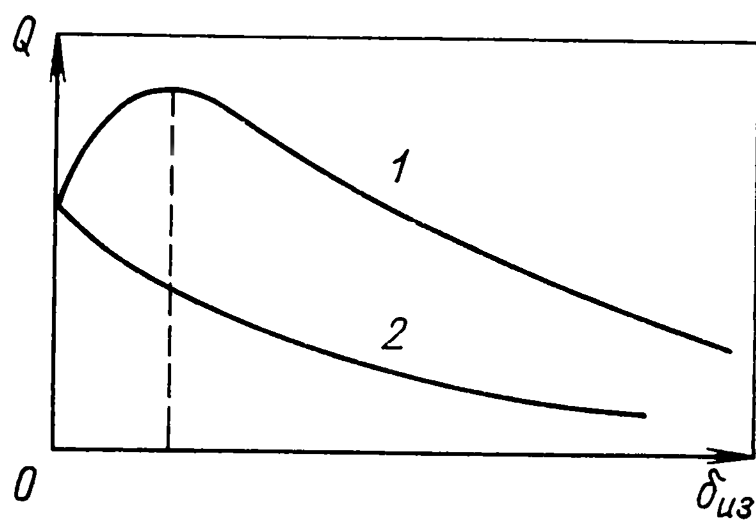



Рис. 7.1. Тепловые потери через цилиндрическую изоляцию в зависимости от ее толщины:

1 — плохая изоляция ($2\lambda_{\text{из}} < \alpha_2 D_2$); 2 — хорошая изоляция

Рассмотренное решение справедливо, когда $\alpha_2$ не зависит от температуры поверхности изоляции и ее диаметра. Это условие с известным приближением выполняется при вынужденном продольном обтекании изоляции охлаждающей средой. При вынужденном поперечном обтекании изоляции можно полагать (при прочих равных условиях) $\alpha_2 = AD_{\text{из}}^{-n}$, где $n$ порядка 0,2—0,4. Тогда

$$\frac{\partial R^*}{\partial D_{\text{из}}} = \frac{1}{\pi D_{\text{из}}} \left( \frac{1}{2\lambda_{\text{из}}} - \frac{1-n}{AD_{\text{из}}^{1-n}} \right) \quad (7.3.13)$$

и критический диаметр изоляции

$$D_{\text{кр}} = [2(1-n)\lambda_{\text{из}}/A]^{1/(1-n)}. \quad (7.3.14)$$

При свободной конвекции $\alpha_2 = A_1 \Delta T^m / D^{1-3m}$, где $\Delta T$ — разность температур поверхности изоляции и охлаждающей среды. Таким образом, с утолщением изоляции $\alpha_2$ будет уменьшаться даже при больших значениях $\lambda_{\text{из}}$.

### 7.4. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ЧЕРЕЗ ШАРОВУЮ СТЕНКУ

Имеем полый симметричный шар, на внутренней поверхности которого задана температура $T_1$ и на наружной $T_2$. Температура является в этом случае функцией только одной координаты — радиуса шаровой поверхности:

$$\frac{d^2 T}{dR^2} + \frac{2dT}{RdR} = 0; \; T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{1 - R_1/R_2} \left(1 - \frac{R_1}{R}\right); \quad (7.4.1)$$

$$Q = -\lambda \left(\frac{dT}{dR}\right)_{R_1} 4\pi R_1^2 = \frac{4\pi\lambda (T_1 - T_2)}{R_1^{-1} - R_2^{-1}}. \quad (7.4.2)$$

Для многослойной шаровой стенки уравнение для теплового потока можно записать в виде

$$Q = 4\pi (T_1 - T_2) \left[ \frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum \frac{1}{\lambda_i} \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{n+1}^2} \right]^{-1} (1 \leqslant i \leqslant n). \quad (7.4.3)$$

Следует обратить внимание, что сферический источник радиуса $R_1$, погруженный в неограниченную однородную среду ($R_2 \to \infty$, $T \to T_2$), имеет конечный минимальный стационарный тепловой поток

$$Q_{\text{мин}} = 4\pi\lambda R_1 (T_1 - T_2). \tag{7 4.4}$$

## 7.5. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ВДОЛЬ СТЕРЖНЯ ПОСТОЯННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

На рис. 7.2 изображена схема к задаче о теплопроводности вдоль стержня (прямого ребра). Одним торцом стержень плотно соединен с твердой поверхностью (трубы, корпуса двигателя и т.п.), имеющей температуру $T_1$. Температура среды, окружающей стержень, равна $T_0$. Коэффициент теплоотдачи от боковой поверхности стержня к среде обозначим через $\alpha$, коэффициент теплоотдачи от свободного торца стержня к среде — через $\alpha_L$.

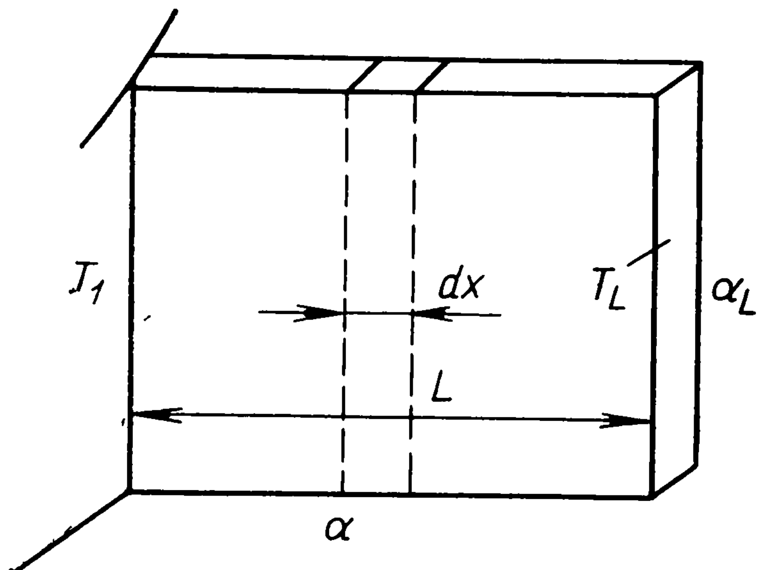



Рис. 7.2. Схема прямого ребра

Вследствие возможного различия в температурах и условиях обтекания боковой и торцовой поверхностей стержня в общем случае $\alpha_L \neq \alpha$. Далее предположим, что теплопроводность материала стержня достаточно велика, чтобы можно было считать температуру по его поперечному сечению практически неизменной. Собственно говоря, эта предпосылка равносильна утверждению, что вследствие большого отношения длины стержня к его поперечному размеру частные производные $\partial T/\partial y$ и $\partial T/\partial z$ существенно меньше частной производной $\partial T/\partial x$.

Изменение количества тепла, протекающего через поперечное сечение стержня, составит $dQ = d\,(-\lambda\Omega\, dT/dx)$. При установившемся процессе это тепло отдается за счет теплоотдачи через элемент боковой поверхности стержня $dF = Pds$, где $P$ — периметр стержня, м; $ds$ — дифференциал криволинейной координаты, направленной по поверхности стержня вдоль оси $x$. Если толщина стержня $\delta$, то $ds = \sqrt{1 + (1/4)\,(d\delta/dx)^2}\,dx$. Отсюда уравнение теплопередачи в стержне принимает вид

$$-\frac{d}{dx}\left(-\lambda\frac{dT}{dx}\,\Omega\right) = \alpha\,(T - T_0)\,P\,\sqrt{1 + (1/4)\,(d\delta/dx)^2}. \tag{7.5.1}$$

Знак минус в левой части этого уравнения взят потому, что при $T > T_0$ тепловой поток вдоль стержня уменьшается вследствие теплоотдачи с его боковой поверхности.

Рассматривая плоское ребро (площадь сечения и периметр стержня не меняются вдоль координаты $x$), можем написать:

$$d^2T/dx^2 = \alpha P\,(T - T_0)/\lambda\Omega\,. \tag{7.5.2}$$

Температура вдоль стержня непрерывно меняется, причем максимально возможное ее изменение лежит в пределах от $T_1$ до $T_0$. Нетрудно убедиться, что частное решение дифференциального уравнения (7.5.2), удовлетворяющее указанному характеру рассматриваемого физического процесса, может быть представлено в виде экспоненциальной функции

$$T - T_0 = C\exp\,(mx), \tag{7.5.3}$$

где $C$ и $m$ — постоянные.

Дифференцирование этого уравнения дает

$$d^2T/dx^2 = Cm^2\exp\,(mx). \tag{7.5.4}$$

Подставляя эти значения $T - T_0$ и $d^2T/dx^2$ в уравнение (7.5.2), получаем

$$Cm^2 \exp(mx) = (\alpha P/\lambda\Omega)\, C \exp(mx),$$

откуда

$$m = \pm\sqrt{\alpha P/\lambda\Omega}. \qquad (7.5.5)$$

Следовательно, уравнению (7.5.2) удовлетворяют два частных решения типа (7.5.3). В одном решении показатель экспоненты положителен, а в другом — отрицателен. Как известно, общим решением рассматриваемого дифференциального уравнения является сумма его частных решений, т. е.

$$T - T_0 = C_1 \exp(mx) + C_2 \exp(-mx), \qquad (7.5.6)$$

где $m$ — положительное значение корня (7.5.5). Постоянные интегрирования $C_1$ и $C_2$ определяются из граничных условий в начале и конце стрежня. При $x = 0$ $T = T_1$. При определении температуры на свободном торце стержня ($x = L$) необходимо учесть, что количество тепла, передаваемого к этому торцу за счет теплопроводности вдоль стержня, отдается через поверхность торца в окружающую среду, т. е.

$$-\lambda (dT/dx)_L = \alpha_L (T_L - T_0). \qquad (7.5.7)$$

Из первого граничного условия имеем $T_1 - T_0 = C_1 + C_2$. Отсюда $T - T_0 = C_1 [\exp(mx) - \exp(-mx)] + (T_1 - T_0) \exp(-mx)$.

Используя условие (7.5.7), находим, что

$$(dT/dx)_L = m \{C_1 [\exp(mL) + \exp(-mL)] - (T_1 - T_0) \exp(-mL)\};$$

кроме того,

$$T_L - T_0 = C_1 [\exp(mL) - \exp(-mL)] + (T_1 - T_0) \exp(-mL).$$

Подставляя значения $(dT/dx)_L$ и $T_L - T_0$ в уравнение (7.5.7) и вводя обозначение

$$n = \alpha_L/\lambda_m = +\sqrt{\alpha_L^2\, \Omega/\alpha\lambda P}, \qquad (7.5.8)$$

получаем значение первой константы интегрирования:

$$C_1 = (T_1 - T_0) \frac{(1-n) \exp(-mL)}{\exp(mL) + \exp(-mL) + n [\exp(mL) - \exp(-mL)]}.$$

Соответственно

$$C_2 = (T_1 - T_0) \frac{(1+n) \exp(mL)}{\exp(mL) + \exp(-mL) + n [\exp(mL) - \exp(-mL)]}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$T = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{(1-n) \exp[-m(L-x)] + (1+n) \exp[m(L-x)]}{2 [\mathrm{ch}(mL) - n\, \mathrm{sh}(mL)]}; \qquad (7.5.9)$$

$$T_L = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\mathrm{ch}(mL) - n\, \mathrm{sh}(mL)}. \qquad (7.5.10)$$

Когда теплоотдача от свободного торца стержня мала или торец хорошо изолирован, можно положить $\alpha_L = 0$. В этом случае $n = 0$ и соответственно

$$T = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{\exp[-m(L-x)] + \exp[m(L-x)]}{2\, \mathrm{ch}(mL)}; \qquad (7.5.11)$$

$$T_L = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\mathrm{ch}(mL)}. \qquad (7.5.12)$$

Раскрывая значение ch $(mL)$, перепишем формулу (7.5.11) следующим образом:

$$T = T_0 + (T_0 - T_0) \left[\frac{\exp(-mL)}{\exp(-mx)} + \frac{\exp(mL)}{\exp(mx)}\right] \Big/ [\exp(mL) + \exp(-mL)].$$

При стержне бесконечной длины ($L = \infty$), $\exp(-mL) = 0$ и

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)\exp(-mx). \qquad (7.5.13)$$

Последняя формула дает распределение температур вдоль стержня весьма большой длины по сравнению с его поперечным сечением (теоретически бесконечно длинный стержень).

Количество тепла, отдаваемое стержнем окружающей среде, равно количеству тепла, втекающему в стержень через его закрепленный торец:

$$Q = -\lambda\Omega (dT/dx)_{x=0}. \qquad (7.5.14)$$

Дифференцируя уравнение (7.5.9) и подставляя полученное значение $dT/dx$ при $x = 0$ в уравнение (7.5.14), получаем:

а) теплоотдача стержня конечной длины

$$Q = \lambda\Omega m (T_1 - T_0) \frac{\mathrm{sh}(mL) + n\,\mathrm{ch}(mL)}{\mathrm{ch}(mL) + n\,\mathrm{sh}(mL)}; \qquad (7.5.15)$$

б) теплоотдача стержня с изолированным свободным торцом

$$Q = \lambda\Omega m (T_1 - T_0)\,\mathrm{th}(mL); \qquad (7.5.16)$$

в) теплоотдача стержня бесконечной длины

$$Q = \lambda\Omega m (T_1 - T_0), \qquad (7.5.17)$$

где $m$ имеет положительное значение по формуле (7.5.5).

## 7.6. ПРЯМОЕ РЕБРО ПОСТОЯННОГО ТЕПЛОВОГО НАПРЯЖЕНИЯ

В ребре постоянной толщины плотность теплового потока резко уменьшается вдоль оси $x$. Так, например, закону распределения температуры по длине бесконечного стержня, выражаемого формулой (7.5.13), соответствует закон изменения плотности теплового потока

$$q = -\lambda dT/dx = \lambda m (T_1 - T_0)\exp(-mx). \qquad (7.6.1)$$

Очевидно, что материал ребра использовался бы более эффективно, если бы теплонапряжение единицы его поперечного сечения оставалось постоянным или почти постоянным.

Зададимся условием, чтобы плотность теплового потока

$$q = (\lambda m)_{x=0}(T_1 - T_0) \qquad (7.6.2)$$

оставалась постоянной вдоль всего ребра, а на свободном конце ребра установилась температура, практически равная температуре окружающей среды. При этом условии

$$\left.\begin{aligned} T &= T_1 - qx/\lambda; \\ q &= (T_1 - T_0)\,\lambda/L, \end{aligned}\right\} \qquad (7.6.3)$$

где $L$ — высота ребра. При достаточно широком ребре, когда его ширина $H \gg \delta$, можно положить

$$\left.\begin{aligned} P &= 2(H + \delta) \approx 2H; \\ \Omega &= \delta H \approx \delta P/2; \\ m &= \left(\sqrt{\alpha P/\lambda\Omega}\right)_{x=0} \approx \sqrt{2\alpha/\lambda\delta_0}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.6.4)$$

где $\delta$ — толщина ребра у его основания.

Воспользовавшись уравнениями (7.6.3) и (7.6.4), находим, что в рассматриваемом случае высота ребра и его толщина у основания должны находиться в определенном соотношении, а именно:

$$L/\delta_0 = (2\mathrm{Bi})^{-1/2}, \qquad (7.6.5)$$

где $\mathrm{Bi} = \alpha\delta_0/\lambda$.

Подставляя в уравнение (7.5.1) значение $T$ из системы (7.6.3) и принимая во внимание, что в тонких ребрах $(d\delta/dx)^2 \ll 1$, после интегрирования получаем

$$\frac{\delta}{\delta_0} = 1 + \mathrm{Bi}\left(\frac{x}{\delta_0}\right)^2 - 2\mathrm{Bi}\frac{L}{\delta_0}\frac{x}{\delta_0}. \qquad (7.6.6)$$

Подставляя в это уравнение значение $L/\delta_0$ из выражения (7.6.5), находим, что толщина свободного торца ребра $\delta_L = 0{,}5\,\delta_0$. Обычно в целях большей простоты изготовления параболический профиль ребра заменяется трапециевидным.

## 7.7. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ПРЯМОМ ТРАПЕЦИЕВИДНОМ И В ПЛОСКОМ КРУГЛОМ РЕБРАХ

Схемы этих задач с указанием систем координат даны на рис. 7.3 и 7.4. Толщина прямого трапециевидного ребра $\delta = 2x \operatorname{tg} \varphi$. Подставляя значение $\delta$ в выражение (7.6.4) для $\Omega$ и далее в (7.5.1), получаем уравнение

$$z_1 d^2\vartheta/dz_1^2 + d\vartheta/dz_1 - \vartheta = 0. \qquad (7.7.1)$$

Здесь

$$\vartheta \equiv \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \text{ и } z \equiv \frac{\alpha x \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\lambda \operatorname{tg} \varphi}.$$

Для плоского круглого ребра

$$\Omega = 2\pi R\delta; \quad P = 4\pi R; \quad dx = dR.$$

Подставляя эти величины в (7.5.1), приходим к уравнению

$$\frac{d^2\vartheta}{dz_2^2} + \frac{1}{z_2}\frac{d\vartheta}{dz_2} - \vartheta \equiv 0, \qquad (7.7.2)$$

где $z_2 = R\sqrt{\lambda\delta/2\alpha}$ — текущий безразмерный радиус.

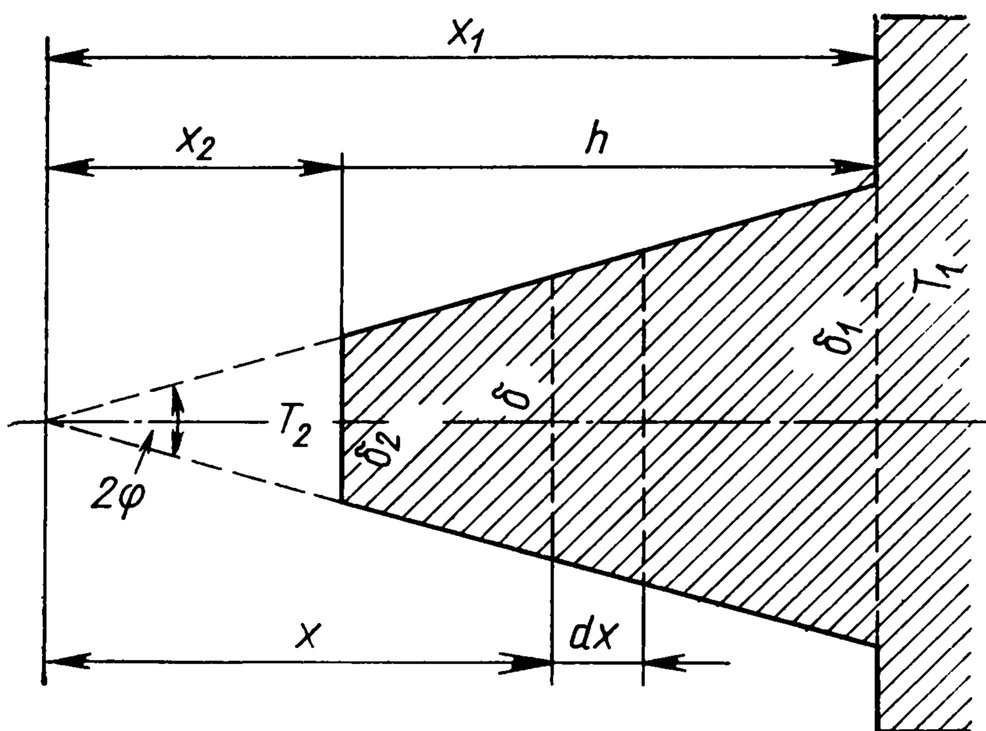



Рис. 7.3. Схема трапециевидного ребра

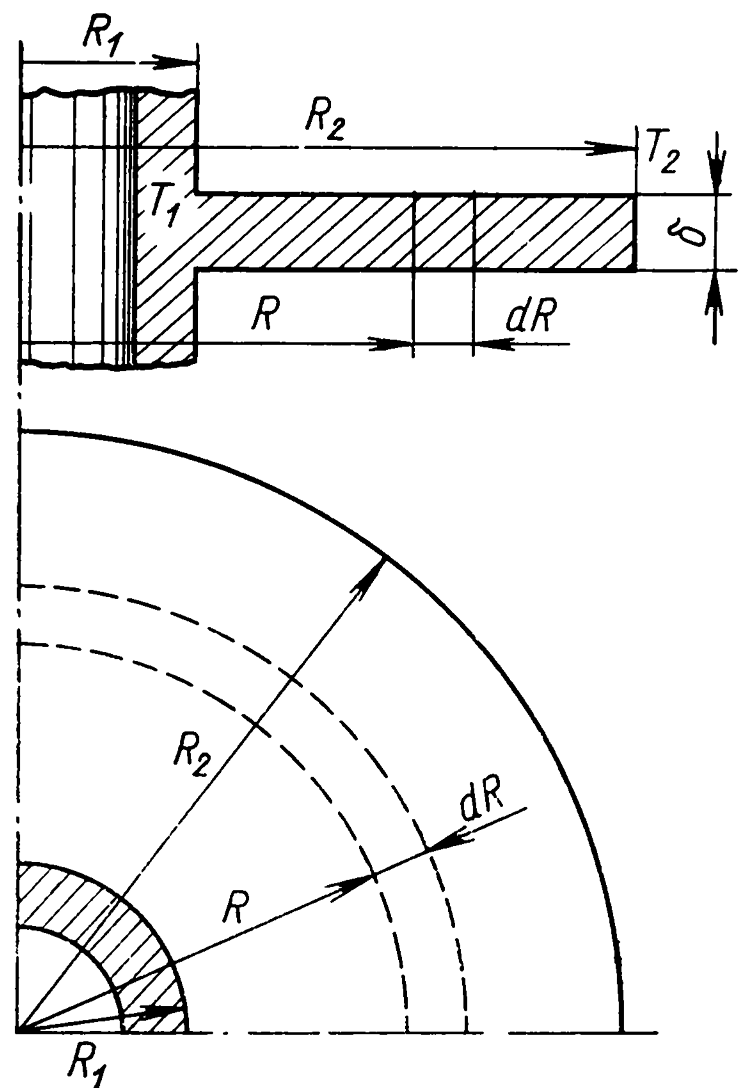



Рис. 7.4. Схема круглого ребра

Решения двух последних уравнений известны и даются в цилиндрических функциях. Решения эти громоздки, и их удобнее представлять в виде расчетных графиков (рис. 7.5—7.7).

На рис. 7.5 $\varepsilon = QF'/FQ'$, где $Q$ — тепло, отдаваемое ребром, Вт; $Q'$ — то же по формуле (7.5.15), Вт; $F$ — поверхность рассчитываемого ребра, м$^2$; $F'$ — поверхность прямоугольного ребра, длина, высота и толщина которого равны

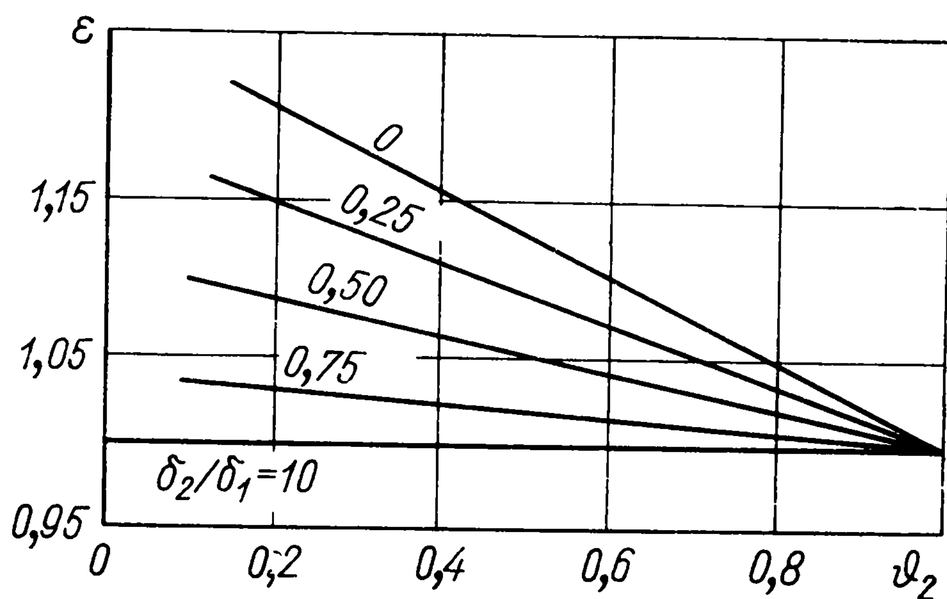



Рис. 7.5. График для расчета количества тепла, отводимого трапециевидным ребром

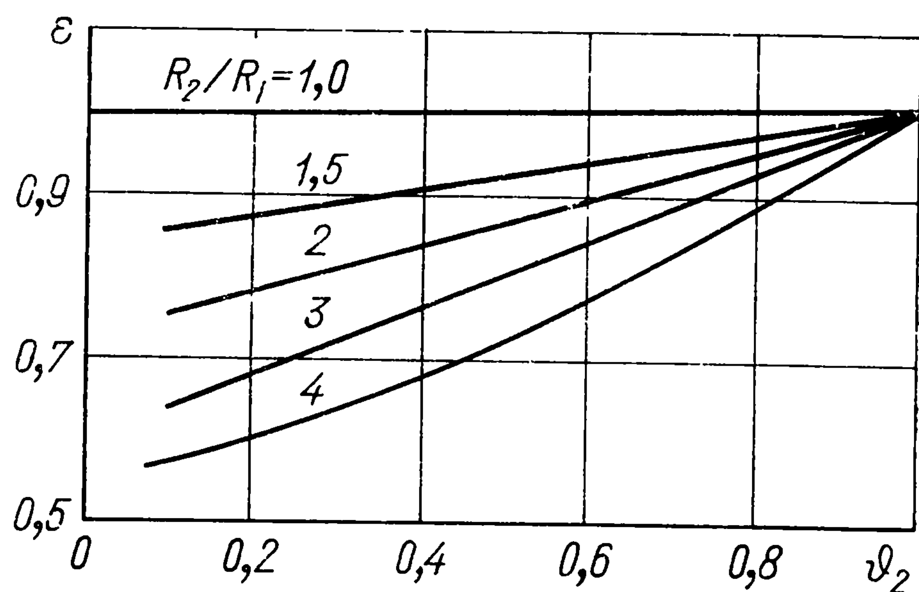



Рис. 7.6. График для расчета количества тепла, отводимого круглым ребром

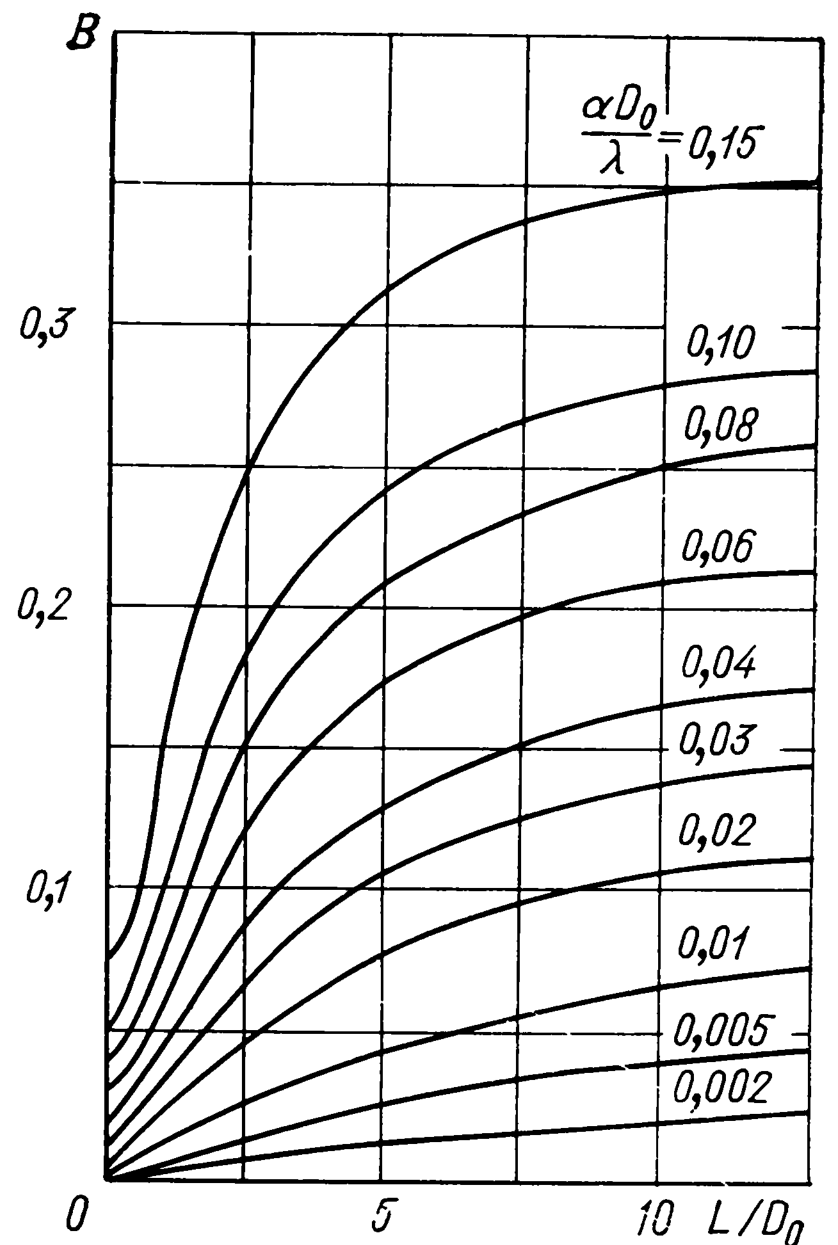



Рис. 7.7. График для расчета количества тепла, отводимого коническим шипом

длине, высоте и средней толщине рассматриваемого ребра, м$^2$. На том же рисунке $\vartheta_2 = (T_2 - T_0)/(T_1 - T_0)$.

На рис. 7.6. $\varepsilon = Q/Fq$, где $q$ — количество тепла, передаваемого с единицы поверхности прямоугольного ребра длиной 1 м и толщиной, равной толщине данного круглого ребра.

На рис. 7.7 $Q = (\pi D_0/2)\,(T_1 - T_0)\,\lambda B$.

### 7.8. КОЭФФИЦИЕНТ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОРЕБРЕНИЯ

Применение оребрения поверхности нагрева особенно эффективно в тех случаях, когда коэффициент теплоотдачи от одной среды существенно больше, чем коэффициент теплоотдачи к другой среде. Так, например, оребрение труб весьма эффективно, когда внутри трубы течет вода или жидкий металл, а с внешней стороны — газ. Применяется оребрение и со стороны жидкости и даже конденсирующихся паров, имеющих малые коэффициенты теплоотдачи (некоторые холодильные агенты).

Для односторонне оребренной поверхности можно составить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} Q &= \alpha_1 F\,(T - T_{\text{ст},1}); \\ Q &= (\lambda_{\text{ст}}/\delta_{\text{ст}})F\,(T_{\text{ст},1} - T_{\text{ст},2}); \\ Q &= \alpha_2\,(F + EF_{\text{ор}})\,(T_{\text{ст},2} - T_2). \end{aligned}\right\} \qquad (7.8.1)$$

Здесь $F$ — основная поверхность теплообмена; $F_{\text{ор}}$ — поверхность оребрения; $E$ — коэффициент эффективности оребрения.

Решая эту систему уравнений, получаем

$$Q = kF\,(T_1 - T_2), \qquad (7.8.2)$$

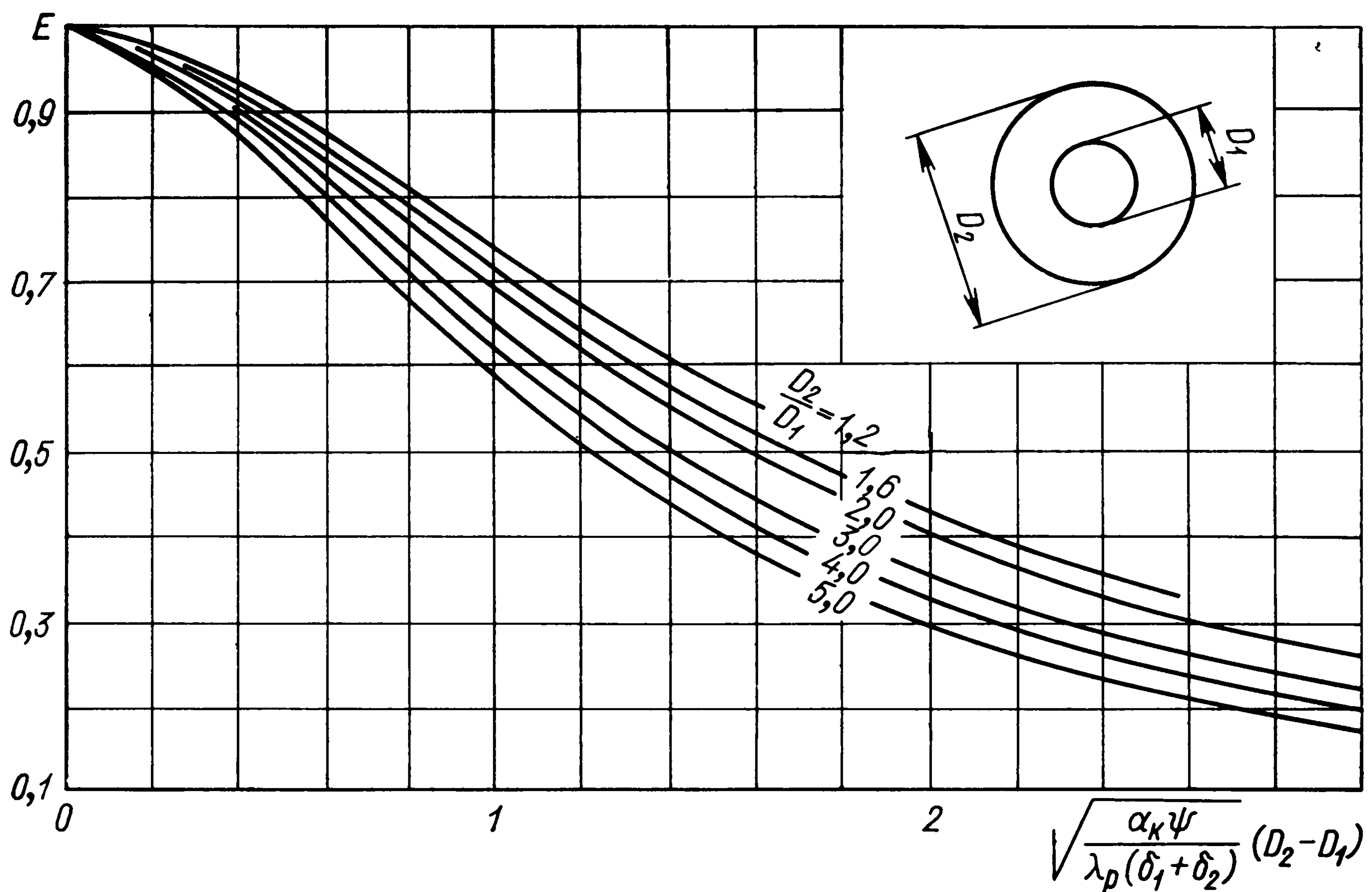



Рис. 7.8. Коэффициент эффективности круглых ребер с цилиндрическим основанием

где $k=[1/\alpha_1+\delta_{ст}/\lambda_{ст}+F/\alpha_2(F+EF_{ор})]^{-1}$. Отсюда отчетливо видно, что при $\alpha_1 \gg \alpha_2$ общий коэффициент теплопередачи можно существенно увеличить путем оребрения так, чтобы имело место условие $EF_{ор} \gg F$.

Коэффициент эффективности оребрения $E$ всегда меньше единицы, поскольку средняя температура поверхности ребра меньше температуры у его основания. Поскольку температура у основания ребра $T_1$ совпадает с температурой основной поверхности теплообмена $F$, то количество тепла, переданное оребрением, будет равно

$$Q_{ор}=\alpha F_{ор}(T_1-T_0)E. \qquad (7.8.3)$$

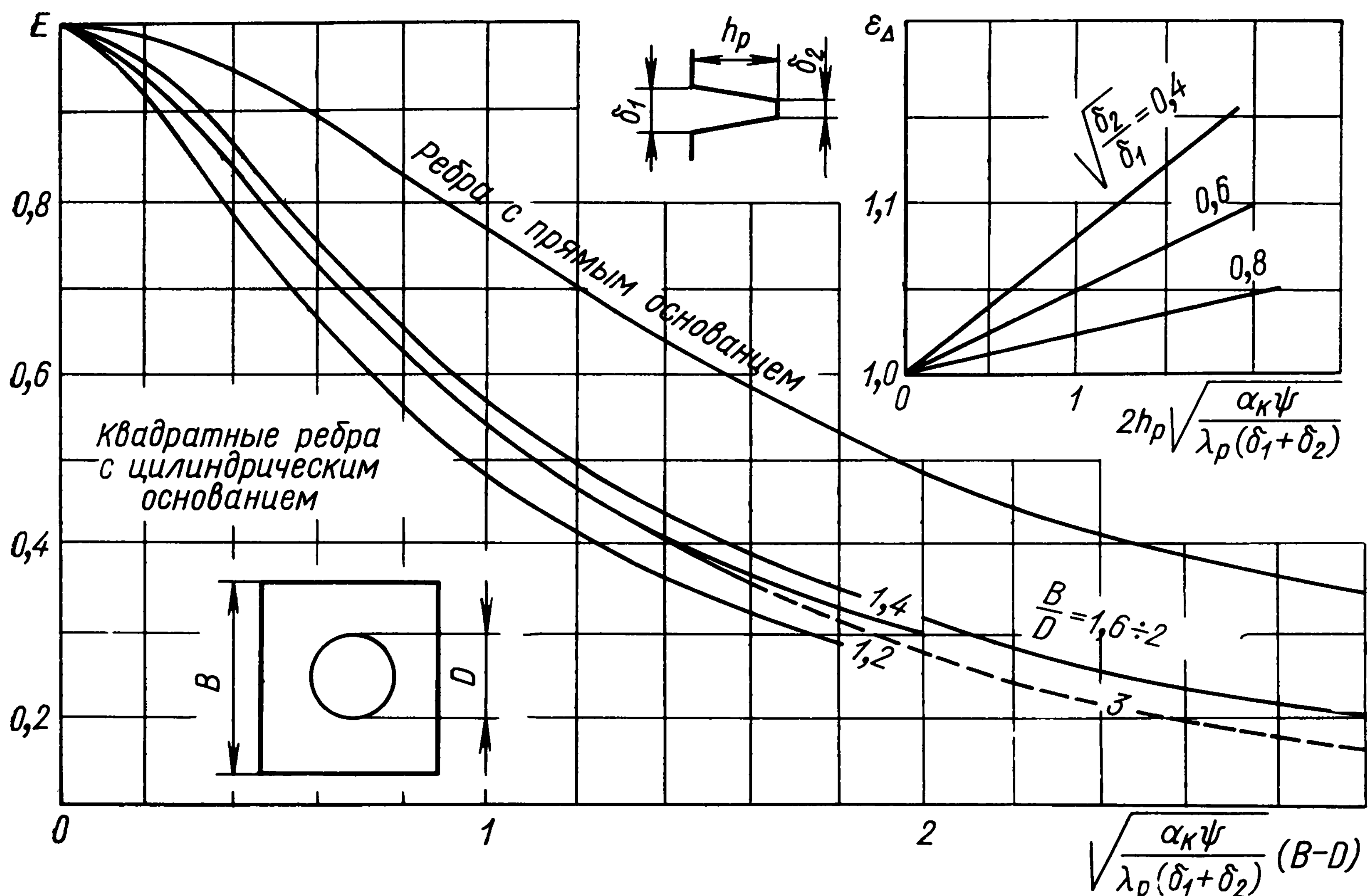



Рис. 7.9. Коэффициент эффективности квадратных ребер с цилиндрическим основанием и ребер с прямым основанием ($\psi=0,9$ для прямых и поперечных ребер на овальной трубе; $\psi=0,85$ для поперечных ребер на круглых трубах)

Отсюда в соответствии с формулой (7.5.16) для прямого ребра постоянной толщины

$$E = \frac{\operatorname{th}(L\sqrt{2\alpha/\lambda\delta})}{L\sqrt{2\alpha/\lambda\delta}}. \tag{7.8.4}$$

На рис. 7.8 и 7.9 приведены составленные Э.С. Карасиной графики для определения $E$ круглых поперечных ребер, квадратных поперечных ребер и ребер с прямым основанием. На рис. 7.9 дан также график для определения коэффициента $\varepsilon_\Delta$, на который следует умножить величину $E$ в случае трапециевидного сечения ребра.

## 7.9. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В СТЕРЖНЕ И ШАРЕ С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

Внутренние источники тепла могут возникать при прохождении через тело электрического тока, при фазовых переходах, химических превращениях, радиоактивном распаде, внутреннем трении и т. п.

Вычислим распределение температур в плоской стенке и цилиндрическом стержне с равнораспределенными внутренними источниками, т. е. когда $q_V$ имеет одно и то же значение во всех точках стержня. Для плоской стенки, когда $T$ является функцией только координаты $x$, из уравнения теплопроводности следует

$$d^2T/dx^2 + q_V/\lambda = 0; \quad T = -x^2 q_V/2\lambda + C_1 x + C_2, \tag{7.9.1}$$

где $C_1$ и $C_2$ — постоянные интегрирования.

Положим, что со стороны поверхности, которая принята за начало отсчета координаты $x$, стенка омывается средой с температурой $T_1$ и коэффициентом теплоотдачи $\alpha_1$. Со стороны другой поверхности среда имеет температуру $T_2$ и коэффициент теплоотдачи $\alpha_2$. Пусть $T_1 > T_2$. Тепловой поток через поверхности стенки равен

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= -\lambda(dT/dx)_{x=0} = \alpha_1(T_1 - T_{\text{ст},1}); \\ q_2 &= -\lambda(dT/dx)_{x=\delta} = \alpha_2(T_{\text{ст},2} - T_2) = q_1 + q_V\delta. \end{aligned}\right\} \tag{7.9.2}$$

Определяя из этих условий $C_1$ и $C_2$, находим выражение для температур стенки:

$$T = T_{\text{ст},2} + \frac{q_V}{2\lambda}(\delta^2 - x^2) + \frac{\alpha_1}{\lambda}(T_1 - T_{\text{ст},1})(\delta - x), \tag{7.9.3}$$

откуда

$$T_{\text{ст},1} = \frac{T_2 + (\alpha_1/\alpha_2 + \alpha_1\delta/\lambda)T_1 + q_V(\delta/\alpha_2 + \delta^2/2\lambda)}{1 + \alpha_1\delta/\lambda + \alpha_1/\alpha_2}; \tag{7.9.4}$$

$$T_{\text{ст},2} = T_2 + \frac{T_1 - T_2 - q_V(\delta/\alpha_2 + \delta^2/2\lambda)}{1 + \alpha_2\delta/\lambda + \alpha_2/\alpha_1} + \frac{q_V\delta}{\alpha_2}. \tag{7.9.5}$$

Если одна поверхность стенки, например со стороны $x = 0$, настолько хорошо изолирована, что можно принять $\alpha_1 = 0$ и соответственно $(dT/dx)_{x=0} = 0$, то

$$\left.\begin{aligned} T_{\text{ст},1} &= T_2 + q_V(\delta/\alpha_2 + \delta^2/2\lambda); \\ T_{\text{ст},2} &= T_2 + q_V\delta/\alpha_2. \end{aligned}\right\} \tag{7.9.6}$$

Рассмотрим теперь температурное поле в цилиндрической односторонне охлаждаемой стенке. Когда $T$ является функцией только радиуса $R$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2T}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dT}{dR}+\frac{q_V}{\lambda}=0;\\ &R\frac{dT}{dR}=-\frac{q_V}{2\lambda}R^2+C_1;\\ &T=-\frac{q_V}{4\lambda}R^2+C_1\ln R+C_2.\end{aligned}\right\} \tag{7.9.7}$$

Поскольку цилиндр односторонне охлаждаемый, то с поверхности охлаждения отводится только тепло, выделившееся в цилиндре за счет внутренних источников. Это тепло равно

$$q^*=\pi(R_2^2-R_1^2)\,q_V. \tag{7.9.8}$$

Если цилиндр охлаждается с внешней поверхности, то

$$\left.\begin{aligned} &q^*=-\lambda(dT/dR)_{R_2}2\pi R_2=\alpha 2\pi R_2(T_{\text{ст},2}-T_0);\\ &(dT/dR)_{R_1}=0.\end{aligned}\right\} \tag{7.9.9}$$

Здесь $R_1$ и $R_2$ — внутренний и внешний радиусы цилиндра; $T_0$ — температура охлаждающей среды.

Определяя отсюда значения постоянных интегрирования и подставляя их в интеграл уравнения (7.9.7), получаем выражение для температурного поля

$$T=T_0+\frac{q_V R_2^2}{4\lambda}\left\{\frac{2\lambda}{\alpha R_2}\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right]+1-\left(\frac{R}{R_2}\right)^2-2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\ln\frac{R_2}{R}\right\}. \tag{7.9.10}$$

Температура внутренней поверхности цилиндра

$$T_{\text{ст},1}=T_0+\frac{q_V R_2^2}{4\lambda}\left\{\left(\frac{2\lambda}{\alpha R_2}+1\right)\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right]-2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\ln\frac{R_2}{R_1}\right\}. \tag{7.9.11}$$

В том случае, когда известно значение $T_{\text{ст},1}$ (например, путем измерения в опытах), константа $C_2$ может быть вычислена из уравнения (7.9.7) при $T = T_{\text{ст},1}$ и $R = R_1$ и

$$T_{\text{ст},2}=T_{\text{ст},1}+\frac{q_V R_1^2}{4\lambda}\left[2\ln\frac{R_2}{R_1}+1-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right]. \tag{7.9.12}$$

Для сплошного круглого стержня ($R_1 = 0$) уравнение температурного поля имеет вид

$$T=T_0+\frac{q_V R_2^2}{4\lambda}\left[\frac{2\lambda}{\alpha R_2^2}+1-\left(\frac{R}{R_2}\right)^2\right]. \tag{7.9.13}$$

Температура на оси стержня

$$T_{R=0}=T_0+\frac{q_V R_2^2}{4\lambda}\left(\frac{2\lambda}{\alpha R_2}+1\right). \tag{7.9.14}$$

Температура на поверхности стержня

$$T_{R=R_2}=T_0+q_V R_2/2\alpha=T_{R=0}-q_V R_2^2/4\lambda. \tag{7.9.15}$$

Если цилиндр охлаждается с внутренней стороны, то граничные условия можно записать в виде $q^* = \alpha 2\pi R_1(T_{\text{ст},1} - T_0)$; $(dT/dR)_{R_2} = 0$.

Соответственно

$$T=T_0+\frac{q_V R_1^2}{4\lambda}\left\{\frac{2\lambda}{\alpha R_1}\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2-1\right]+1-\left(\frac{R}{R_1}\right)^2+2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\ln\frac{R}{R_1}\right\}; \quad (7.9.16)$$

$$T_{\text{ст},1}=T_0+\frac{q_V R_1}{2\alpha}\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2-1\right]; \quad (7.9.17)$$

$$T_{\text{ст},2}=T_0+\frac{q_V R_1^2}{4\lambda}\left\{\left(\frac{2\lambda}{\alpha R_1}-1\right)\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2-1\right]+2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\ln\frac{R_2}{R_1}\right\}. \quad (7.9.18)$$

Для шара с равномерным отводом тепла по его поверхности

$$\frac{d^2T}{dR^2}+\frac{2}{R}\frac{dT}{dR}+\frac{q_V}{\lambda}=0; \quad q_V R_0=3\alpha(T_{\text{ст}}-T_0). \quad (7.9.19)$$

Здесь $T_{\text{ст}}$ — температура наружной поверхности шара; $T_0$ — температура окружающей среды; $R_0$ — радиус шара. Отсюда выражение для определения температурного поля в шаре имеет вид

$$T=T_{\text{ст}}+(q_V/6\lambda)(R_0^2-R). \quad (7.9.20)$$

Температура в центре шара

$$T_{\text{ц}}=T_{\text{ст}}+q_V R_0^2/6\lambda, \quad (7.9.21)$$

и температура поверхности шара

$$T_{\text{ст}}=T_0+q_V R_0/3\alpha. \quad (7.9.22)$$

## 7.10. СУПЕРПОЗИЦИЯ ПОЛЕЙ ТЕМПЕРАТУР

Если в теле имеются сосредоточенные источники и стоки тепла, описываемые линейным дифференциальным уравнением, причем граничное условие теплообмена также линейно, то температурные поля, создаваемые отдельными источниками, независимы друг от друга. Следовательно, результирующее температурное поле является суммой температурных полей, создаваемых отдельными источниками и стоками тепла. Это свойство таких полей позволяет сравнительно просто решать ряд задач путем введения в расчет фиктивных стоков или источников тепла. В качестве примера рассмотрим тепловые потери неизолированного круглого трубопровода, заложенного в грунт (рис. 7.10). В полубесконечный массив на глубину $h$ заложен трубопровод диаметром $D$. На поверхности трубопровода $T=T_1$, на всей поверхности массива $T=T_0$. Последнее условие означает весьма интенсивное охлаждение поверхности грунта или достаточное заглубление трубы, так как в ином случае поверхность массива над трубопроводом была бы прогрета значительно сильнее, чем более удаленные области.

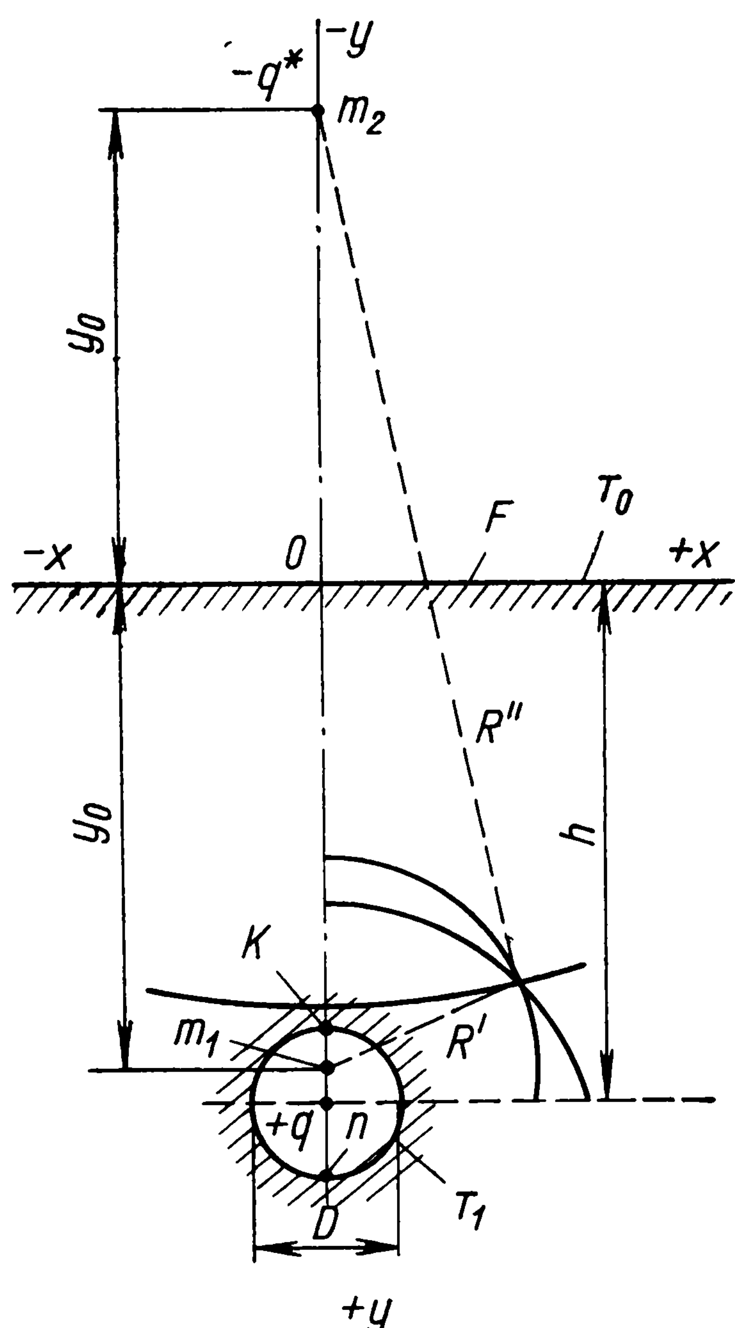



Рис. 7.10. Задача о трубопроводе в полуограниченном массиве

Заменим рассматриваемый трубопровод линейным источником с той же плотностью тепловыделения ($+q^*$, Вт/м). На плоскости чертежа этот источник изобразится точкой $m_1$. Далее, поместим над поверхностью грунта зеркальное отображение нашей системы. При этом отображение источника $m_1$, находящееся в точке $m_2$, будем рассматривать как сток с

тепловыделением ($-q^*$). Таким образом, получаем неограниченный массив с источником, стоком и изотермой $T_0$, изображающей поверхность грунта. В таком случае изотермические поверхности независимых полей источника и стока должны иметь вид концентрических окружностей. Применяя к ним формулу (7.3.2), можем написать

$$\left.\begin{aligned} T' - T_0 &= -(q^*/2\pi\lambda)\ln(R'/y_0);\\ T'' - T_0 &= (q^*/2\pi\lambda)\ln(R''/y_0). \end{aligned}\right\} \quad (7.10.1)$$

Здесь $\lambda$ — коэффициент теплопроводности грунта; $R'$ и $R''$ — радиусы, проведенные в данную точку от источника и стока; $y_0$ — расстояние по нормали от поверхности грунта до источника и стока.

Суммируя эти поля, получаем

$$T - T_0 = T' - T_0 + T'' - T_0 = (q^*/2\pi\lambda)\ln(R''/R'). \quad (7.10.2)$$

Поместим начало координат на пересечении оси $m_1m_2$ с поверхностью грунта. В этом случае

$$\left.\begin{aligned} R''^2 &= x^2 + (y_0 + y)^2;\\ R'^2 &= x^2 + (y_0 - y)^2; \end{aligned}\right\} \quad (7.10.3)$$

Подставляя эти значения радиусов $R'$ и $R''$ в уравнение (7.10.2), получаем

$$T - T_0 = \frac{q^*}{2\pi\lambda}\ln\left[\frac{x^2 + (y_0 + y)^2}{x^2 + (y_0 - y)^2}\right]^{1/2}. \quad (7.10.4)$$

Согласно последнему выражению, изотермы результирующего поля имеют вид окружностей, центр которых перемещается вниз от точки $m_1$ по мере уменьшения $T$. Поскольку поверхность трубопровода является окружностью, ее можно отождествить с изотермой $T = T_1$. Для точки $k$ на верхней образующей трубы

$$\left.\begin{aligned} R''_k &= y_0 + (h - R_0);\\ R'_k &= y_0 - (h - R_0), \end{aligned}\right\} \quad (7.10.5)$$

где $h$ — глубина залегания оси трубы; $R_0 = D/2$ — радиус трубы.

Для точки $n$ на нижней образующей трубы

$$\left.\begin{aligned} R''_n &= R''_k + 2R_0;\\ R'_n &= 2R_0 - R'_k. \end{aligned}\right\} \quad (7.10.6)$$

Кроме того,

$$R''_n/R'_n = R''_k/R'_k, \quad (7.10.7)$$

поскольку точки $k$ и $n$ принадлежат одной и той же изотерме.

Из этих соотношений следует, что

$$\left.\begin{aligned} R''_k/R'_k &= (R''_k + D)/(D - R'_k);\\ R''_k - R'_k &= 2h - D. \end{aligned}\right\} \quad (7.10.8)$$

Следовательно, для любой точки изотермы $T_1$

$$\frac{R''}{R'} = \frac{R''_k}{R'_k} = \frac{2h}{D} + \sqrt{\left(\frac{2h}{D}\right)^2 - 1}. \quad (7.10.9)$$

Подставляя это значение $R''/R'$ в (7.10.2), получаем формулу Форхгеймера:

$$q^* = \frac{2\pi\lambda(T_1 - T_0)}{\ln[2h/D + \sqrt{(2h/D)^2 - 1}]}. \quad (7.10.10)$$

Тепловой поток с участка трубопровода длиной $L$ равен

$$Q = q^*L. \quad (7.10.11)$$

Таблица 7.1

**Термическое сопротивление тел различной формы**

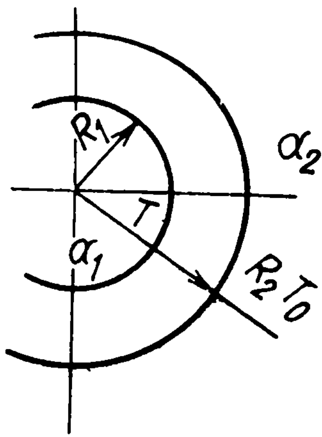
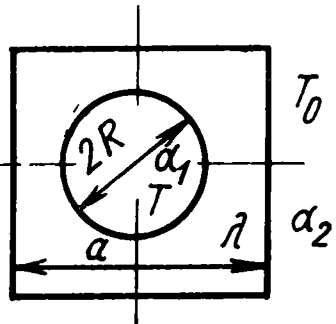
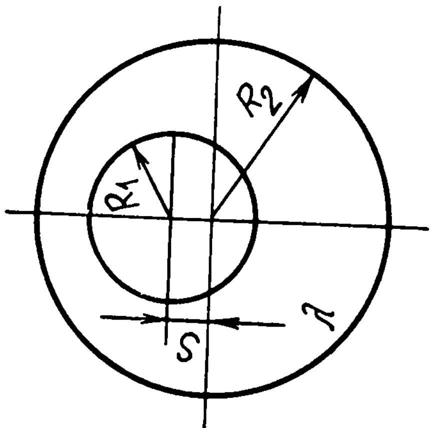
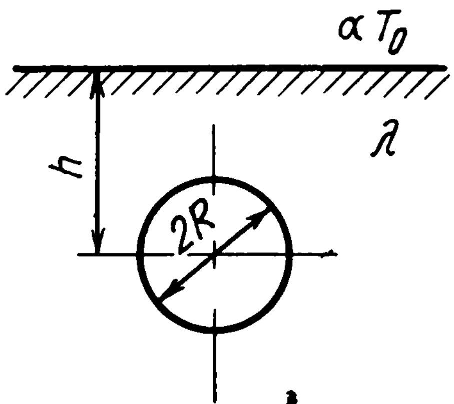
1. В третьей графе приведено термическое сопротивление тела $R^*$ или (при погружении тела в массив) ограждающего слоя до его поверхности при постоянных температурах на контурах тела и массива равных $T_{ст,1}$ и $T_{ст,2}$; $R^*=(T_{ст,1}-T_{ст,2})/Q$, К/Вт.

2. В четвертой графе приведено полное термическое сопротивление $R^*_\Sigma=(T-T_0)/Q$, где $T$ и $T_0$ — соответственно температуры греющей и нагревающей сред.

3. Геометрические параметры $k$, $b/a$ и $A_0=f(a)$ характеризуют соотношение сторон прямоугольника и число сторон правильного $n$-угольника. Их числовые значения приведены ниже

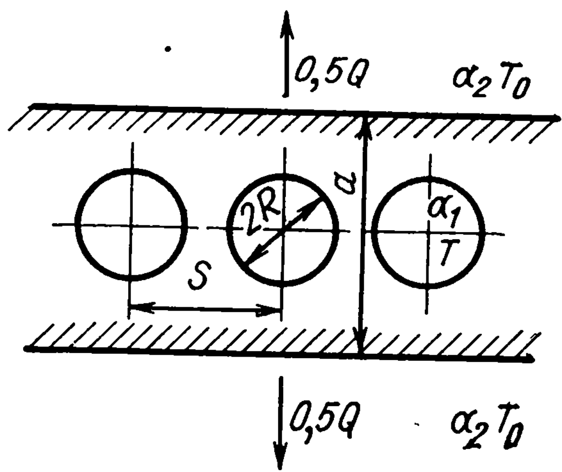
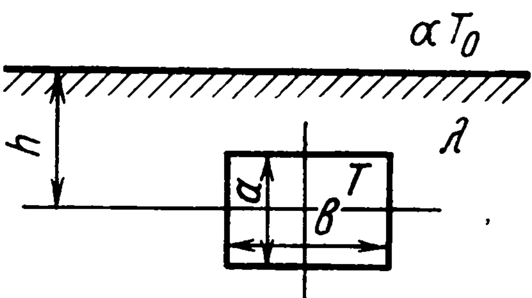
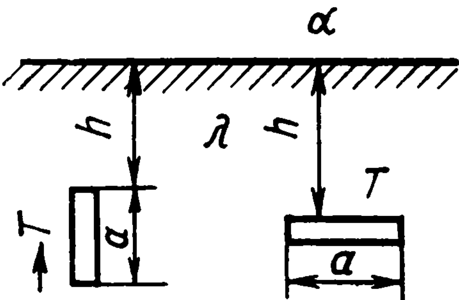
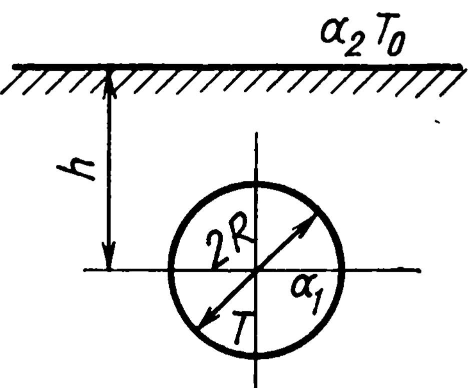
| $b/a$ | $k$ | $n$ | $A_0$ | $b/a$ | $k$ | $n$ | $A_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,00 | 0,08290 | 3 | 1,13916 | 2,00 | 0,00373 | 7 | 0,15214 |
| 1,25 | 0,03963 | 4 | 0,54159 | 2,25 | 0,00170 | 8 | 0,11397 |
| 1,50 | 0,01781 | 5 | 0,32131 | 2,50 | 0,00078 | 9 | 0,08832 |
| 1,75 | 0,00816 | 6 | 0,21339 | 3,00 | 0,00016 | 10 | 0,07076 |

| Форма тела и его расположение | Расчетная схема | Термическое сопротивление тела | Полное термическое сопротивление с учетом теплоотдачи на контурах |
|---|---|---|---|
| Плоская протяженная стенка |  | $R^*=\dfrac{\delta}{\lambda La}$ (здесь и дальше $L$ — длина тела) | $R^*_\Sigma=\dfrac{1}{La}\left(\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{\delta}{\lambda}+\dfrac{1}{\alpha_2}\right)$ |
| Цилиндрическая протяженная стенка |  | $R^*=\dfrac{1}{2\pi L\lambda}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$ | $R^*_\Sigma=\dfrac{1}{2\pi L}\left(\dfrac{1}{\alpha_1R_1}+\dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{R_2}{R_1}+\dfrac{1}{\alpha_2R_2}\right)$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Полый шар |  | $R^*=\frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$ | $R^*_\Sigma=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\alpha_1R_1^2}+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{\alpha_2R_2^2}\right]$ |
| Труба в квадратной изоляции |  | $R^*=\frac{1}{2\pi\lambda L}\ln 1{,}08\,\frac{a}{2R}$ | $R^*_\Sigma\approx\frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{\alpha_1R}+\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1{,}08a}{2R}+\frac{\pi}{2\alpha_2a}\right)$ |
| Труба, эксцентрично расположенная в круглой изоляции |  | $R^*=\frac{1}{2\pi\lambda L}\ln\frac{\sqrt{(R_2+R_1)^2-s^2}+\sqrt{(R_2-R_1)^2-s^2}}{\sqrt{(R_2+R_1)^2-s^2}-\sqrt{(R_2-R_1)^2-s^2}}$ | |
| Одиночная труба в полуограниченном массиве |  | $R^*=\frac{1}{2\pi L\lambda}\ln\left[\frac{h}{R}\sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2-1}\right]$; <br> $R^*\approx\frac{1}{2\pi L\lambda}\ln\frac{2h}{R}$ <br> при $h>4R$ | $R^*_\Sigma\approx\frac{1}{2\pi L}\left[\frac{1}{\alpha_1R}+\frac{1}{\lambda}\ln\left(h+\frac{\lambda}{\alpha_2}\right)\right]$ <br> При наличии цилиндрической изоляции: <br> $R^*_\Sigma\approx\frac{1}{2\pi L}\left[\frac{1}{\alpha_1R}+\frac{1}{\lambda_{из}}\ln\frac{R_{из}}{R}+\frac{1}{\lambda}\ln\frac{2}{R_{из}}\left(h+\frac{\lambda}{\alpha_2}\right)\right]$ <br> (при квадратной изоляции $R_{из}=0{,}55a$, где $a$ — сторона квадрата) <br> При $\alpha_1R^*_{\Sigma_1}\geqslant 1$ для изолированной трубы: <br> $R^*_{\Sigma_1}\approx\frac{z_1}{2\pi L\lambda z_2}$ |

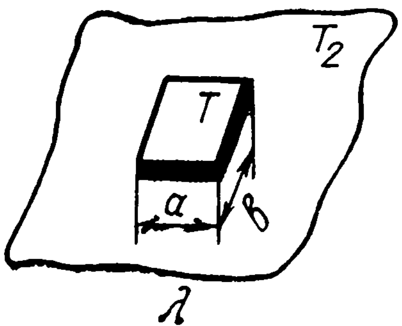
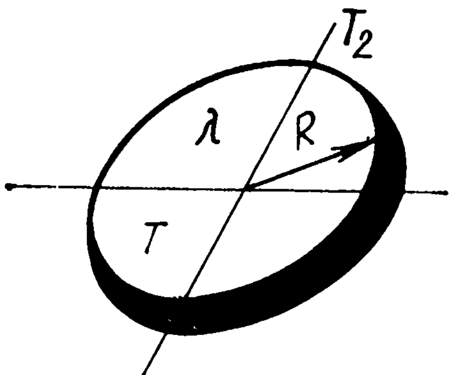
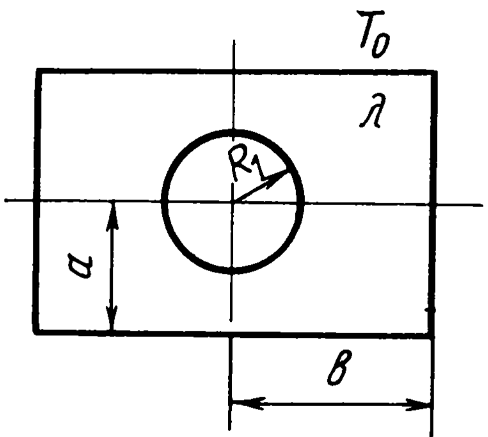
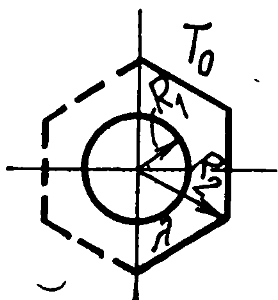
Продолжение табл. 7.1

| Форма тела и его расположение | Расчетная схема | Термическое сопротивление тела | Полное термическое сопротивление с учетом теплоотдачи на контурах |
|---|---|---|---|
| Две трубы в полуограниченном массиве $4R < h_1 \leqslant h_2$ | | $R_1^* = \frac{1}{2\pi\lambda L} \times$ $\times \frac{\ln\frac{2h_1}{R_1}\ln\frac{2h_2}{R_2} + \left(\ln\sqrt{\frac{s^2+(h_1+h_2)^2}{s^2+(h_1-h_2)^2}}\right)^2}{\ln\frac{2h_2}{R_2} - \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\ln\sqrt{\frac{s^2+(h_1+h_2)^2}{s^2+(h_1-h_2)^2}}}$; $\Delta T_1 = T_1 - T_0$; $\Delta T_2 = T_2 - T_0$; $z_1 = \left(\frac{\lambda}{\lambda_{из}}\ln\frac{R_{из_2}}{R_2} + \ln\frac{2h_2}{R_{из_2}}\right)\times$ $\times\left(\frac{\lambda}{\lambda_{из}}\ln\frac{R_{из}}{R_1} + \ln\frac{2h_1}{R_{из_1}}\right) +$ $+\left[\ln\sqrt{\frac{s^2+(h_1+h_2)^2}{s^2+(h_1-h_2)^2}}\right]^2$; $z_2 = \frac{\lambda}{\lambda_{из}}\ln\frac{R_{из_2}}{R_2} + \ln\frac{2h_2}{R_{из_2}} -$ $-\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\ln\sqrt{\frac{s^2+(h_1+h_2)^2}{s^2+(h_1-h_2)^2}}$ Для трубы 2 индексы *1* и *2* меняются местами. | |
| Ряд труб одинакового диаметра с одной и той же температурой в полуограниченном массиве | | Для одной из труб $R^* = \frac{1}{2\pi L\lambda}\ln\left[\frac{s}{\pi R}\operatorname{sh}\left(2\pi\frac{h}{s}\right)\right]$ | $R_\Sigma^* \approx \frac{1}{2\pi L}\left\{\frac{1}{\alpha_1 R} + \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{s}{\pi R}\operatorname{sh}\left(2\pi\frac{h+\lambda/\alpha_2}{s}\right)\right]\right\}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ряд труб одинакового диаметра с одной и той же температурой в массиве, ограниченном двумя параллельными плоскостями |   | Для одной из труб $$R^*=\frac{1}{2\pi L\lambda}\ln\left[\frac{s}{\pi R}\operatorname{sh}\left(\frac{\pi h}{s}\right)\right]$$ | |
| Прямоугольный канал большой протяженности в полуограниченном массиве |   | $$R^*=\frac{1}{\lambda\,(5{,}7+b/2a)}\ln\frac{3{,}5h}{b^{0,25}a^{0,75}}$$ | Термическое сопротивление на поверхности массива учитывается заменой величины $h$ суммой $h+\lambda/\alpha$ |
| Протяженная тонкая пластина в полуограниченном массиве |   | При $0{,}5<h/a<12$: для вертикальной пластины $$R^*\approx\frac{0{,}42}{\lambda}\left(\frac{h}{a}\right)^{0,24};$$ для горизонтальной пластины $$R^*\approx\frac{0{,}34}{\lambda}\left(\frac{h}{a}\right)^{0,32}$$ | То же |
| Шар в полуограниченном массиве |   | $$R^*=\frac{1}{4\pi R\lambda}\left(1+\frac{R}{2h}\right);$$ при $h/R\to\infty$ $$R^*\to 1/4\pi R\lambda$$ | » |

Продолжение табл. 7.1

| Форма тела и его расположение | Расчетная схема | Термическое сопротивление тела | Полное термическое сопротивление с учетом теплоотдачи на контурах |
|---|---|---|---|
| Вертикальный цилиндр в полуограниченном массиве | α, λ, 2R, h | Без учета теплоотдачи с верхнего торца $R^*=\frac{1}{2\pi h\lambda}\ln\frac{2h}{R}$ | С учетом теплоотдачи с верхнего торца $R_{\Sigma}^*=\frac{1}{2\pi h\lambda \ln(2/R)(h+\lambda/\alpha)}+\frac{1}{\alpha\pi R^2}$ |
| Круглое кольцо в полуограниченном массиве | $\alpha T_0$, h, λ, $2R_1$, $2R_2$ | При $R_1 \ll h \ll R$ $R^*=\frac{1}{4\pi^2 R_2}\ln\frac{8R_2}{R_1}\left[1+\frac{\ln(4R_2/h)}{\ln(8R_2/R_1)}\right]$ | Термическое сопротивление на поверхности массива учитывается заменой величины $h$ суммой $h+\lambda/\alpha$ |
| Шар, наполовину загубленный в полуограниченный массив. Весь тепловой поток направлен в массив | $\alpha T_0$, 2R, T, λ | $R^*=1/2\pi R\lambda$ | — |
| Круглая пластина на поверхности полуограниченного массива. Тепловой поток направлен в массиве | $T_2$, R, T, λ | $R^*=1/4R\lambda$ | — |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Прямоугольная пластина на поверхности полуограниченного массива. Тепловой поток направлен в массив |  | $R^* = \frac{1}{\pi a\lambda} \ln \frac{4a}{b}$ | — |
| Круглая пластина в неограниченном массиве с температурой $T_2$ |  | $R^* = 1/8R\lambda$ | — |
| Труба в прямоугольной изоляции |  | $R^* = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln \frac{4a}{\pi R_1} - \frac{k}{\pi\lambda L}$ | — |
| **Труба** в правильной *n*-угольной изоляции |  | $R^* = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{A}{\pi\lambda L}$ | — |

| Форма тела и его расположение | Расчетная схема | Термическое сопротивление тела | Полное термическое сопротивление с учетом теплоотдачи на контурах |
|---|---|---|---|
| Эллиптическая труба, софокусно расположенная в изоляции эллиптической формы | | $R^* = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln \frac{c+d}{a+b}$ | — |
| Полоса, фокально расположенная в эллиптической изоляции | | $R^* = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln \frac{c+d}{f}$ | — |
| Прямоугольная пластина в неограниченном массиве с температурой $T_2$ | | $R^* = \frac{1}{2\pi a\lambda} \ln \frac{4a}{b}$ | — |

* Здесь и далее а) термическое сопротивление стенки трубы считается пренебрежимо малым, б) под температурой $T_0$ понимается температура среды над поверхностью массива. Температура массива на бесконечном удалении от источника теплового потока также равна $T_0$. В практических расчетах подземных трубопроводов за величину $T_0$ на основе опытных данных принимают естественную температуру грунта на глубине залегания оси трубопроводов.

Далее можно найти

$$y_0 = \sqrt{h^2 - R_0^2} \qquad (7.10.12)$$

и поле температур

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{\ln \dfrac{x^2 + (y + \sqrt{h^2 - R_0^2})^2}{x^2 + (y - \sqrt{h^2 - R_0^2})^2}}{2 \ln [h/R_0 - \sqrt{(h/R_0)^2 - 1}]}. \qquad (7.10.13)$$

Этим методом может быть решен также ряд других задач по теплопроводности в системах сложной конфигурации. Так, Е. П. Шубиным была решена задача о двух трубопроводах в полуограниченном массиве с неодинаковыми температурами и диаметрами; И. А. Иоффе решил задачу о температурном поле в полуограниченном массиве с бесконечным рядом одинаково нагретых труб. В тех случаях, когда метод наложения полей оказывается неприменимым, возможно применение метода конформных отображений. Последним методом, например, А. С. Синельников решил задачу о теплопроводности через квадратную изоляцию трубопровода.

Этими и другими методами математической физики решено большое число частных задач о теплопроводности в телах различной формы (табл. 7.1).

## 7.11. УЧЕТ ВНЕШНЕГО ТЕРМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ СТЕНКИ

Приведенные выше задачи характеризуются, в частности, тем, что на поверхности рассматриваемых тел температура постоянная, т. е. одна из изотерм совпадает с поверхностью тела. В случае симметричного тела это условие выполняется, когда коэффициент теплоотдачи имеет постоянное значение на всех точках поверхности. В случае несимметричной системы, например трубопровода в полубесконечном пространстве, условие постоянства температуры на контуре осуществляется только при весьма интенсивном ее охлаждении (теоретически при $\alpha = \infty$).

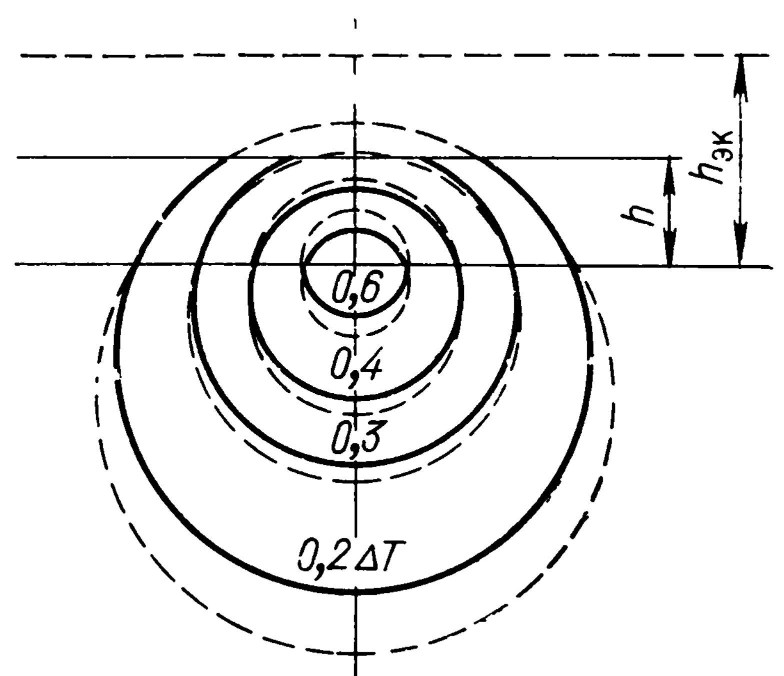



Рис. 7.11. Экспериментальное (———) и расчетное (— — —) поля температур вокруг одиночного теплопровода; $h/D = 3{,}75$; $\mathrm{Bi} = 0{,}26$

В общем случае термическое сопротивление такой системы оказывается функцией безразмерных геометрических параметров и критерия $\mathrm{Bi} = \alpha l/\lambda_{\text{ст}}$. Как указывалось в гл. 5, величина $\delta' = \lambda_{\text{ст}}/\alpha$ имеет размерность длины и называется дополнительной стенкой в связи с тем, что в плоской стенке толщиной $\delta'$ при данном потоке $q$ имел бы место перепад температур $T_{\text{ст}} - T_0$. При решении задач типа определения теплопроводности через плоскую или цилиндрическую стенку учет внешних термических сопротивлений, пропорциональных $1/\alpha$, не представляет затруднений. Иное дело, когда приходится рассматривать задачи более сложные.

Так, в задаче о тепловых потерях трубопровода, заложенного в грунт, нет возможности просто суммировать термическое сопротивление грунта, вычисленное по формуле (7.10.10), с термическим сопротивлением воздуха над грунтом. Действительно, при конечном значении $\alpha$ меняется термическое сопротивление собственно грунта, так как его поверхность перестает быть изотермической. Кроме того, неясно, как вычислить собственно внешнее термическое сопротивление, когда поверхность грунта бесконечно велика. В то же время точное решение уравнения теплопроводности с граничным условием третьего рода существенно сложнее, чем при задании граничного условия постоянной температуры контура. В подобных случаях оказывается возможным удовлетвори-

тельно учесть конечное значение $\alpha$ путем введения в расчетную формулу, полученную для случая $\alpha = \infty$, линейного размера системы, увеличенного на толщину дополнительной стенки $\delta'$.

При этом, однако, относительная величина $\delta'/l$ должна быть настолько мала, чтобы теоретическое распределение температур в дополнительной стенке было близким к линейному. В качестве примера рассмотрим кривые распределения температур над трубопроводом в грунте по формуле (7.10.13). Обозначим через $h$ длину участка с резко выраженным криволинейным распределением температур, а через $\delta'$ — длину участка, в котором распределение температур близко к прямолинейному. Отношение $\delta'/h$ имеет порядок 0,4. Следовательно, в том случае, когда величина $\delta'/h = \lambda_{ст}/\alpha h = 1/\mathrm{Bi}$ меньше 0,4, конечную величину $\alpha$ можно учесть, введя в формулу (7.9.2) вместо истинной глубины залегания трубопровода $h$ величину $h_{эк} = h + \delta'$. Насколько хорошо в данном случае оправдывается этот прием, видно из рис. 7.11, на котором сопоставлено опытное температурное поле с температурным полем, вычисленным по формуле (7.10.13) при замене величины $h$ величиной $h_{эк}$.

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*

1. **Варшавский Г. А.** Определение тепловых потоков в твердом теле при стационарном режиме для случая, когда коэффициент теплопроводности является функцией температуры.— «Журн. эксперим. теор. физ.», 1936, т.6, вып. 3, с. 282.
2. **Варшавский Г. А.** Исследование некоторых задач теплопроводности при коэффициенте теплопроводности, зависящем от температуры.— «Журн. прикл. механ. и техн. физ.», 1961, № 3, с. 3—15.

2а. **Гребер Г., Эрк С.** Основы учения о теплообмене. М.—Л., ОНТИ, 1936.

3. **Проблемы** теплофикации. Л.—М., ОНТИ, 1936 (Тр. ЦКТИ, вып. 11).
4. **Шорин С. Н.** Теплопередача. М.—Л., Госстройиздат, 1952.
5. **Шубин Е. П.** Материалы, методы устройства и расчет тепловой изоляции трубопроводов. М., Госэнергоиздат, 1948.

Глава

# 8 НЕУСТАНОВИВШИЙСЯ ТЕПЛОВОЙ ПОТОК В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ БЕЗ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ

## 8.1. УРАВНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

При отсутствии внутренних источников тепла уравнение теплопроводности (2.3.6) принимает вид

$$a\nabla^2 T = \partial T/\partial t. \tag{8.1.1}$$

Вводя безразмерные координаты $\vartheta = \Delta T/\Delta T_0$; $\bar{x} = x/l_0$; $\bar{y} = y/l_0$; $\bar{z} = z/l_0$, где $\Delta T_0$ — начальный температурный напор; $l_0$ — характерный линейный размер тела, приводим уравнение (8.1.1) к виду

$$\nabla^2 \vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial (at/l_0^2)}. \tag{8.1.2}$$

Из этого уравнения видно, что безразмерная температура является функцией критерия Фурье

$$\mathrm{Fo} = at/l_0^2, \tag{8.1.3}$$

т. е. сходственные времена пропорциональны квадрату линейного масштаба тела и обратно пропорциональны коэффициенту диффузии тепла.

Среди практических задач о нестационарной теплопроводности важнейшее значение имеют две группы процессов: а) тело стремится к тепловому равновесию; б) температура тела претерпевает периодические изменения. К первой группе относятся процессы прогрева и охлаждения тел, помещенных в среду с некоторым заданным тепловым состоянием, например прогрев болванки в печи, охлаждение закаливаемой детали и т. п. Ко второй группе относятся процессы в периодически действующих подогревателях, например тепловой процесс регенераторов, кладка которых периодически то нагревается дымовыми газами, то охлаждается воздухом, который сам при этом подогревается. В этом случае процесс периодического колебания температуры и теплового потока называют тепловыми волнами.

Проблема решения уравнения (8.1.1) является чисто математической. Специальные физические соображения приходится привлекать только при задании соответствующих начальных и граничных условий. Однако в огромном числе практически важных задач и эта проблема, по существу, снимается возможностью принять температуру тела в начальный момент времени одинаковой во всех его точках. Температуру на поверхности тела обычно можно считать или постоянной за время протекания процесса, или зависящей от постоянного коэффициента теплоотдачи и меняющейся по заданному закону температуры окружающей среды (последнюю также во многих случаях можно считать постоянной).

Аналитический метод решения уравнения теплопроводности (8.1.1) первоначально был развит в работах Фурье и в дальнейшем нашел широкое применение в самых разнообразных областях математической физики. Метод Фурье применительно к фундаментальным задачам теории теплопроводности был подробно разработан Г. Гребером, Г. Карслоу, А. В. Лыковым, А. Н. Тихоновым и другими исследователями.

Широкое применение в решении сложных задач теории теплопроводности нашли операционные методы. Определяя $T$ через функцию $U = \int \lambda dT$, можно привести уравнение (8.1.1) к виду

$$\nabla^2 U = \varphi(U)\, \partial U/\partial t, \tag{8.1.4}$$

где $\varphi(U) = a^{-1}$.

Однако в задачах нестационарной теплопроводности введение функции $U$ не дает такого общего результата, как в задачах о стационарном температурном поле. Некоторые частные решения уравнения (8.1.4) были исследованы К. И. Страховичем.

В рамках данной книги мы ограничимся рассмотрением нескольких наиболее распространенных задач нестационарной теплопроводности с целью выявления общих физических особенностей такого рода процессов. Для более детального ознакомления с этой проблемой следует обратиться к специальной литературе по теории теплопроводности, среди которой наиболее подробными являются монографии Г. Карслоу и Д. Егера и А. В. Лыкова.

## 8.2. РЕШЕНИЕ В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ФУНКЦИЙ

Существует ряд решений (интегралов) уравнения Фурье. Одним из них, имеющим большое практическое значение, является произведение двух функций, из которых одна связана только с координатами, а другая — только со временем:

$$T = \psi(x;\ y;\ z;)\,\varphi(t);\quad \vartheta = \psi(\bar{x};\ \bar{y};\ \bar{z})\,\varphi(\text{Fo}). \qquad (8.2.1)$$

Дифференцируя это уравнение и подставляя соответствующие производные в уравнение (8.1.2), получаем

$$\varphi\nabla^2\psi = \psi\varphi'. \qquad (8.2.2)$$

Таким образом, для того чтобы выражение (8.2.1) удовлетворяло уравнению (8.1.1), необходимо, чтобы функции $\psi$ и $\varphi$, не зависящие друг от друга, удовлетворяли условию

$$\nabla^2\psi/\psi = \varphi'/\varphi = \text{const}. \qquad (8.2.3)$$

Если тело с некоторой температурой $T\ (x;\ y;\ z)$ погружено в среду с температурой $T_0$, отличной от температуры этого тела, то в результате возникающего процесса теплообмена тело стремится к тепловому равновесию с окружающей средой. Когда $T_0 > T$, тело нагревается, когда $T_0 < T$, тело охлаждается. При отсутствии в теле внутренних источников тепла температура во всех его точках будет меняться во времени монотонно, стремясь к температуре окружающей среды.

Легко заметить, что если в абсолютных координатах нагрев и охлаждение тела изображаются двумя кривыми, то в безразмерных координатах оба процесса изображаются одной и той же кривой, так как при прочих равных условиях величина $d\vartheta/d\text{Fo}$ и при охлаждении, и при нагреве меньше нуля.

Действительно, при нагреве начальная температура тела $T_1$ меньше температуры тела в момент времени $t$ и меньше температуры окружающей среды $T_0$, т. е. $T_1 < T_t < T_0$; при охлаждении, наоборот, $T_1 > T_t > T_0$. При этом для обоих случаев безразмерная температура $\vartheta = (T_t - T_0)/(T_1 - T_0)$ в начальный момент равна единице, а при достижении полного теплового равновесия ($T_t = T_0$) равна нулю. Этому условию удовлетворяет экспоненциальная функция

$$\varphi = \exp(-\beta^2\,\text{Fo}), \qquad (8.2.4)$$

где $\beta$ — некоторая постоянная, что непосредственно следует из уравнения (8.2.3). Подставляя это значение $\varphi$ (Fo) в выражение (8.2.1), получаем

$$\vartheta = \psi\exp(-\beta^2\text{Fo});\ \partial\varphi/\partial\text{Fo} = -\beta^2\exp(-\beta^2\,\text{Fo});\ \varphi'/\varphi = -\beta^2. \qquad (8.2.5)$$

Подставляя последнее выражение в (8.2.3), получаем уравнение, определяющее функцию координат:

$$\nabla^2\psi + \beta^2\psi = 0. \qquad (8.2.6)$$

Это решение легко обобщается для случая, когда коэффициент температуропроводности, оставаясь одним и тем же во всех точках тела в данный момент времени, непрерывно изменяет свое значение в течение процесса, т. е. когда $a = f(t)$.

При таком условии переход от уравнения (8.1.1) к уравнению (8.2.6) может быть осуществлен введением функции времени, определенной как

$$\varphi = \exp\left[-(\beta/l_0)^2 \int_0^t f(t)\, dt\right]. \tag{8.2.7}$$

## 8.3. ТЕМПЕРАТУРА — ФУНКЦИЯ ОДНОЙ КООРДИНАТЫ И ВРЕМЕНИ

Важнейшими частными случаями рассматриваемой проблемы являются процессы, в которых температура — функция только одной координаты. Уравнение (8.2.6) можно переписать в обыкновенных дифференциалах, и тогда оно примет вид:

для протяженной плоской стенки

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + \beta^2\psi(\xi) = 0; \tag{8.3.1}$$

для протяженного цилиндра

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\psi(\xi)}{d\xi} + \beta^2\psi(\xi) = 0; \tag{8.3.2}$$

для шара

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{d\psi(\xi)}{d\xi} + \beta^2\psi(\xi) = 0. \tag{8.3.3}$$

При этом в уравнении (8.3.1) безразмерная координата $\xi = x/\delta$, где $\delta$ — в данном случае полутолщина стенки, а в уравнениях (8.3.2) и (8.3.3) $\xi = R/R_0$; здесь $R_0$ — характерный радиус тела.

Уравнению (8.3.1) удовлетворяют тригонометрические функции

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= C_1 \cos(\beta\xi); \\ \psi_2 &= C_2 \sin(\beta\xi). \end{aligned}\right\} \tag{8.3.4}$$

Решения уравнения (8.3.2) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= C_1 J_0(\beta\xi); \\ \psi_2 &= C_2 Y_0(\beta\xi), \end{aligned}\right\} \tag{8.3.5}$$

где $J_0$ и $Y_0$ — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка.

Решениями уравнения (8.3.3) являются функции

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= C_1 \frac{\cos(\beta\xi)}{\beta\xi}; \\ \psi_2 &= C_2 \frac{\sin(\beta\xi)}{\beta\xi}. \end{aligned}\right\} \tag{8.3.6}$$

Эти функции, являющиеся частными интегралами рассмотренных дифференциальных уравнений, распадаются на две группы — четные и нечетные. Суммируя $\psi_1$ и $\psi_2$, получаем:

для протяженной плоской стенки

$$\vartheta = [C_1 \cos(\beta x/\delta) + C_2 \sin(\beta x/\delta)] \exp(-\beta^2 at/\delta^2); \tag{8.3.7}$$

для протяженного цилиндра

$$\vartheta = [C_1 J_0(\beta R/R_0) + C_2 Y_0(\beta R/R_0)] \exp(-\beta^2 at/R_0^2); \tag{8.3.8}$$

для шара

$$\vartheta = (R_0/\beta R)[C_1 \cos(\beta R/R_0) + C_2 \sin(\beta R/R_0)] \exp(-\beta^2 at/R_0^2). \tag{8.3.9}$$

Существуют процессы теплопроводности, которые нельзя описать рассмотренными выше решениями, представляющими температуру в виде произведения двух частных функций, каждая из которых зависит только от одной переменной. Тогда применяются функции иного типа, в которых рассмотренное выше разделение невозможно.

Дифференцированием и подстановкой можно показать, что, например, функции

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{C}{\sqrt{4\pi at}} \exp\left[\frac{-(\beta - x)^2}{4at}\right]; \\ T &= C\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{x/\sqrt{4at}} \exp\left(-z^2 dz\right) \end{aligned}\right\} \quad (8.3.10)$$

также являются интегралами дифференциального уравнения

$$a\partial^2 T/\partial x^2 = \partial T/\partial t. \quad (8.3.11)$$

## 8.4. МОНОТОННЫЙ ПЕРЕХОД К ТЕПЛОВОМУ РАВНОВЕСИЮ

Рассмотрим плоскую стенку толщиной $2\delta$. С обеих сторон стенка охлаждается одинаково интенсивно средой с температурой, равной $T_0$. В начальный момент времени стенка была равномерно прогрета до температуры $T_1$. В рассматриваемом случае температурное поле во все время процесса симметрично относительно оси стенки, так как с обеих сторон последняя охлаждается одинаково. Следовательно, $\psi(x)$ должна быть четной функцией, и в формуле (8.3.7) следует положить $C_2 = 0$:

$$\vartheta = C\cos(\beta\xi)\exp(-\beta^2 \mathrm{Fo}). \quad (8.4.1)$$

Здесь $\xi = x/\delta$; $\mathrm{Fo} = at/\delta^2$. Краевые условия имеют вид

$$t = 0;\ T = T_1;\ x = \delta;\ \partial T/\partial x = -(\alpha/\lambda)(T_{\text{ст}} - T_0). \quad (8.4.2)$$

Приводя пространственное краевое условие к безразмерному виду, получаем

$$(\partial\vartheta/\partial\xi)_{\xi=1} = -\mathrm{Bi}\,\vartheta_{\xi=1}, \quad (8.4.3)$$

где $\mathrm{Bi} = \alpha\delta/\lambda$. Дифференцируя уравнение (8.4.1) и подставляя полученное значение производной в уравнение (8.4.3), находим

$$\beta \sin\beta = \mathrm{Bi}\cos\beta. \quad (8.4.4)$$

Этот результат показывает, что пространственные краевые условия определяют значение постоянной $\beta$ и оставляют для постоянной $C$ произвольное значение. Последнее находится с помощью краевых условий. Значения первых пяти корней уравнения (8.4.4) приведены в табл. 8.1.

Согласно теории дифференциальных уравнений общее решение строится как сумма частных решений, т. е. в рассматриваемом случае

$$\vartheta = \sum C_i \cos(\beta_i \xi)\exp(-\beta_i^2 \mathrm{Fo})\ (1 \leqslant i \leqslant \infty). \quad (8.4.5)$$

В начальный момент

$$t = 0;\ \mathrm{Fo} = 0;\ \exp(-\beta^2 \mathrm{Fo}) = 1;\ \vartheta = 1. \quad (8.4.6)$$

Отсюда

$$\sum C_i \cos(\beta_i \xi) = 1\ (1 \leqslant i \leqslant \infty). \quad (8.4.7)$$

В теории рядов Фурье показано, что коэффициенты

$$C_i = \frac{\int\limits_{-1}^{+1} \vartheta_1(\xi)\cos(\beta_i\xi)\,d\xi}{\int\limits_{-1}^{+1} \cos^2(\beta_i\xi)\,d\xi}. \quad (8.4.8)$$

Таблица 8.1

**Значение корней уравнения $\beta \sin \beta = \mathrm{Bi} \cos \beta$**

| Bi | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $\beta_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\infty$ | $1,57=\frac{1}{2}\pi$ | $4,71=\frac{3}{2}\pi$ | $7,85=\frac{5}{2}\pi$ | $11,00=\frac{7}{2}\pi$ | $14,15=\frac{9}{2}\pi$ |
| 1000 | 1,57 | 4,71 | 7,84 | 10,98 | 14,13 |
| 100 | 1,56 | 4,66 | 7,77 | 10,88 | 14,00 |
| 50 | 1,54 | 4,62 | 7,70 | 10,78 | 13,87 |
| 20 | 1,50 | 4,49 | 7,49 | 10,51 | 13,55 |
| 10 | 1,43 | 4,30 | 7,22 | 10,20 | 13,22 |
| 4,0 | 1,26 | 3,93 | 6,81 | 9,78 | 12,87 |
| 1,0 | 0,86 | 3,42 | 6,43 | 9,52 | 12,65 |
| 0,5 | 0,65 | 3,29 | 6,36 | 9,47 | 12,61 |
| 0,1 | 0,31 | 3,17 | 6,30 | 9,43 | 12,57 |
| 0,01 | 0,10 | 3,14 | 6,28 | 9,42 | 12,57 |
| 0 | 0 | $\pi$ | $2\pi$ | $3\pi$ | $4\pi$ |

В данном случае $\vartheta_1(\xi) = 1$ и

$$C_i = \frac{2 \sin \beta_i}{\sin \beta_i \cos \beta_i + \beta_i}. \tag{8.4.9}$$

Окончательно получаем

$$\vartheta = 2 \sum \frac{\sin \beta_i \cos (\beta_i\, x/\delta)}{\beta_i + \sin \beta_i \cos \beta_i} \exp(-\beta_i^2\, \mathrm{Fo}) \; (1 \leqslant i \leqslant \infty). \tag{8.4.10}$$

Изменение теплосодержания стенки проще всего определить по формуле

$$Q = c\rho F \int_{-\delta}^{+\delta} (T_1 - T)\, dx. \tag{8.4.11}$$

Начальное теплосодержание стенки, отсчитанное от температуры $T_0$, равно

$$Q_0 = 2c\rho F\delta\, (T_1 - T_0). \tag{8.4.12}$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$T_1 - T = (T_1 - T_0)(1 - \vartheta),$$

получаем выражение для относительных тепловых потерь стенки

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (1 - \vartheta)\, d\xi. \tag{8.4.13}$$

Подставляя сюда значение $\vartheta$ из уравнения (8.4.10), получаем

$$\frac{Q}{Q_0} = \sum \frac{\sin \beta_i}{\beta_i + \cos \beta_i \sin \beta_i} [1 - \exp(-\beta_i^2\, \mathrm{Fo})] \int_{-1}^{+1} \cos(\beta_i\, \xi)\, d\xi \; (1 \leqslant i \leqslant \infty). \tag{8.4.14}$$

Интегрирование дает выражение

$$\frac{Q}{Q_0} = 2 \sum \frac{\sin^2 \beta_i}{\beta_i^2 + \beta_i \cos \beta_i \sin \beta_i} [1 - \exp(-\beta_i^2\, \mathrm{Fo})] \; (1 \leqslant i \leqslant \infty). \tag{8.4.15}$$

Не останавливаясь на деталях решения уравнений для цилиндра и шара, поскольку с физической точки зрения они не содержат ничего нового по сравнению с рассмотренным выше примером, приведем окончательные формулы: для сплошного протяженного цилиндра

$$\vartheta = 2\sum \frac{1}{\beta_i} \frac{J_1(\beta_i)\, J_0(\beta_i R/R_0)}{J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)} \exp(-\beta_i^2\, at/R_0^2)\; (1 \leqslant i \leqslant \infty); \qquad (8.4.16)$$

$$\frac{Q}{Q_0} = 4\sum \frac{1}{\beta_i^2} \frac{J_1^2(\beta_i)}{J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)} [1 - \exp(-\beta_i^2\, at/R_0^2)]\; (1 \leqslant i \leqslant \infty). \qquad (8.4.17)$$

Здесь $J_1 = J_0'$ — функция Бесселя первого рода первого порядка.

Для сплошного шара

$$\vartheta = 2\sum \frac{\sin\beta_i - \beta_i \cos\beta_i}{\beta_i - \sin\beta_i \cos\beta_i} \frac{\sin(\beta_i R/R_0)}{\beta_i R/R_0} \exp(-\beta_i^2\, at/R_0^2)\; (1 \leqslant i \leqslant \infty); \qquad (8.4.18)$$

$$\frac{Q}{Q_0} = 6\sum \frac{1}{\beta_i^3} \frac{(\sin\beta_i - \beta_i \cos\beta_i)^2}{\beta_i - \sin\beta_i \cos\beta_i} [1 - \exp(-\beta_i^2\, at/R_0^2)\; (1 \leqslant i \leqslant \infty). \qquad (8.4.19)$$

Значения первых пяти корней уравнений $\beta J_1(\beta) = \mathrm{Bi} J_0(\beta)$ и $\beta \cos\beta = (1 - \mathrm{Bi}) \sin\beta$ приведены в табл. 8.2 и 8.3.

Таблица 8.2

**Значение корней уравнения $\beta J_1(\beta) = \mathrm{Bi} J_0(\beta)$**

| Bi | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $\beta_5$ | Bi | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $\beta_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 2,405 | 5,520 | 8,654 | 11,792 | 14,931 | 1,0 | 1,253 | 4,08 | 7,16 | 10,27 | — |
| 50 | 2,35 | 5,41 | 8,48 | 11,56 | — | 0,5 | 0,940 | 3,96 | 7,09 | 10,22 | — |
| 20 | 2,29 | 5,26 | 8,25 | 11,27 | — | 0,1 | 0,443 | 3,86 | 7,03 | 10,19 | — |
| 10 | 2,17 | 5,03 | 7,96 | 10,94 | — | 0,05 | 0,315 | 3,85 | 7,02 | 10,18 | — |
| 4 | 1,906 | 4,60 | 7,52 | 10,54 | — | 0 | 0 | 3,832 | 7,016 | 10,174 | 13,324 |

Таблица 8.3

**Значение корней уравнения $\beta \cos\beta = (1 - Bi) \sin\beta$**

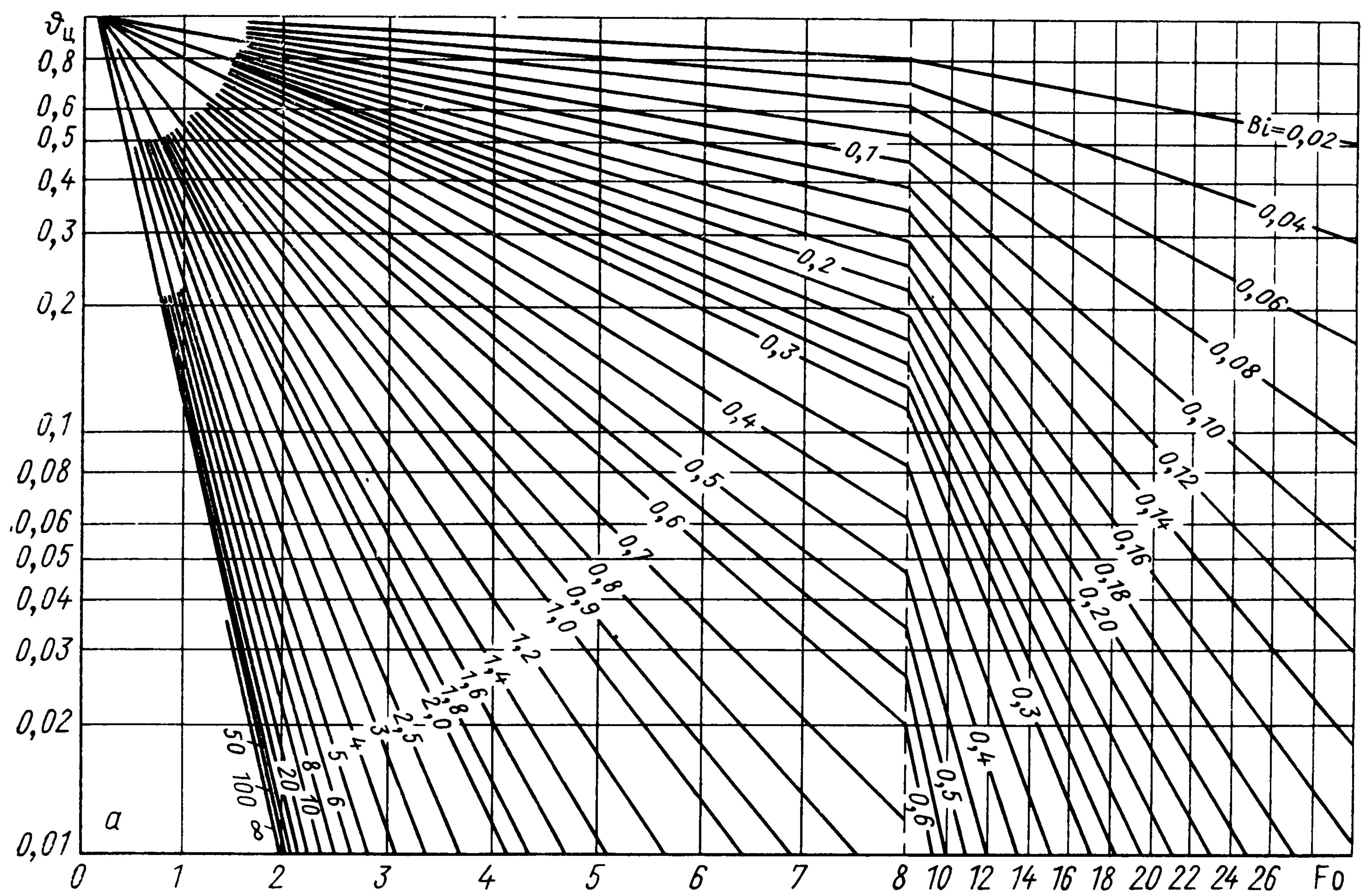
| Bi | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | Bi | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | 3,14 | 6,28 | 9,42 | 12,57 | 1,0 | 1,57 | 4,71 | 7,85 | 10,99 |
| 50 | 3,08 | 6,12 | 9,24 | 12,31 | 0,5 | 1,17 | 4,60 | 7,79 | 10,95 |
| 20 | 2,98 | 5,98 | 8,98 | 12,00 | 0,1 | 0,54 | 4,52 | 7,74 | 10,91 |
| 10 | 2,84 | 5,72 | 8,66 | 11,65 | 0,05 | 0,39 | 4,51 | 7,72 | 10,91 |
| 4 | 2,45 | 5,23 | 8,20 | 11,25 | 0 | 0 | 4,49 | 7,72 | 10,90 |

В общем случае нестационарная теплопроводность характеризуется функциональными связями типа

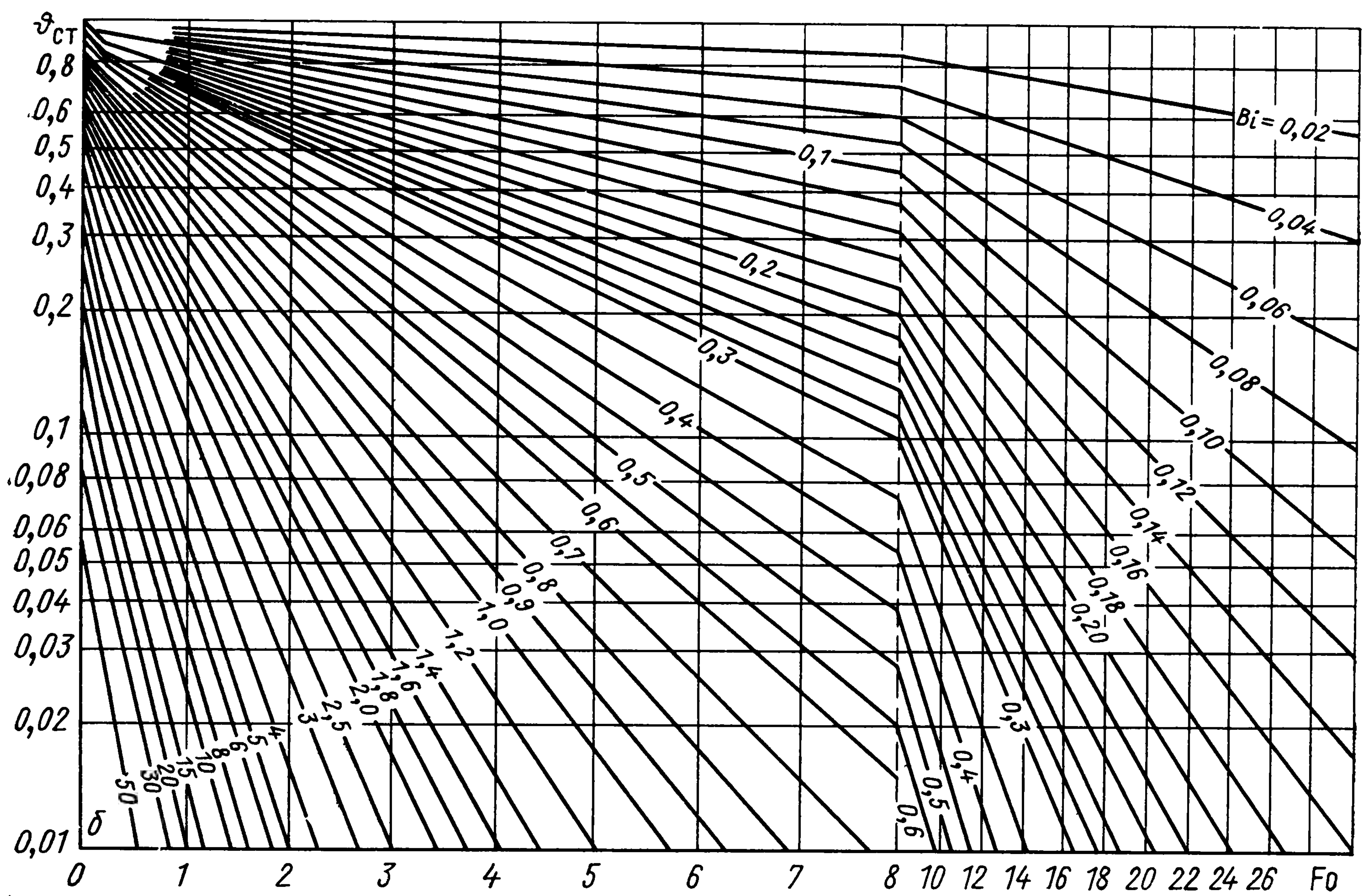
$$\vartheta = \Phi_1(\alpha l_0/\lambda;\; at/l_0^2;\; l/l_0); \qquad (8.4.20)$$

$$Q/Q_0 = \Phi_2(\alpha l_0/\lambda;\; at/l_0^2), \qquad (8.4.21)$$

где $l_0$ — характерный линейный размер; $l$ — текущая координата. На рис. 8.1 и 8.2 приведены диаграммы Д. В. Будрина и Г. Гребера, построенные по приведенным выше формулам. Эти диаграммы позволяют определить температуру центра тела, температуру поверхности тела и изменение его теплосодержания в процессе охлаждения или прогрева.

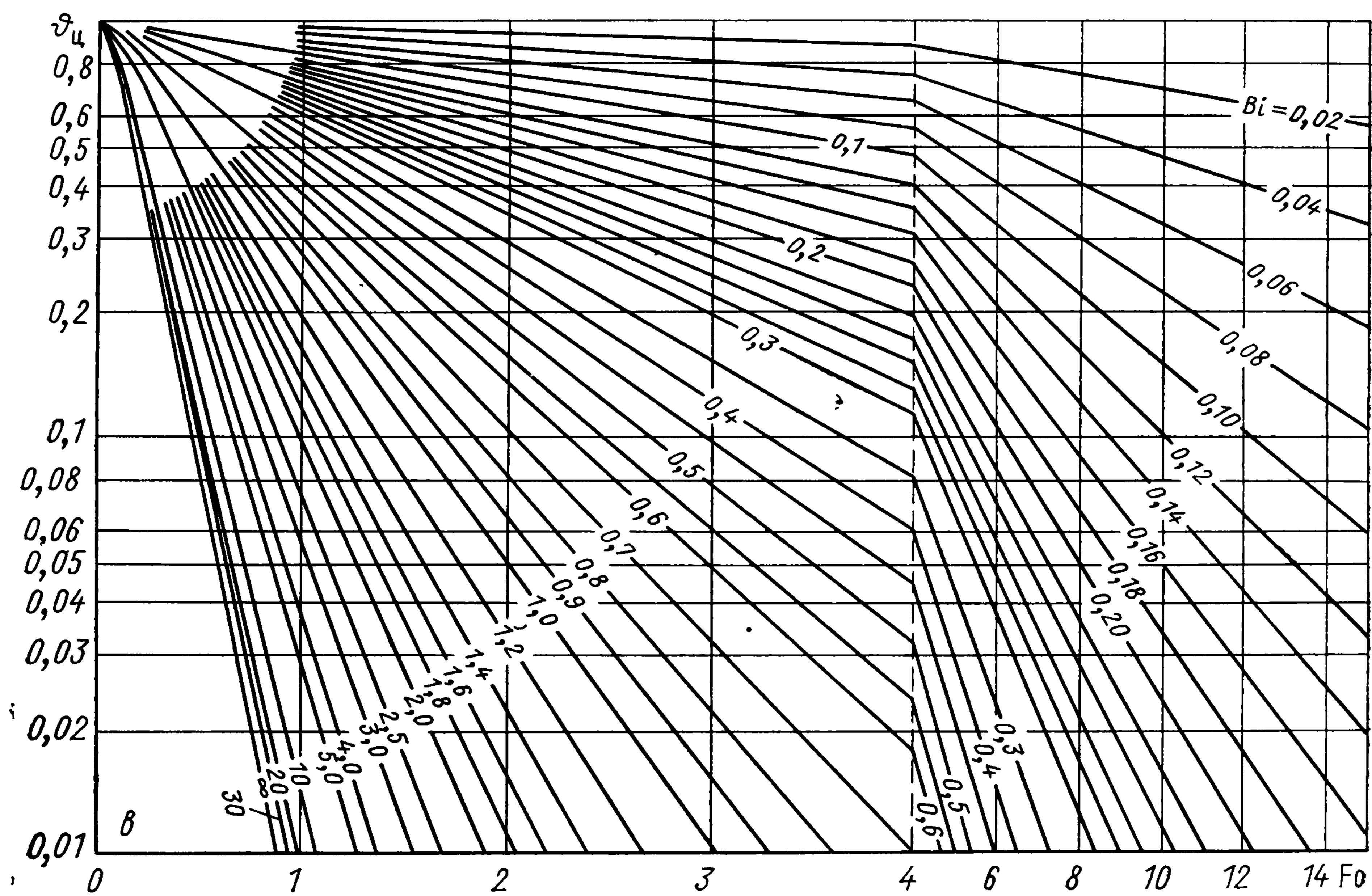


$\vartheta_ц$
0,8
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,08
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0 1 2 3 4 5 6 7 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 Fo
Bi=0,02
0,04
0,06
0,08
0,10
0,12
0,14
0,16
0,18
0,20
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,5
3
4
5
6
8
10
20
50
100
∞
а

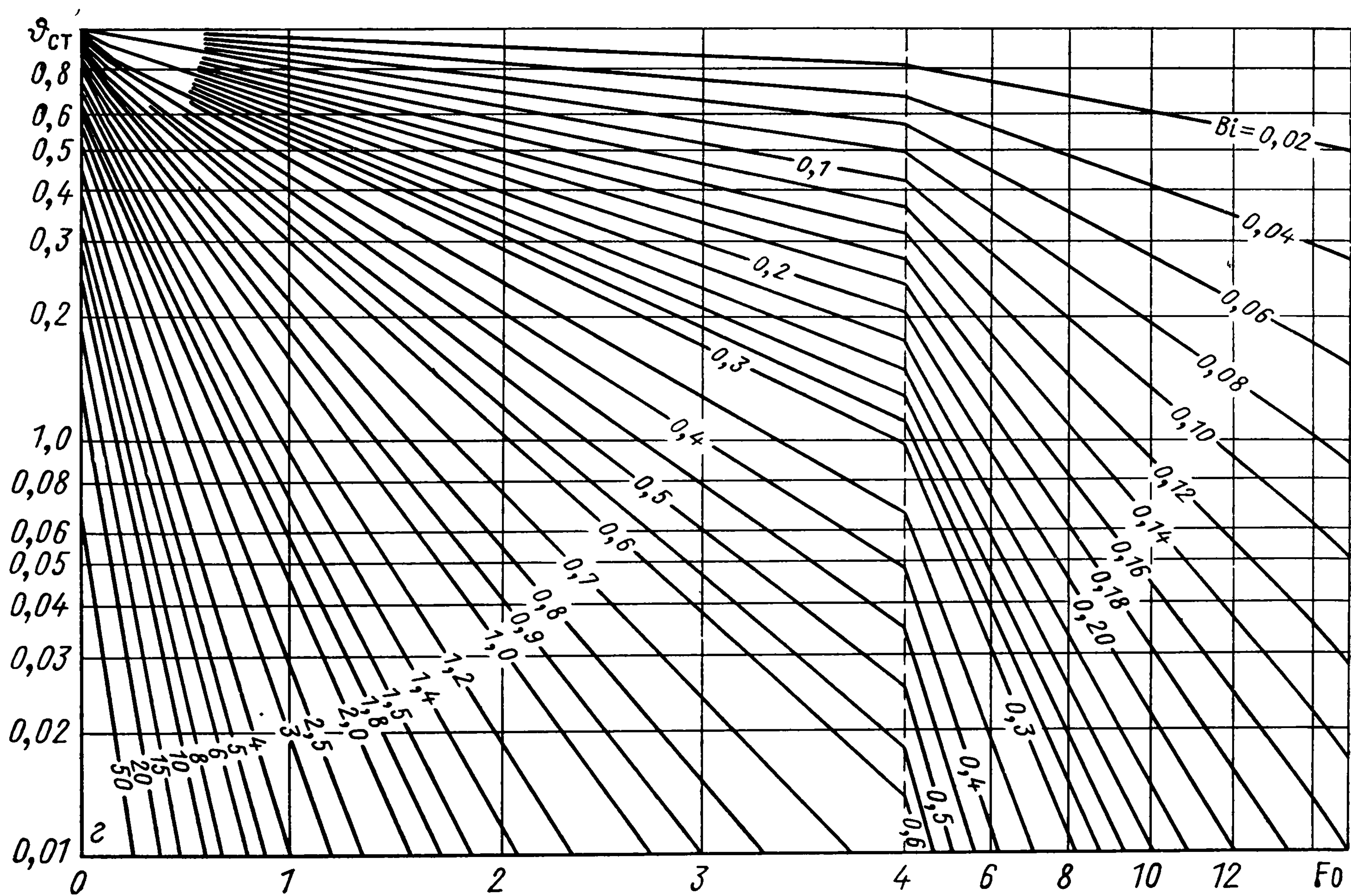



$\vartheta_{ст}$
0,8
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,08
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0 1 2 3 4 5 6 7 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 Fo
Bi= 0,02
0,04
0,06
0,08
0,10
0,12
0,14
0,16
0,18
0,20
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,5
3
4
5
6
8
10
15
20
30
50
б


Рис. 8.1 *а, б*

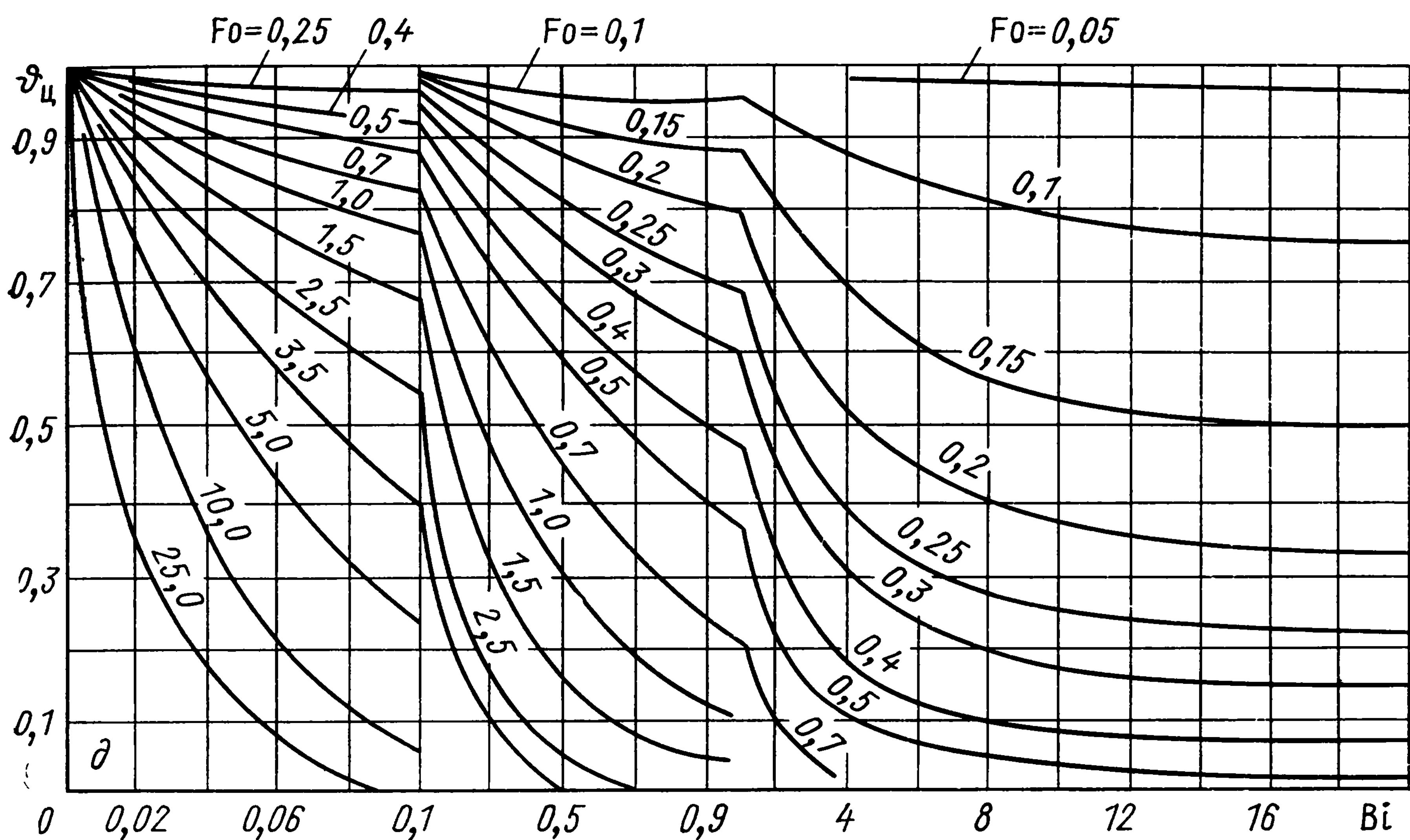


$\vartheta_ц$
0,8
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,08
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
1
2
3
4
6
8
10
12
14 Fo
Bi = 0,02
0,04
0,06
0,08
0,10
0,12
0,14
0,16
0,18
0,20
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,5
3,0
4,0
5,0
10
20
∞
30
0,3
0,4
0,5
0,6
в

$\vartheta_{ст}$
0,8
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
1,0
0,08
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
1
2
3
4
6
8
10
12
Fo
Bi = 0,02
0,04
0,06
0,08
0,10
0,12
0,14
0,16
0,18
0,20
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,2
1,4
1,5
1,8
2,0
2,5
3
4
5
6
8
10
15
20
50
0,3
0,4
0,5
0,6
г


Рис. 8.1 *в, г*



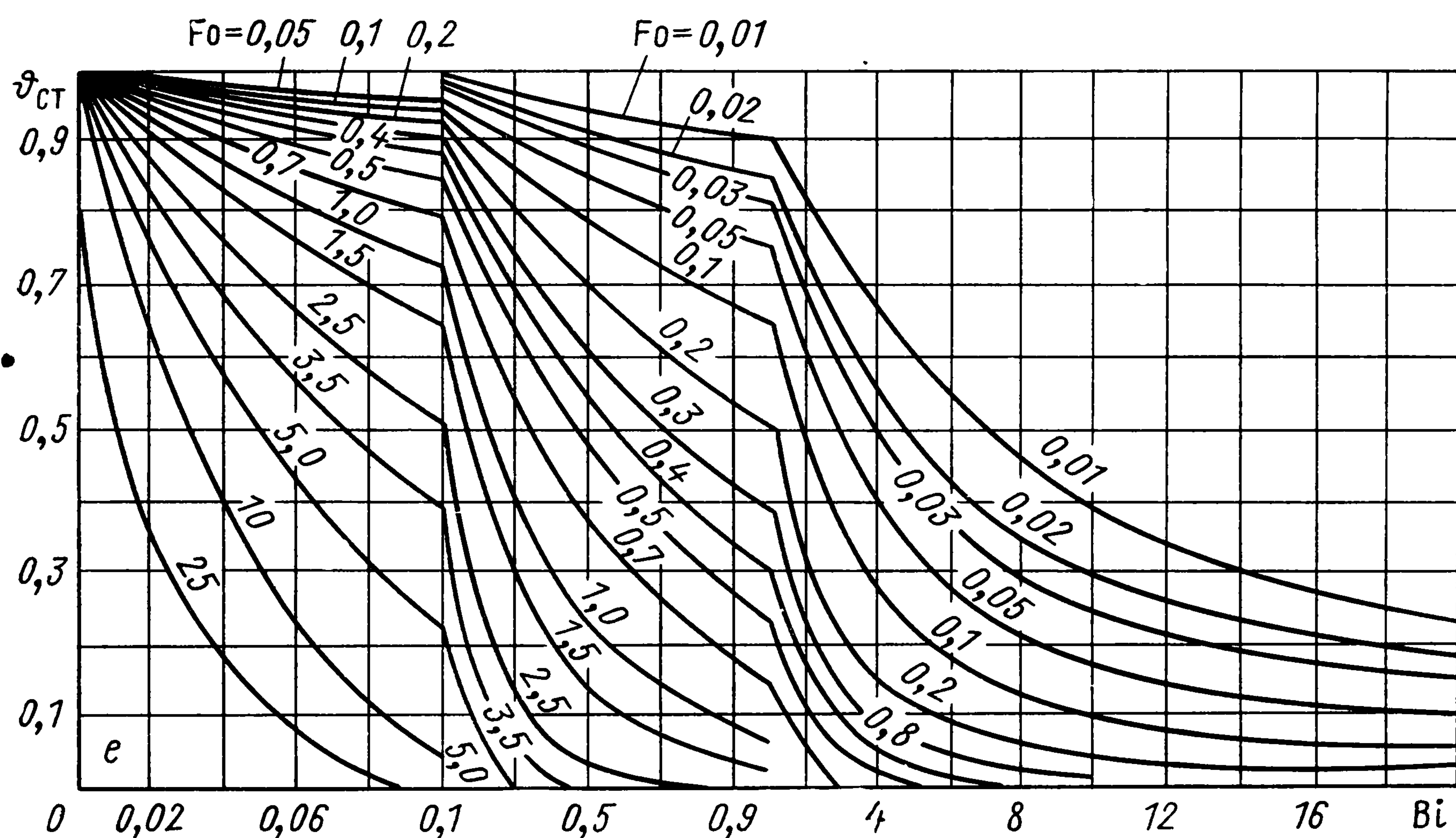



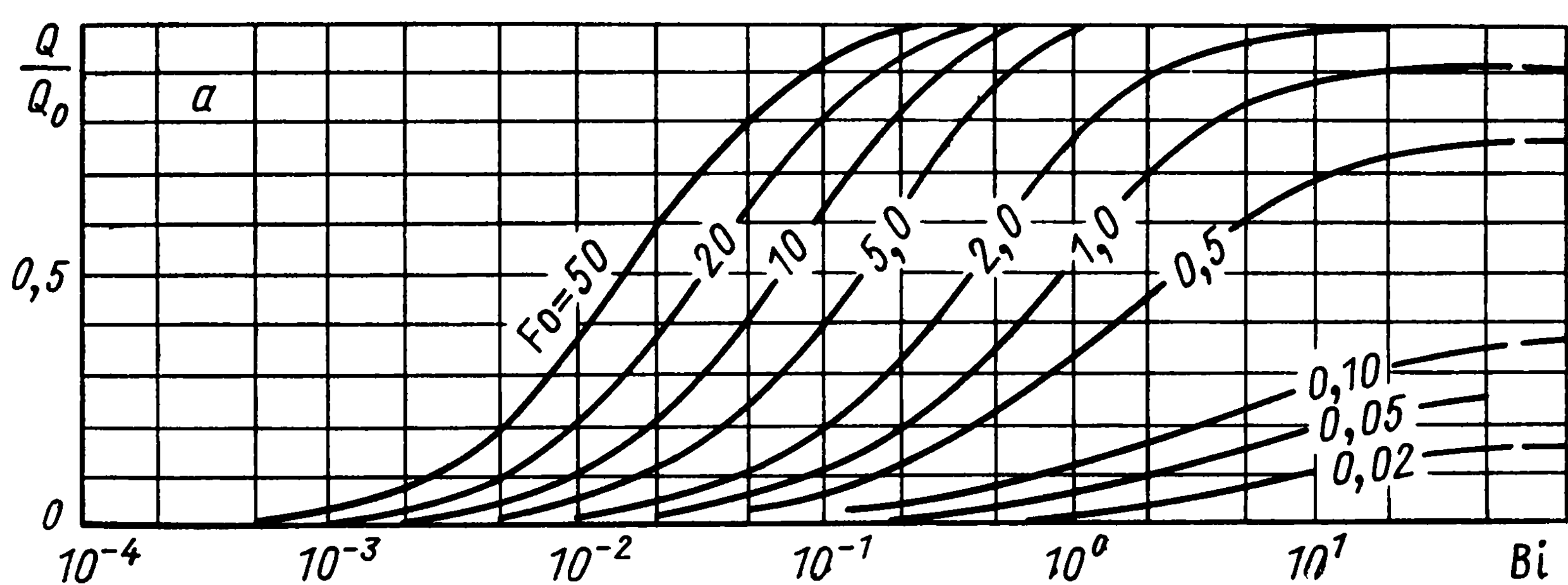

Рис. 8.1. Определение температуры в зависимости от Fo и Bi при $T_0$=const в средней плоскости (*а*) и на поверхности пластины (*б*); на оси (*в*) и на поверхности цилиндра (*г*); в центре (*д*) и на поверхности шара (*е*)

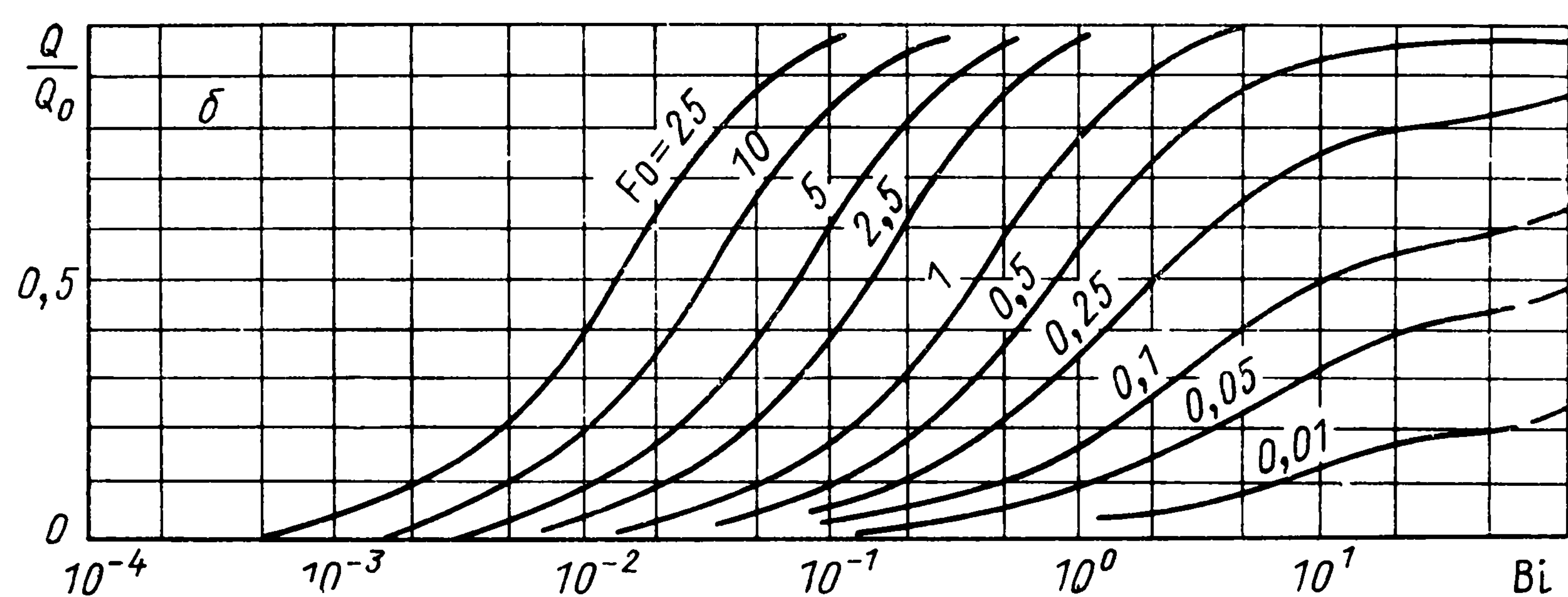
Как видно из рис. 8.3, медленнее всего охлаждается плоская стенка и быстрее всего шар, т. е. кривые располагаются в порядке изменения отношения поверхности тела к его объему. Чем больше это отношение (при $R$ = idem), тем быстрее изменяется температура тела.

### 8.5. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ТЕЛЕ ПРИ ТЕМПЕРАТУРЕ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ, ЛИНЕЙНО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ВО ВРЕМЕНИ

Рассмотрим протяженную пластину толщиной $2\delta$. В начальный момент времени пластина имеет температуру, равную температуре окружающей среды $T_{00}$. С этого момента ($t = 0$) окружающая среда начинает изменять свою температуру по закону

$$T_0 = T_{00} + bt. \qquad (8.5.1)$$



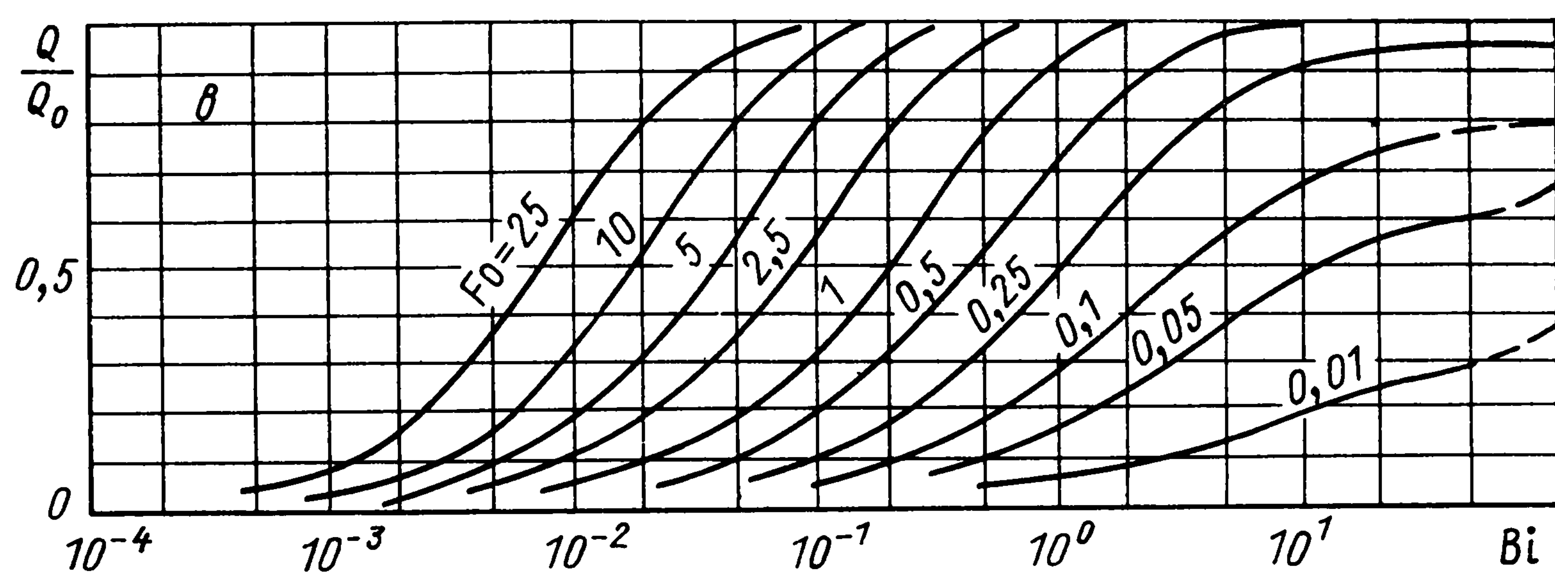




Рис. 8.2. Определение тепловых потерь в зависимости от Fo и Bi при $T_0$=const пластины (*а*), цилиндра (*б*) и шара (*в*)

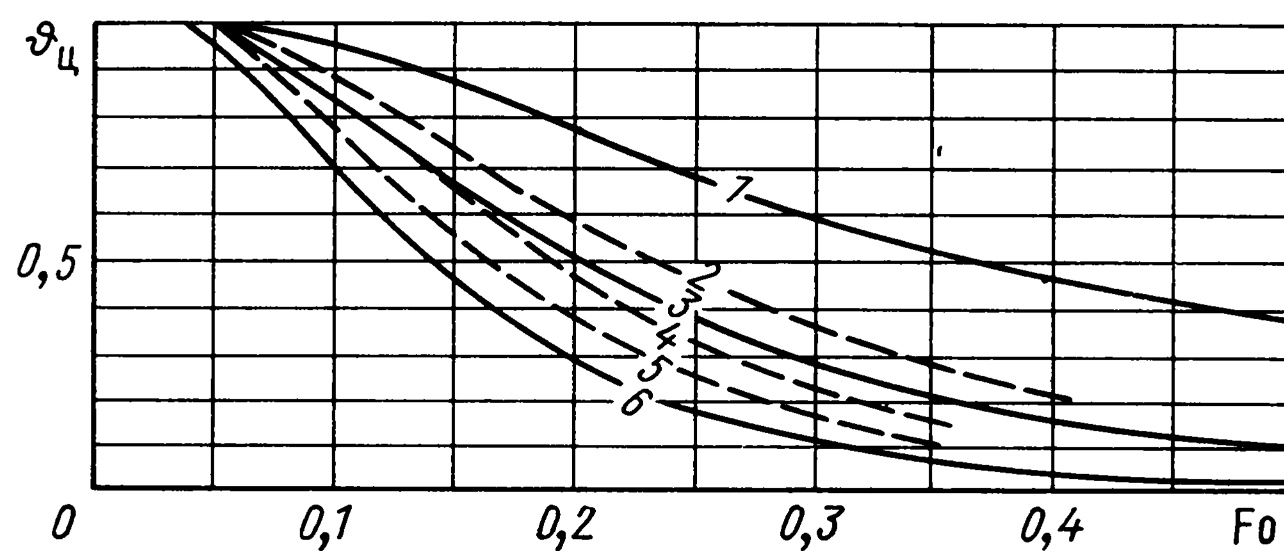
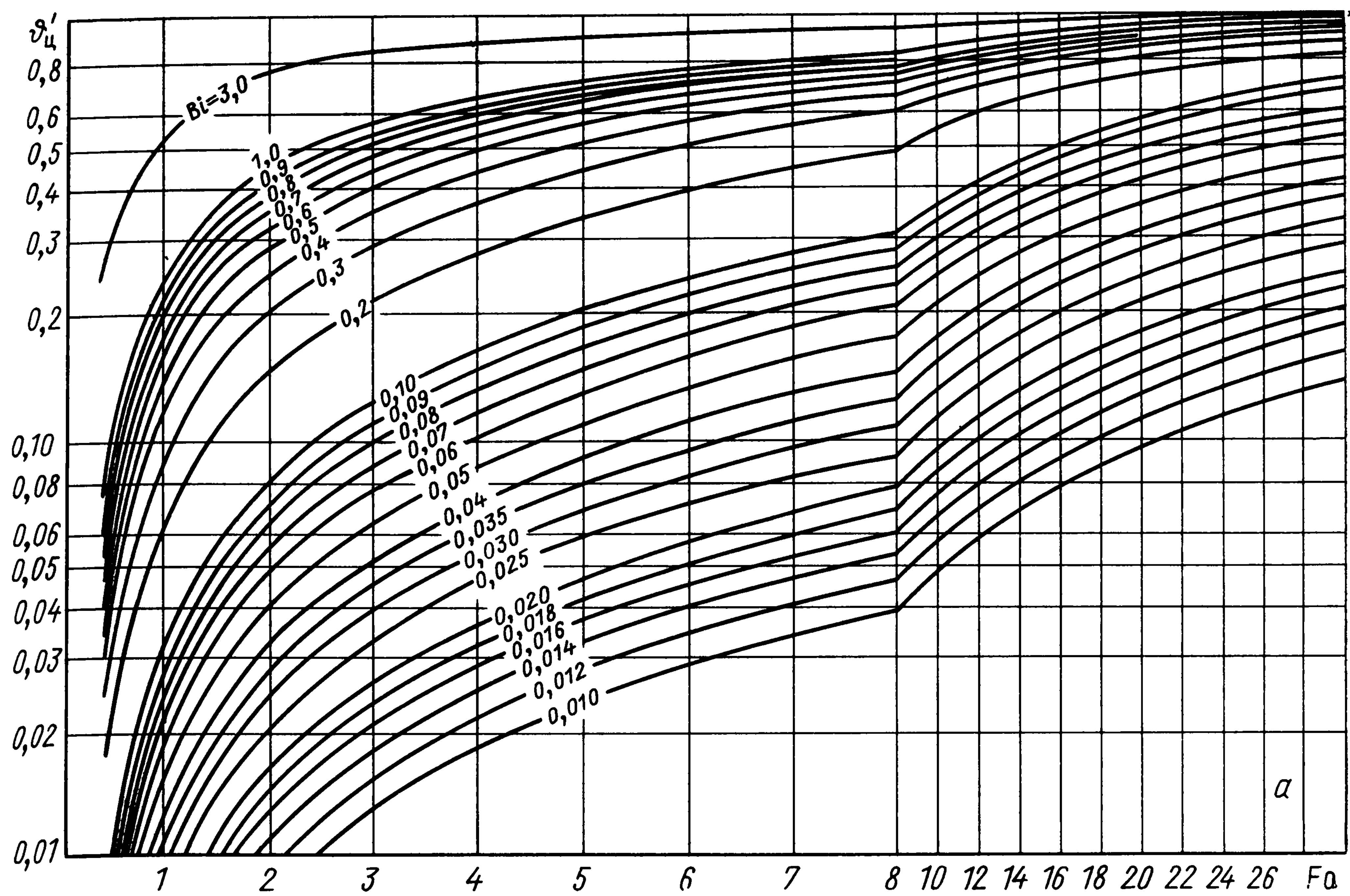



Рис. 8.3. Температура в центре или на оси некоторых тел при $T_0$=const, $\delta = R_0$ и Bi=∞:

*1* — неограниченная плита; *2* — бесконечно длинная квадратная балка; *3* — бесконечно длинный цилиндр; *4* — куб; *5* — цилиндр с высотой, равной диаметру; *6* — шар


$\vartheta'_ц$
0,8
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,10
0,08
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
Bi=3,0
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,10
0,09
0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,035
0,030
0,025
0,020
0,018
0,016
0,014
0,012
0,010
a
1 2 3 4 5 6 7 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 Fo

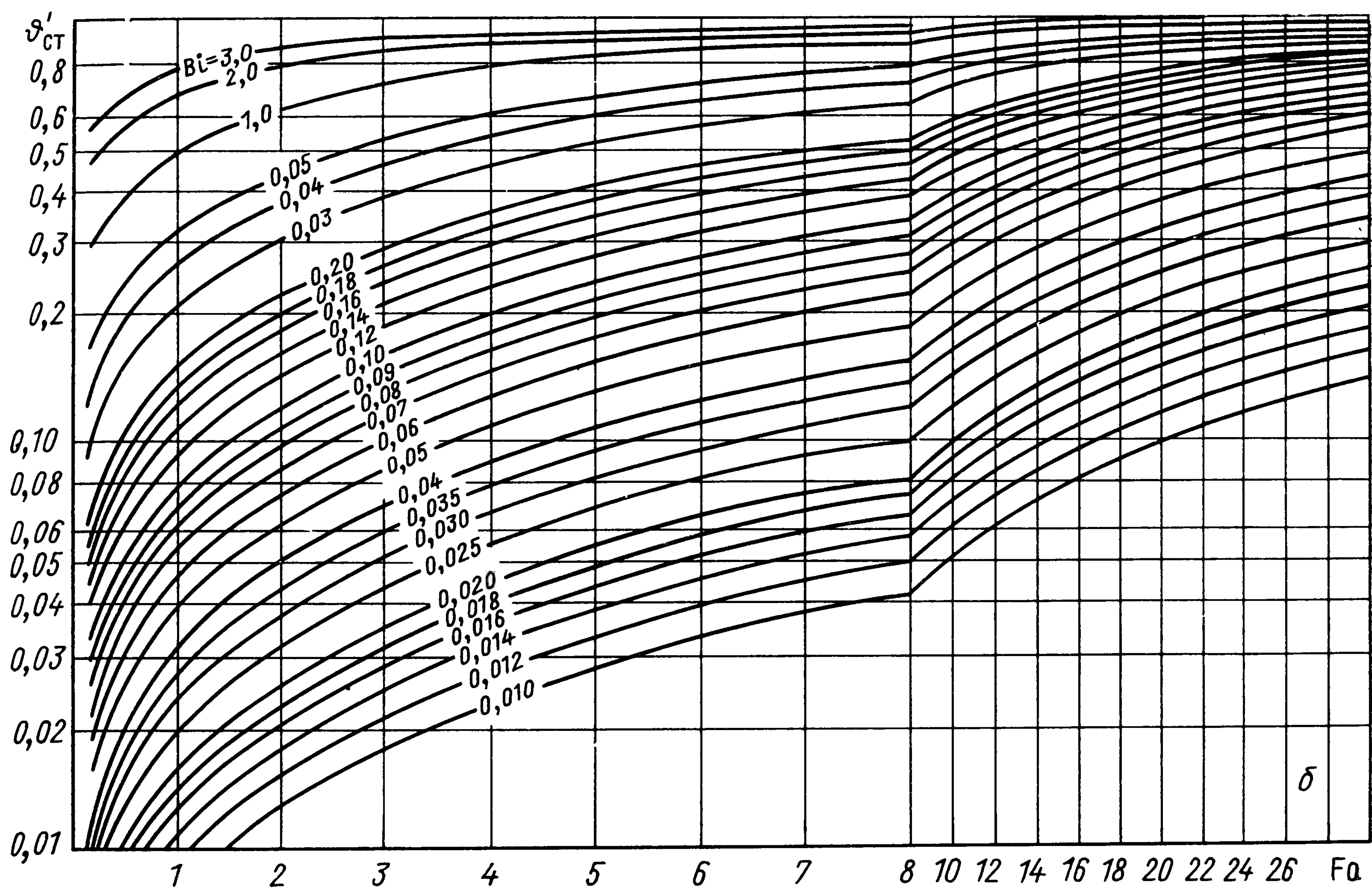
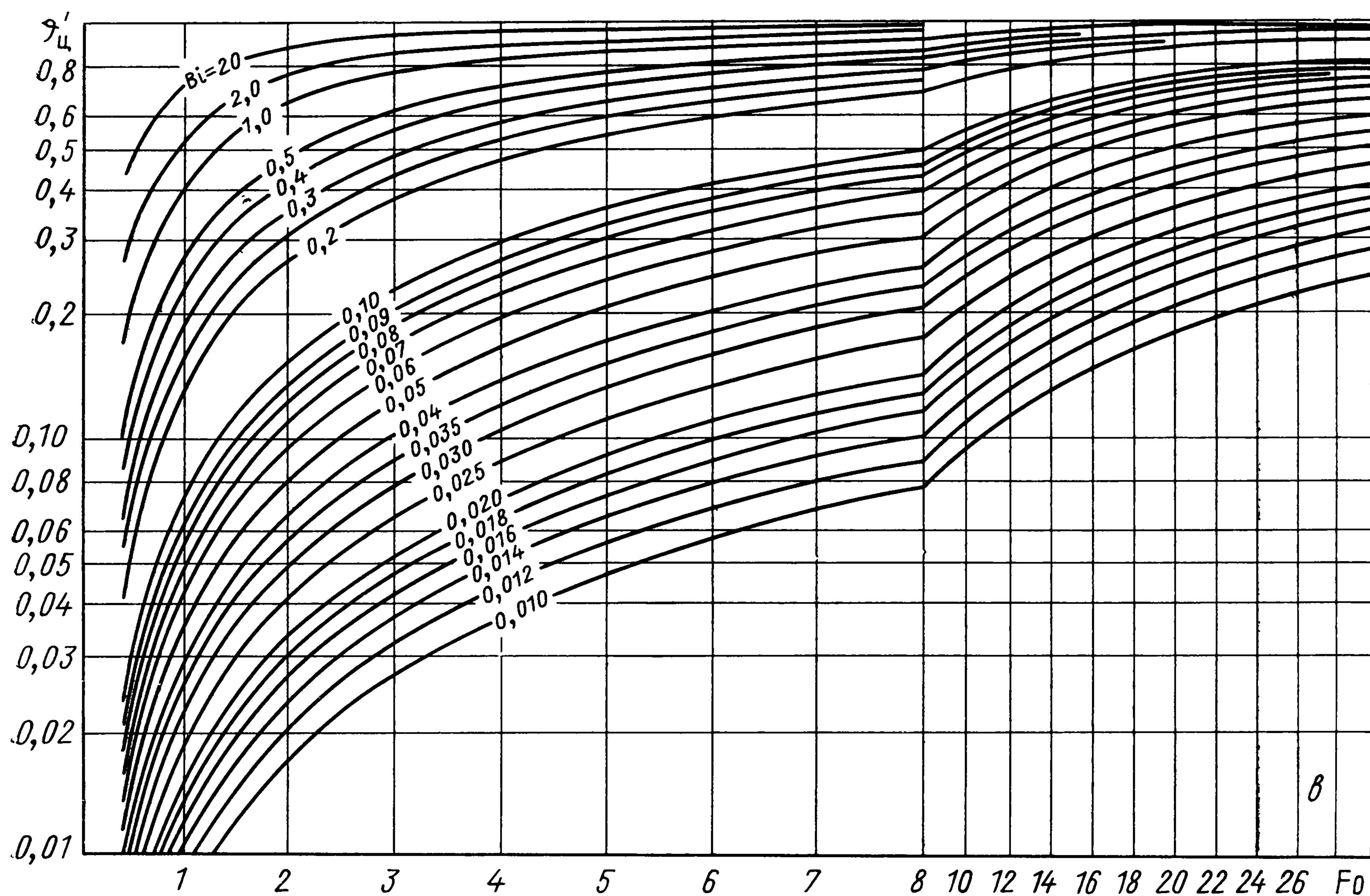
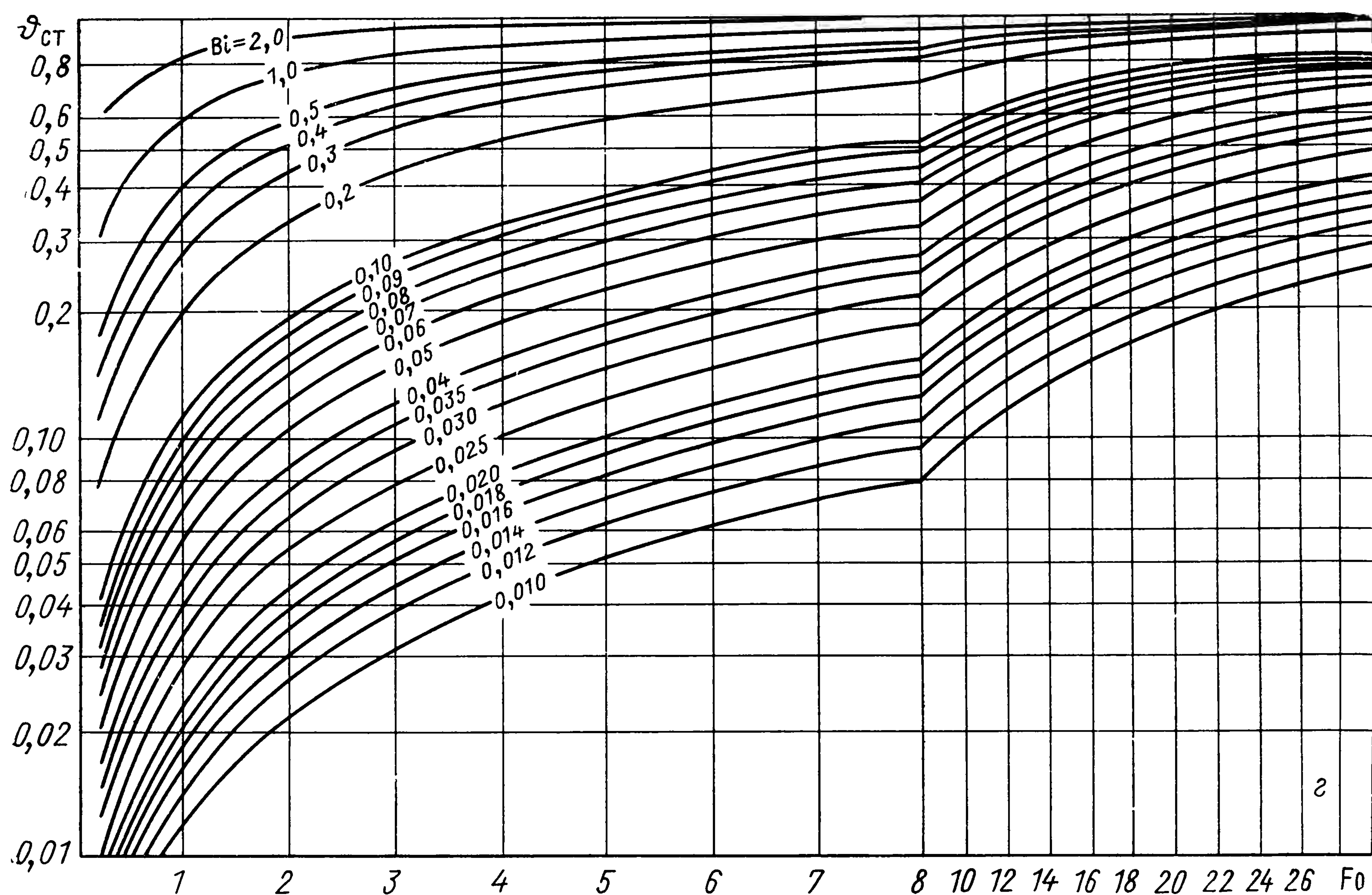

$\vartheta'_{ст}$
0,8
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,10
0,08
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
Bi=3,0
2,0
1,0
0,05
0,04
0,03
0,20
0,18
0,16
0,14
0,12
0,10
0,09
0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,035
0,030
0,025
0,020
0,018
0,016
0,014
0,012
0,010
б
1 2 3 4 5 6 7 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 Fo

Рис. 8.4. *а, б*

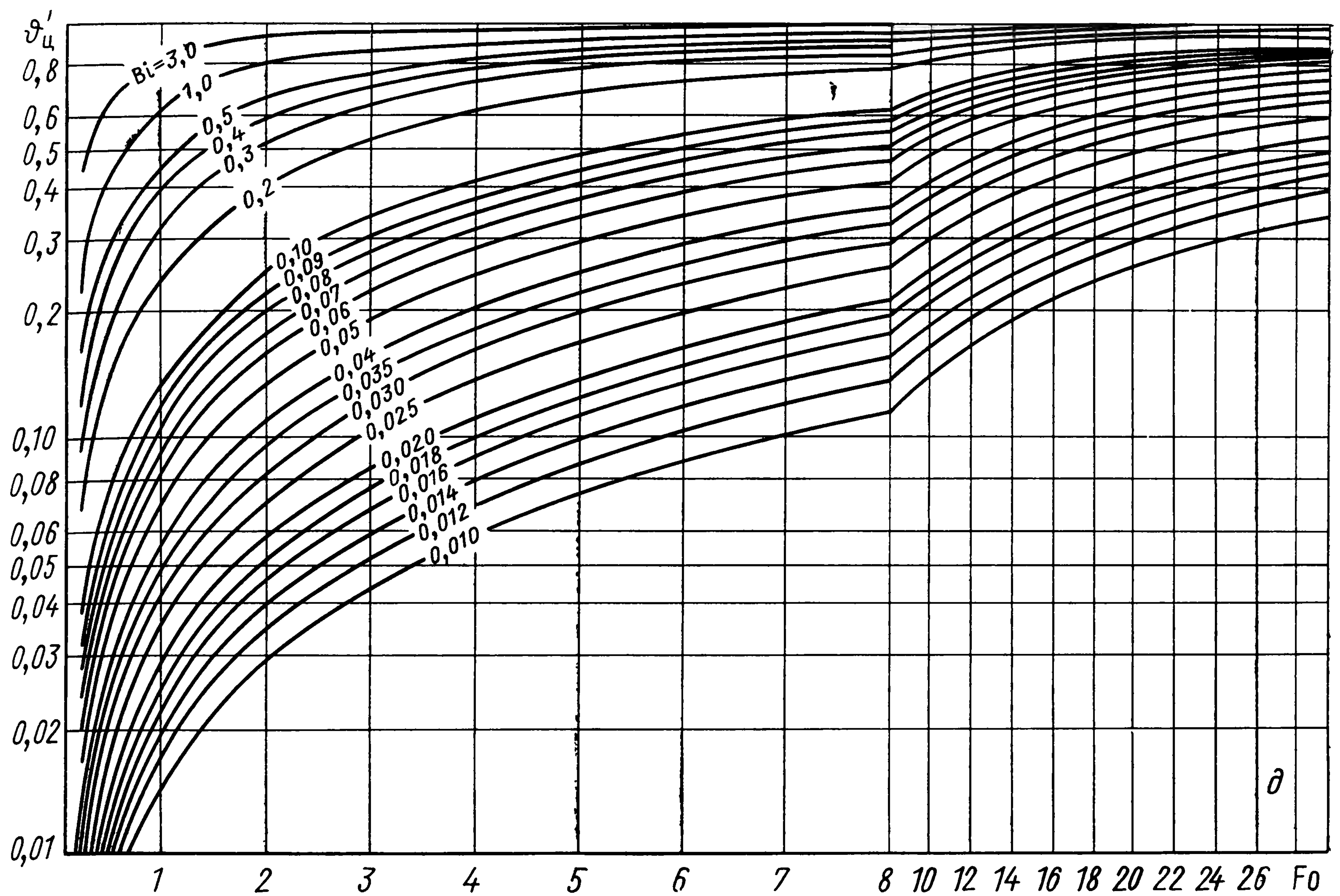


$\vartheta'_ц$
Bi=20
2,0
1,0
0,5
0,4
0,3
0,2
0,10
0,09
0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,035
0,030
0,025
0,020
0,018
0,016
0,014
0,012
0,010
в
Fo

$\vartheta_{ст}$
Bi=2,0
1,0
0,5
0,4
0,3
0,2
0,10
0,09
0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,035
0,030
0,025
0,020
0,018
0,016
0,014
0,012
0,010
г
Fo


Рис. 8 4 *в, г*



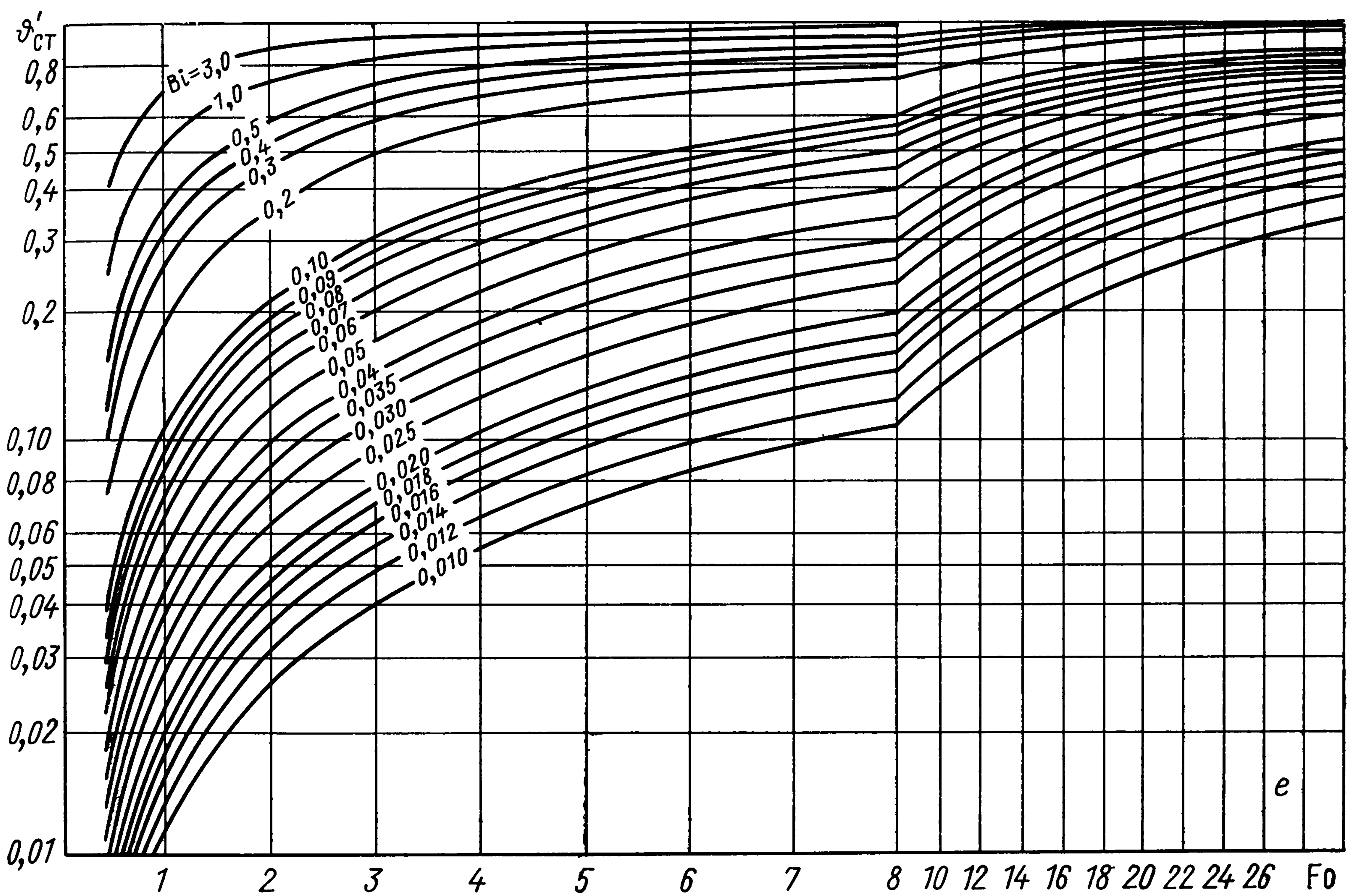
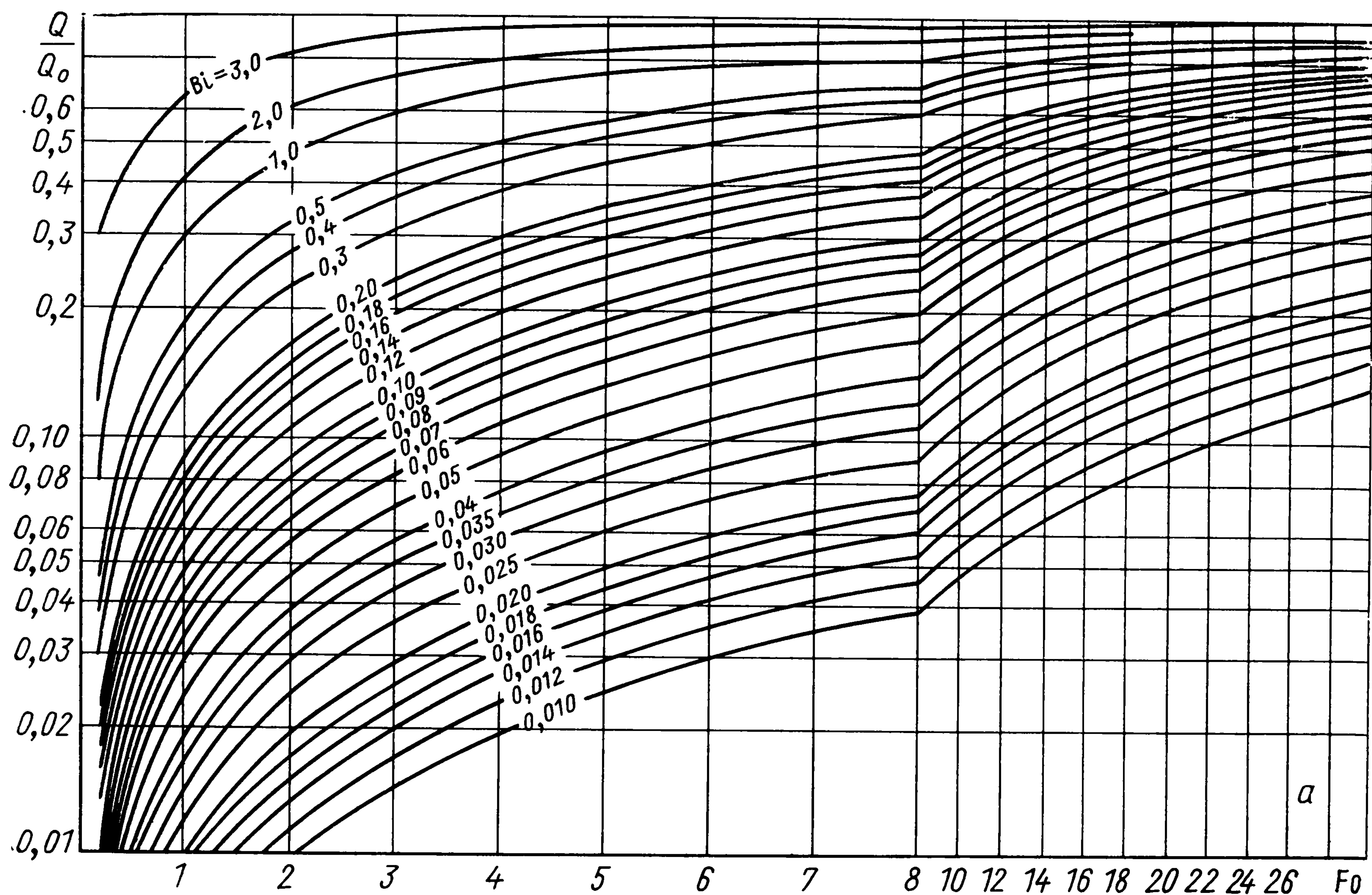
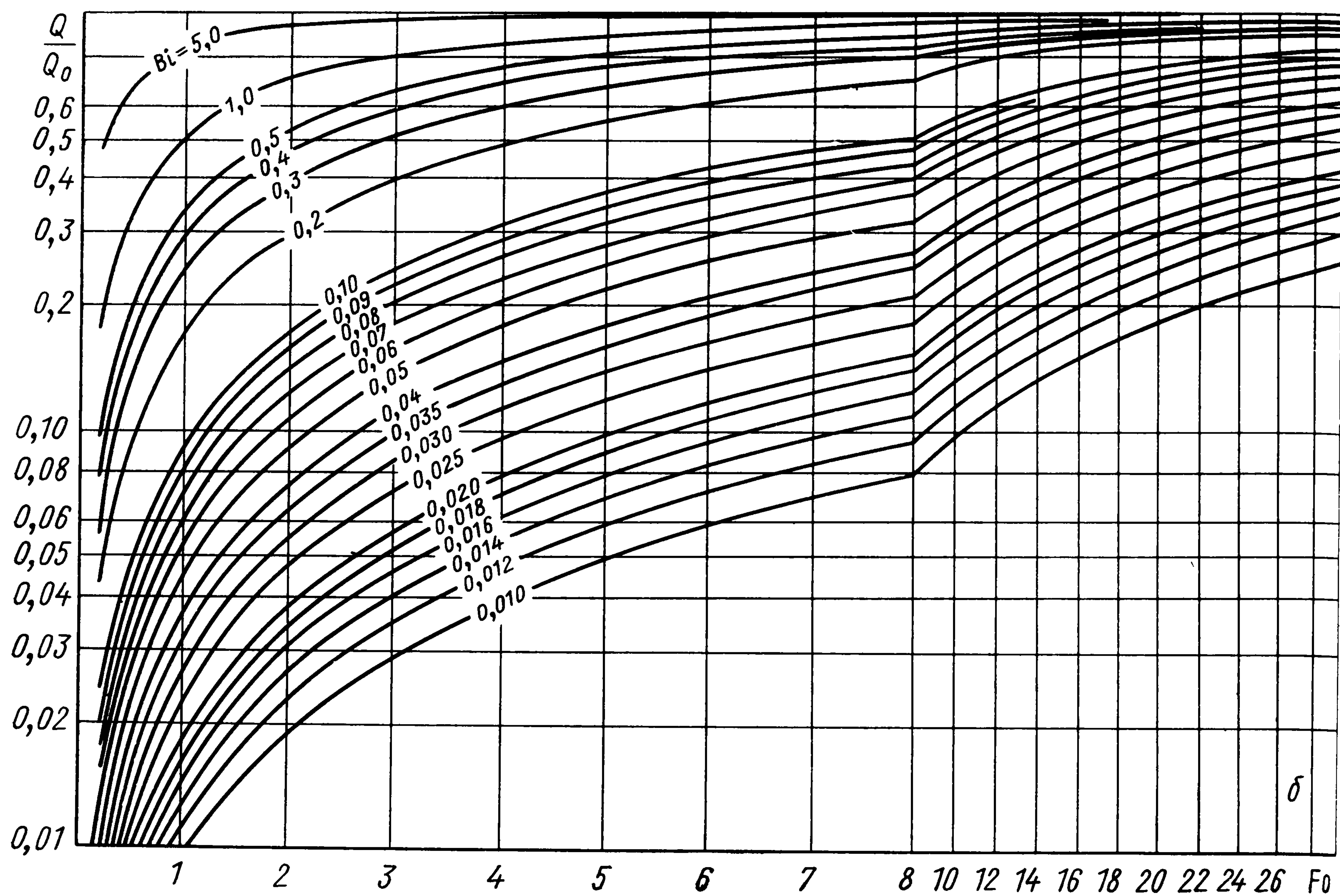




Рис. 8.4. Определение температуры в зависимости от Fo и Bi при $T_0=T_{00}+bt$ в средней плоскости (*а*) и на поверхности пластины (*б*); на оси (*в*) и на поверхности цилиндра (*г*); в центре (*д*) и на поверхности шара (*е*)



Q/Q₀
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,10
0,08
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
Bi=3,0
2,0
1,0
0,5
0,4
0,3
0,20
0,18
0,16
0,14
0,12
0,10
0,09
0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,035
0,030
0,025
0,020
0,018
0,016
0,014
0,012
0,010
a
1
2
3
4
5
6
7
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
Fo

Q/Q₀
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,10
0,08
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
Bi=5,0
1,0
0,5
0,4
0,3
0,2
0,10
0,09
0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,035
0,030
0,025
0,020
0,018
0,016
0,014
0,012
0,010
б
1
2
3
4
5
6
7
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
Fo


Рис. 8.5 *а, б*

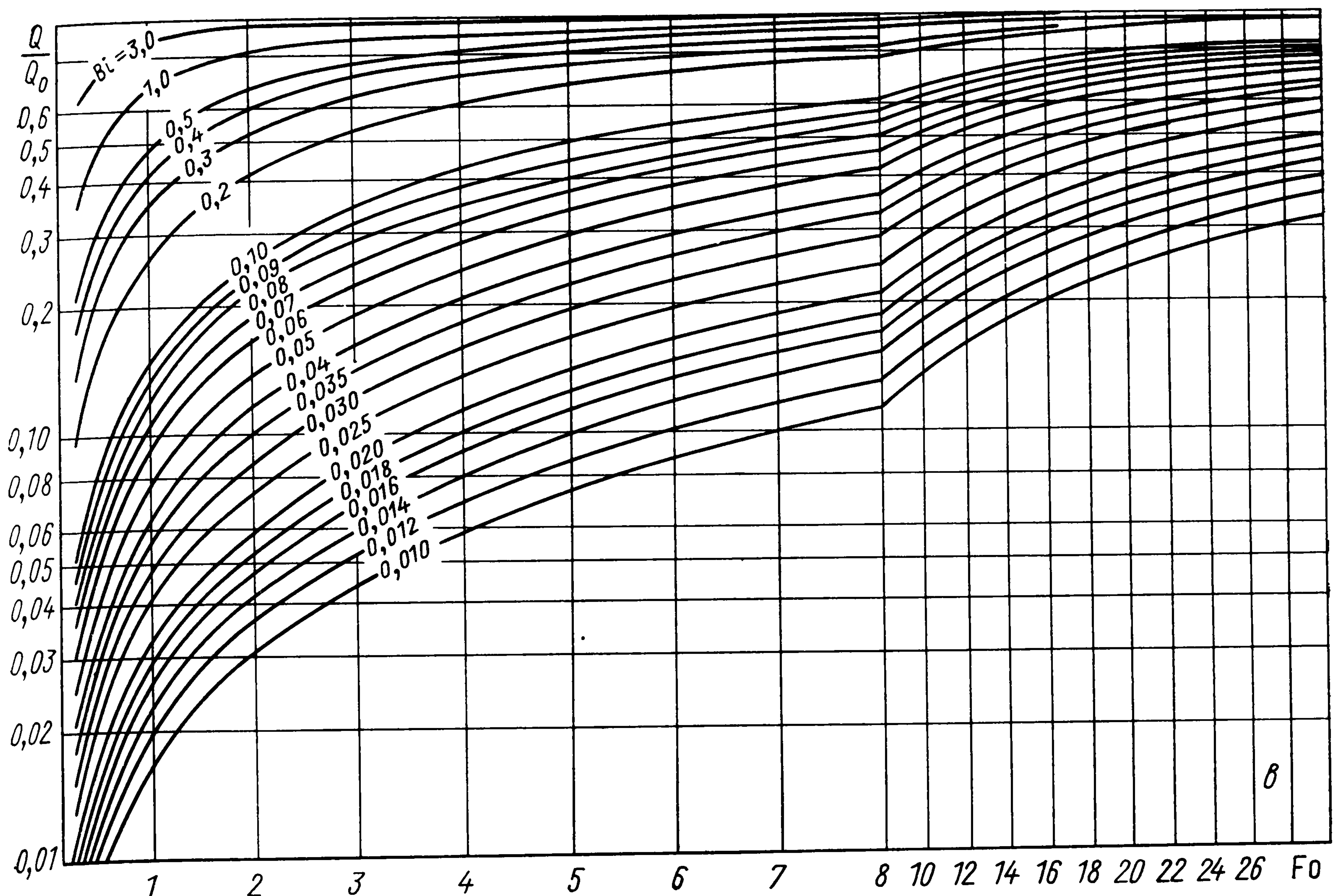



Рис. 8.5. Определение тепловых потерь в зависимости от Fo и Bi при $T_0 = T_{00} + bt$ пластины (*а*), цилиндра (*б*) и шара (*в*)

В этом случае в качестве масштаба разности температур целесообразно выбрать разность температур среды в моменты времени $t$ и в начале процесса. Тогда выражение для безразмерной температуры в данный момент времени в данной точке тела можно записать в виде

$$\vartheta' = \frac{T(x;\ t) - T_{00}}{T_0 - T_{00}} = \frac{T - T_{00}}{bt}. \qquad (8.5.2)$$

Безразмерное температурное поле будет описываться тогда некоторой функцией

$$\vartheta' = \vartheta'(x/\delta;\ \mathrm{Bi};\ \mathrm{Fo}). \qquad (8.5.3)$$

В задачах такого рода весьма эффективным оказывается решение уравнения теплопроводности операторным методом. Подробное изложение такого рода решений задач нестационарной теплопроводности дано в монографии А. В. Лыкова. Для рассматриваемого здесь случая соответствующее решение имеет вид

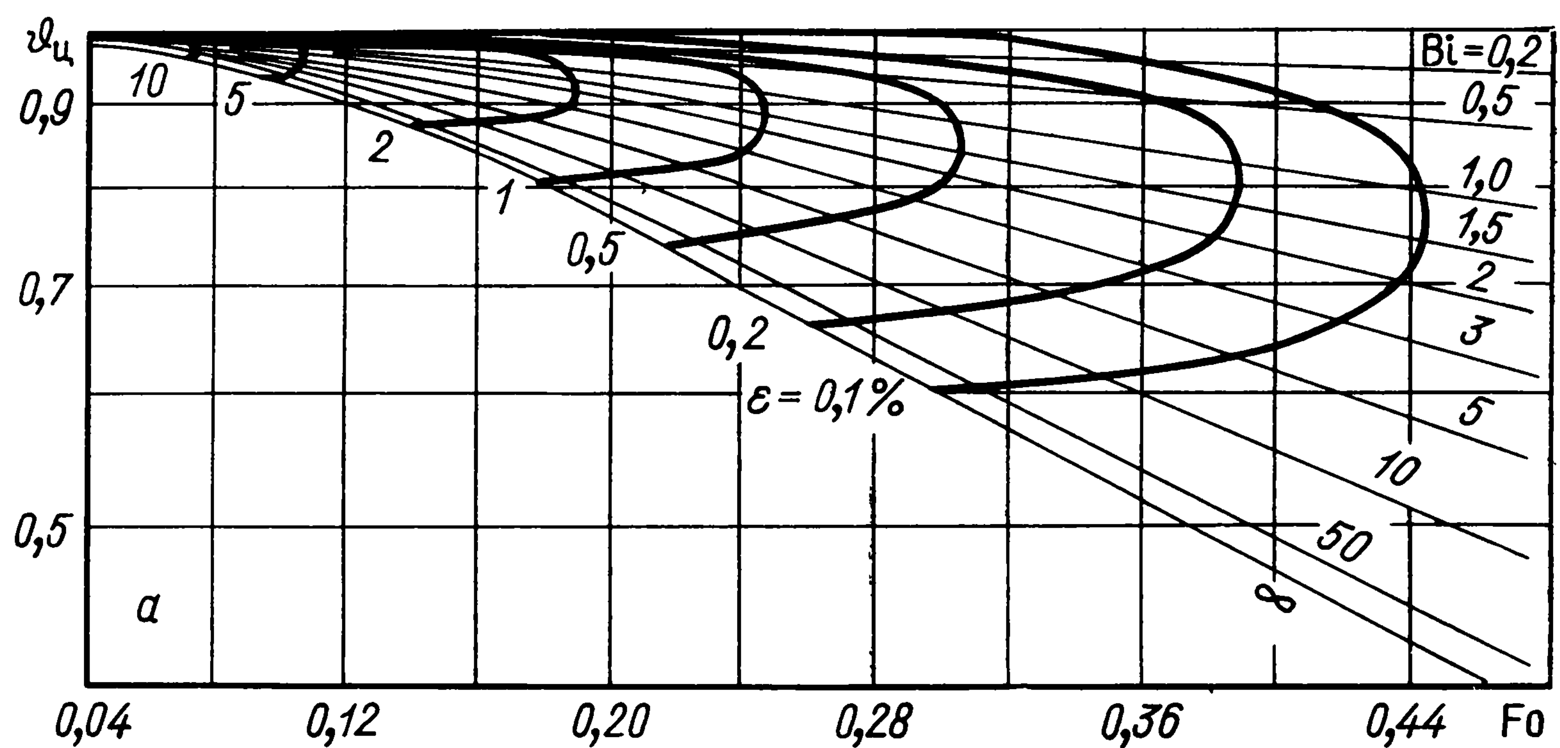
$$\vartheta' = 1 - \frac{1}{2\mathrm{Fo}}\left[1 + \frac{2}{\mathrm{Bi}} - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right] +$$
$$+ \frac{2}{\mathrm{Fo}} \sum \frac{\sin\beta_i \cos(\beta_i x/\delta)}{\beta_i^3 + \beta_i^2 \sin\beta_i \cos\beta_i} \exp(-\beta_i^2\,\mathrm{Fo})\ (1 \leqslant i \leqslant \infty). \qquad (8.5.4)$$

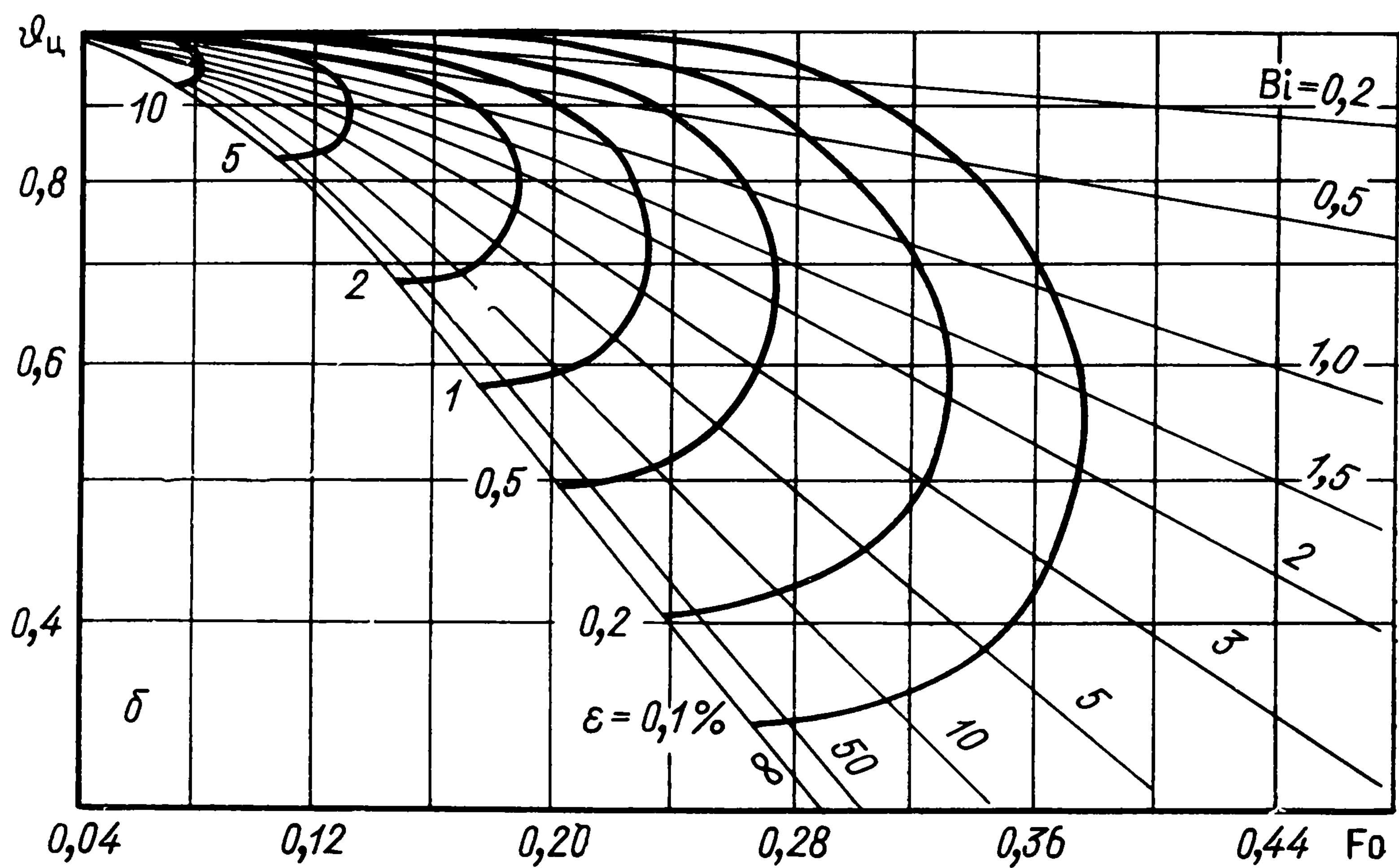
На рис. 8.4 приведены графики для определения температуры на поверхности и в центре тела, а на рис. 8.5 — соответствующих потерь тепла, составленные автором и А. А. Винниковым для условий прогрева или охлаждения по уравнению (8.5.1).

## 8.6. РЕГУЛЯРНЫЙ РЕЖИМ ОХЛАЖДЕНИЯ

Как было выяснено выше, закон охлаждения тел различной формы может быть выражен рядом

$$\vartheta = \sum C_i\,\psi(\beta_i\,\xi) \exp(-\beta_i^2\,\mathrm{Fo})\ (1 \leqslant i \leqslant \infty) \qquad (8.6.1)$$



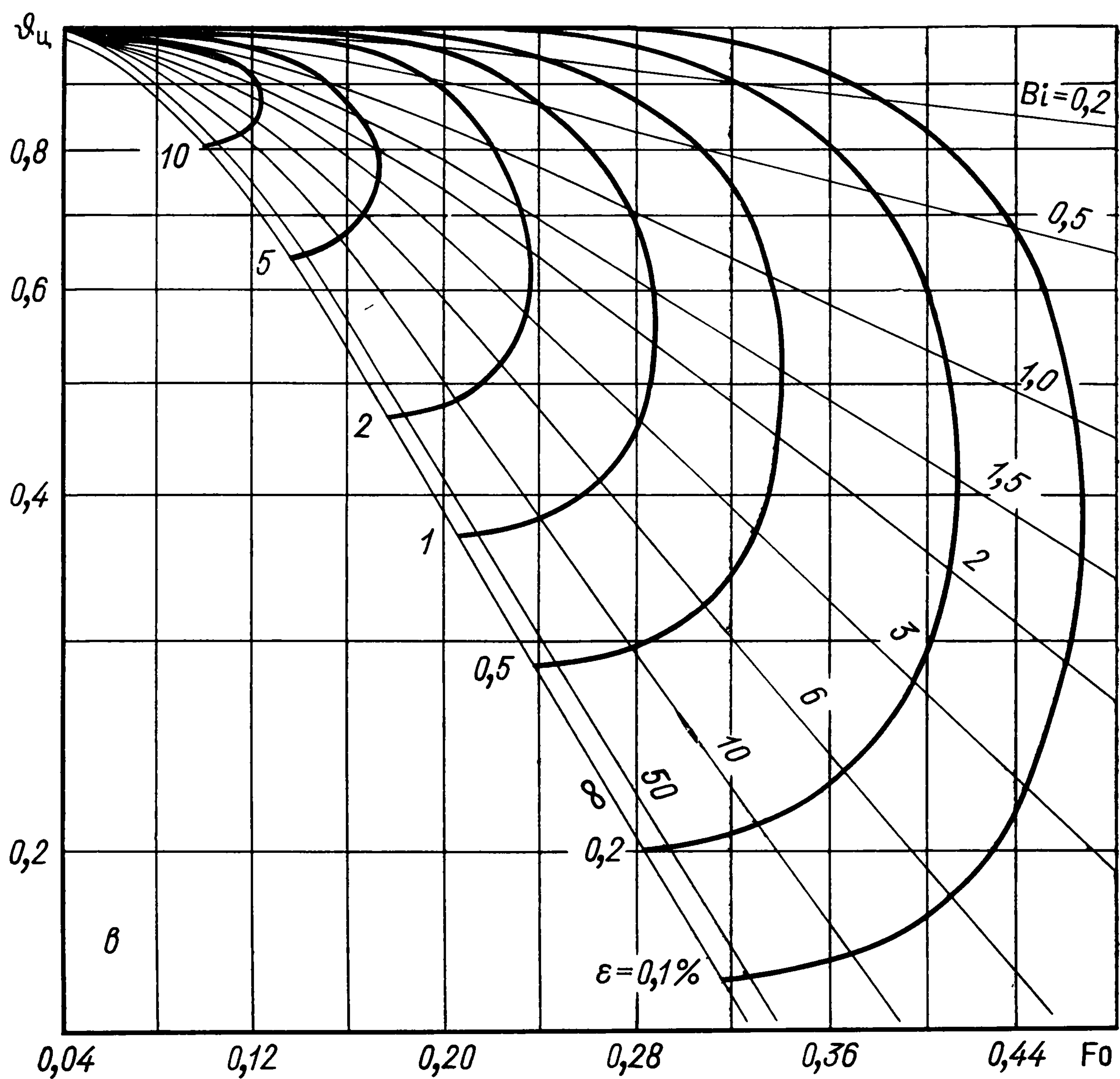




Рис. 8.6. Определение коэффициента ε по формуле (8.6.4) для пластины (*а*), бесконечно длинного цилиндра (*б*) и цилиндра с высотой, равной радиусу (*в*)

где коэффициенты $\beta_i$ быстро возрастают с увеличением номера члена ряда. Поэтому чем больше время охлаждения, т. е. чем больше критерий Fo, тем меньше значение старшего члена ряда по сравнению с предшествующими. В конце концов, после некоторого значения Fo все члены ряда становятся пренебрежимо малыми по сравнению с первым членом, т. е. через определенный промежуток времени закон охлаждения с большой степенью точности может быть выражен одночленной формулой

$$\vartheta = C_1 \psi(\beta_1 \xi) \exp(-\beta_1^2 \mathrm{Fo}). \quad (8.6.2)$$

Логарифмируя это выражение, получаем

$$\ln \vartheta = \ln [C_1 \psi(\beta_1 \xi)] - \beta_1^2 \mathrm{Fo}. \quad (8.6.3)$$

Таким образом, в координатах $\ln \vartheta$, Fo (полулогарифмическая анаморфоза) закон охлаждения при больших значениях Fo выражается прямой линией. Соответствующая прямая должна также получаться, если откладывать не безразмерные величины, а непосредственно $\ln \Delta T$ и $t$, где $\Delta T = T - T_0$.

Режим охлаждения, определяемый формулой (8.6.2), называется регулярным (упорядоченным). Степенью регуляризации температурного режима тела можно назвать отклонение температуры, определенной по формуле (8.6.2), от истинной температуры, определенной по формуле (8.6.1):

$$\varepsilon = 1 - \frac{\Sigma C_i \psi(\beta_i \xi) \exp(-\beta_i^2 \mathrm{Fo})}{C_1 \psi(\beta_1 \xi) \exp(-\beta_1^2 \mathrm{Fo})} \quad (1 \leqslant i \leqslant \infty). \quad (8.6.4)$$

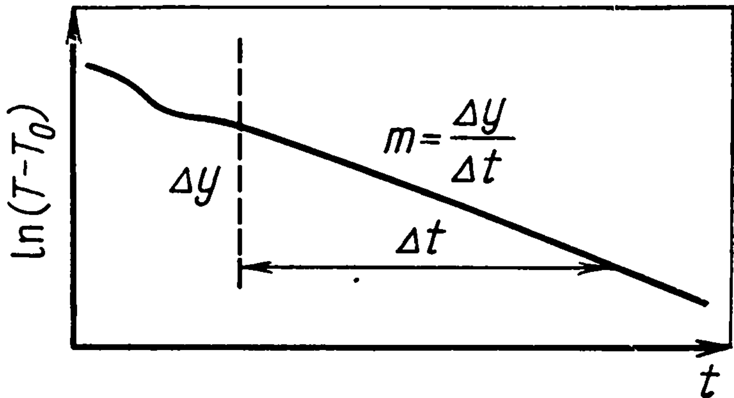



Рис. 8.7. Схема графика для определения темпа охлаждений

На рис. 8.6 приведены составленные Д. В. Будриным и Е. Л. Сухановым графики для определения значения $\varepsilon$ при изменении температуры центра различных тел.

Темпом изменения температуры в данной точке тела можно назвать величину

$$m = \frac{\ln(T_1 - T_0) - \ln(T_2 - T_0)}{t_2 - t_1}. \quad (8.6.5)$$

Здесь $T_1$ и $T_2$ — температуры в данной точке тела в моменты времени $t_1$ и $t_2$; $T_0$ — постоянная температура окружающей среды (рис. 8.7).

Из формулы (8.6.3) следует, что в регулярном режиме темп изменения температуры

$$m = \beta^2 a / l_0^2, \quad (8.6.6)$$

т. е. является одним и тем же для всех точек данного тела.

При $\mathrm{Bi} \to \infty$ $\beta_1 \to \beta_{1\,\text{макс}}$, где значение $\beta_{1\,\text{макс}}$ зависит только от геометрической формы тела. Следовательно, величину

$$K = (l_0 / \beta_{1\text{макс}})^2 \quad (8.6.7)$$

можно назвать коэффициентом формы при регулярном режиме нагрева или охлаждения тела. Для рассмотренных ранее трех канонических тел этот коэффициент определяется первым числом табл. 8.1—8.3 (табл. 8.4)

Эффективные методы исследования тепловых свойств веществ методом регулярного режима были созданы Г. М. Кондратьевым.

Таблица 8.4

**Коэффициент формы некоторых тел**

| Форма тела | Характерный линейный размер $l_0$ | $\beta_{1\text{макс}}$ | $K$ |
|---|---|---|---|
| Протяженная пластина | Полутолщина $\delta$ | $\pi/2$ | $4(\delta/\pi)^2$ |
| Протяженный цилиндр | Радиус $R_0$ | 2,405 | $0,173 R_0^2$ |
| Шар | Радиус $R_0$ | $\pi$ | $(R_0/\pi)^2$ |

## 8.7. ОХЛАЖДЕНИЕ ВЫСОКОТЕПЛОПРОВОДНОГО ТЕЛА

Элементарным с точки зрения анализа, но практически важным является случай изменения температуры весьма теплопроводного тела. Из уравнения

$$\nabla^2 T = \frac{c\rho}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{8.7.1}$$

следует, что при $\lambda \to \infty$ температура во всех точках тела всегда одна и та же. Этому условию практически соответствуют прогрев и охлаждение тонких металлических изделий.

Тепловой баланс тела можно записать в виде уравнения

$$c\rho V dT = \alpha F (T - T_0) \, dt. \tag{8.7.2}$$

Интегрируя, получаем

$$\ln \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = -\frac{\alpha F}{c\rho V} t, \tag{8.7.3}$$

где $T_1$ — начальная температура тела.

Таким образом, режим охлаждения тела с бесконечно большой теплопроводностью всегда является регулярным.

Формула (8.7.3) применяется для вычисления изменения температуры в высокотеплопроводных деталях электрических машин и т. п. Покажем это на примере расчета вращающегося металлического регенератора. Такого рода регенераторы выполняются из тонких стальных листов, вращающихся на оси и попеременно проходящих через охлаждаемую и нагреваемую среды. При этом средой практически омываются обе стороны листов.

Если периоды прохождения листов через обе среды одни и те же, то время одного периода $t = 1/2n$, где $n$ — число оборотов регенератора. Если отсеки регенераторов неодинаковы, т. е. в области нагрева находится поверхность $F_1$, а в области охлаждения $F_2$, то время пребывания в первом отсеке $t_1 = F_1/Fn$, а время пребывания во втором отсеке $t_2 = F_2/Fn$. Здесь $F = F_1 + F_2$ — полная поверхность регенератора.

По формуле (8.7.3) средняя температура металла в момент выхода из области подогрева

$$\overline{T}_{II} = \overline{T}_1 - (\overline{T}_1 - \overline{T}_I) \exp\left(\frac{-2\alpha_1 F_1}{c\rho\delta F n}\right). \tag{8.7.4}$$

В момент входа в область подогрева (выхода из области охлаждения) средняя температура металла

$$\overline{T}_I = \overline{T}_2 - (\overline{T}_2 - \overline{T}_{II}) \exp\left(-\frac{2\alpha_1 F_2}{c\rho\delta F n}\right). \tag{8.7.5}$$

Здесь $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — коэффициенты теплоотдачи от среды к металлу в области нагрева и охлаждения; $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$ — средние температуры греющей и нагреваемой сред; $\delta$ — толщина листов, из которых составлена поверхность регенератора; $c\rho$ — объемная теплоемкость металла. Решая эти уравнения в отношении средней температуры металла на входе в область подогрева, находим

$$\overline{T}_I = \overline{T}_1 - (\overline{T}_1 - \overline{T}_2) \frac{1 - \exp(-m_2)}{1 - \exp[-(m_1 + m_2)]}, \tag{8.7.6}$$

где

$$m_1 = 2\alpha_1 F_1 / c\rho F \delta n \quad \text{и} \quad m_2 = 2\alpha_2 F_2 / c\rho F \delta n.$$

Во всех этих формулах под величинами $F_1$ и $F_2$ понимается полная поверхность соприкосновения листов регенератора с соответствующей средой, т. е. при двустороннем омывании металла учитываются обе стороны листов.

Количество тепла, приобретаемое металлом от греющей среды и отдаваемое нагреваемой среде в единицу времени

$$Q=\alpha_1 F_1(\overline{T}_1-T_{\text{м}}), \qquad (8.7.7)$$

где $\overline{T}_{\text{м}}=(1/t_1)\int\limits_0^{t_1} T_{\text{м}}dt$ — средняя температура металла за время пребывания в области нагрева. Подставляя в это выражение значения

$$\left.\begin{aligned} T_{\text{м}}&=\overline{T}_1-(\overline{T}_1-\overline{T}_{\text{I}})\exp\left(-\frac{2\alpha_1}{c\rho\delta}t\right);\\ t_1&=F_1/Fn, \end{aligned}\right\} \qquad (8.7.8)$$

получаем

$$Q=nF\alpha_1(\overline{T}_1-\overline{T}_{\text{I}})\int\limits_0^{F_1/Fn}\exp\left(-\frac{2\alpha_1}{c\rho\delta}t\right)dt. \qquad (8.7.9)$$

Интегрирование дает

$$Q=2c\rho\delta Fn(\overline{T}_1-\overline{T}_{\text{I}})[1-\exp(-m_1)]=$$

$$=2c\rho\delta Fn(\overline{T}_1-\overline{T}_2)\times$$

$$\times\frac{[1-\exp(-m_1)][1-\exp(-m_2)]}{1-\exp[-(m_1+m_2)]}. \qquad (8.7.10)$$

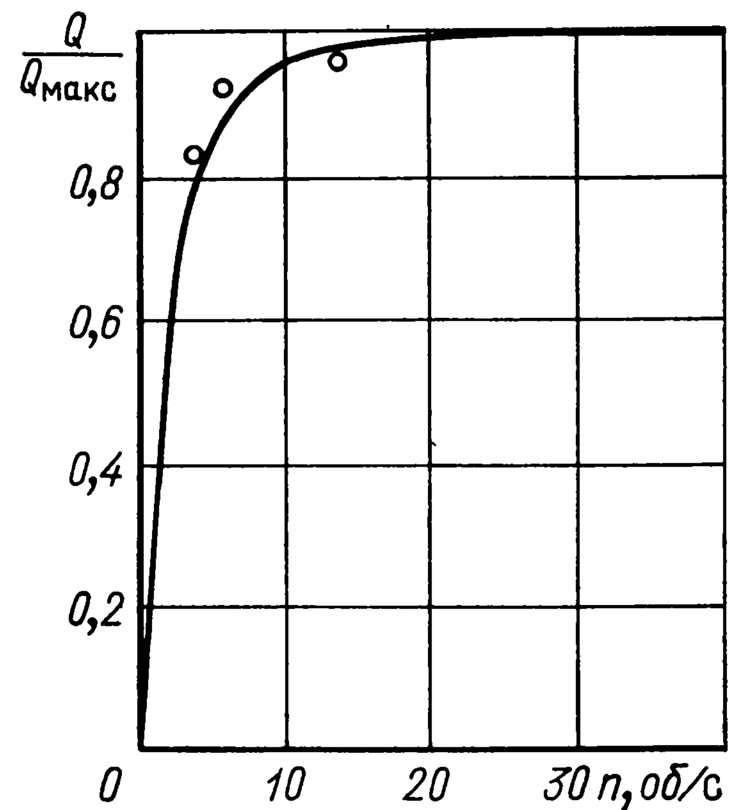



Рис. 8.8. Зависимость теплопроизводительности одного из типов вращающегося регенератора от числа оборотов:
○ — опыт; —— расчет

Раскрывая неопределенности, возникающие при $n\to\infty$, находим, что наибольшее количество тепла, передаваемого в регенераторе от горячей среды к холодной,

$$Q_{\text{макс}}=\frac{\alpha_1 F_1\alpha_2 F_2}{\alpha_1 F_1+\alpha_2 F_2}(\overline{T}_1-\overline{T}_2). \qquad (8.7.11)$$

Практически величина $Q_{\text{макс}}$ достигается при сравнительно небольшой скорости вращения, что видно из графика, приведенного на рис. 8.8.

Преобразуя несколько формулу (8.7.11), получаем

$$Q_{\text{макс}}=\frac{F_1(\overline{T}_1-\overline{T}_2)}{1/\alpha_1+F_1/\alpha_2 F_2}. \qquad (8.7.12)$$

Так как $F_1$ представляет собой поверхность части регенератора, омываемой горячей средой, то отсюда видно, что наибольший теплообмен в регенеративном подогревателе равен количеству тепла, передаваемому через стенку в обычном подогревателе с поверхностью $F=F_1$ и коэффициентом теплопередачи

$$k=(1/\alpha_1+F_1/\alpha_2 F_2)^{-1}. \qquad (8.7.13)$$

Отношение $F_2/F_1$ можно рассматривать как коэффициент оребрения в обыкновенном подогревателе. Этот коэффициент уменьшает термическое сопротивление с той стороны, где коэффициент теплоотдачи ниже.

Таким образом, выгода регенеративного аппарата заключается в его конструктивном преимуществе — компактности и возможности перераспределения поверхности нагрева в соответствии с соотношением коэффициентов теплоотдачи греющей и нагреваемой сред.

## 8.8. ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ

В ряде процессов, происходящих в аппаратах, в частности в двигателях, совершается периодическое повторение рабочего цикла, в продолжение которого температура рабочей среды и корпуса двигателя меняется по определенному закону. При этом имеет место периодическое изменение температурного поля. Закон этого изменения уже не зависит от начального состояния системы, а определяется периодической функцией времени.

На рис. 8.9 представлены температурные графики различного рода периодически повторяющихся тепловых процессов. Периодическую функцию можно представить с помощью гармонического анализа в виде суммы различных косинусоид.

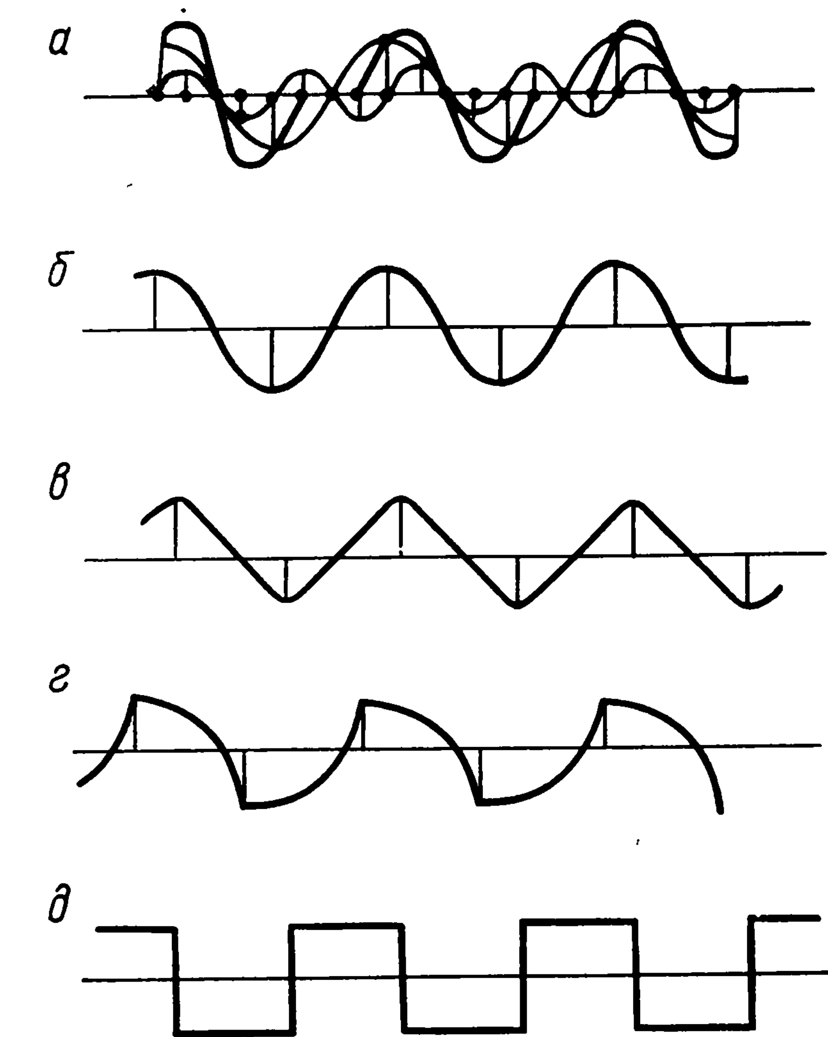



Рис. 8.9. Температурные графики некоторых периодических процессов:

*а* — сложный гармонический; *б* — синусоидальный; *в* — треугольный; *г* — пилообразный; *д* — цилиндр (ступенчатый)

Начальное состояние тела в рассматриваемом случае уже не имеет значения, так как предполагается, что периодический процесс совершается достаточно длительное время, т. е. состоит из большого числа отдельных периодов (циклов).

При периодически меняющейся температуре на поверхности тела общий интеграл уравнения теплопроводности можно также разыскивать в виде произведения двух функций (8.2.1). Однако в этом случае уже нельзя представлять $\varphi$ (Fo) в виде экспоненциальной функции с вещественным коэффициентом $\beta$. Необходимо выбрать такую функцию, которая изображала бы периодическое изменение температуры во всех точках рассматриваемого тела. Такому требованию удовлетворяет функция

$$\varphi(\mathrm{Fo}) = \exp(\mathrm{i}\beta^2\,\mathrm{Fo}), \qquad (8.8.1)$$

где $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

Соответствующая подстановка (8.8.1) в основное уравнение (8.1.1) приводит к уравнению

$$\nabla^2\psi - \mathrm{i}\beta^2\psi = 0, \qquad (8.8.2)$$

определяющему вид функции координат $\psi$.

Рассмотрим, следуя Г. Греберу, полуограниченное пространство, температура на поверхности которого под внешним воздействием претерпевает периодические гармонические колебания около нулевого значения.

Воспользовавшись известным преобразованием $\sqrt{-i} = \pm(1 - \mathrm{i})\sqrt{1/2}$, перепишем уравнение (8.8.2) в следующем виде:

$$\partial^2\psi/\partial x^2 - [\pm(1-\mathrm{i})\sqrt{(1/2)}\,\beta]^2\psi = 0. \qquad (8.8.3)$$

С помощью формулы $\exp(-\mathrm{i}\varphi) = \cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi$ частное решение уравнения теплопроводности, содержащее функцию времени в виде зависимости (8.8.1), приводится к сумме действительной и мнимой частей

$$\vartheta = \vartheta_1 + \mathrm{i}\vartheta_2, \qquad (8.8.4)$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= C_1 \exp(-\sqrt{1/2}\,\beta x/\delta)\cos(\beta^2\,\mathrm{Fo} - \sqrt{1/2}\,\beta x/\delta);\\ \vartheta_2 &= C_2 \exp(-\sqrt{1/2}\,\beta x/\delta)\sin(\beta^2\,\mathrm{Fo} - \sqrt{1/2}\,\beta x/\delta). \end{aligned} \qquad (8.8.5)$$

При экспоненте оставлен только знак минус, так как при положительном показателе степени колебания температуры возрастали бы по мере увеличения $x$, что физически невозможно.

Пусть температура на поверхности тела меняется по закону

$$\vartheta_0 = \vartheta_m \cos(2\pi t/t_0), \tag{8.8.6}$$

где $\vartheta_m$ — максимальная амплитуда колебания температуры на поверхности тела; $t_0$ — продолжительность периода колебания. Тогда постоянные интегрирования равны: $C_1 = \vartheta_m$; $C_2 = 0$; $\beta = 2\pi\delta^2/at_0$ и

$$\vartheta = \vartheta_m \exp(-x\sqrt{\pi/at_0}) \cos(x\sqrt{\pi/at_0} - 2\pi t/t_0). \tag{8.8.7}$$

Таким образом, возникает семейство тепловых волн с длиной порядка $x = \sqrt{2\pi a t_0}$. Тепловой поток через поверхность тела

$$Q = -\lambda F \int (\partial T/\partial x)_{x=0}\, dt. \tag{8.8.8}$$

При интегрировании этого уравнения за полный период результирующий тепловой поток равен нулю. Интегрирование за полупериод дает выражение

$$Q_{t=t_0/2} = \vartheta_m F \sqrt{\frac{2}{\pi} \lambda c \rho t_0}. \tag{8.8.9}$$

Это количество теплоты, которое за один полупериод аккумулируется телом, а во втором полупериоде отдается им окружающей среде.

Весьма подробно такого рода процессы рассмотрены в монографиях Гребера, Карслоу, А. В. Лыкова. Процессы нестационарной теплопроводности при перемещающихся поверхностных источниках тепла (что важно знать, например, в процессах сварки) рассмотрены в работе Н. Н. Рыкалина.

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*


1. **Гребер Г., Эрк С., Григулль У.** Основы учения о теплообмене. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
2. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. Пер. с англ. М., «Наука», 1964.
3. **Любимова Е. А.** Термика Земли и Луны. М., «Наука», 1968.
4. **Кондратьев Г. М.** Регулярный тепловой режим. М., Гостехтеориздат, 1954.
5. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. М., Гостехтеориздат, 1952.
6. **Лыков А. В., Михайлов Ю. А.** Теория тепло- и массопереноса. М., «Высшая школа», 1967.
7. **Пехович А. И., Жидких В. М.** Расчеты теплового режима твердых тел. Изд. 2-е, перераб. и доп. Л., «Энергия», 1976.
8. **Рыкалин Н. Н.** Расчеты тепловых процессов при сварке. М., Машгиз, 1951.
9. **Страхович К. И.** Некоторые задачи теплопроводности в твердых телах с переменными теплофизическими характеристиками. — «Инж.-физ. журн.», 1958, № 3, с. 3.

*Глава* 9

# ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

## 9.1. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Работа $L_V$ в основном уравнении теплопереноса (2.3.1) определяется формулой (3.3.5). Произведя соответствующую подстановку и замечая, что согласно уравнению сплошности (3.2.3) $(-p/\rho)(D\rho/dt) = p \operatorname{div} \overline{w}$, получаем

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q_V + \mu \operatorname{diss} F(\mathbf{w}) = \rho Di/dt - Dp/dt. \quad (9.1.1)$$

При отсутствии внутреннего источника тепла (теплота трения уже учтена введением функции рассеяния)

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \mu \operatorname{diss} F(\mathbf{w}) = \rho Di/dt - Dp/dt. \quad (9.1.2)$$

Для стационарного процесса при $q_V = 0$

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \mu \operatorname{diss} F(\mathbf{w}) = \rho(\mathbf{w}, \operatorname{grad} i) - (\mathbf{w}, \operatorname{grad} p). \quad (9.1.3)$$

Операторы $\operatorname{diss} F(\mathbf{w})$ и $Dp/dt$ пропорциональны квадрату скорости течения потока. Поэтому в области достаточно умеренных скоростей их значения малы по сравнению с двумя другими членами уравнения (9.1.2). В таком случае практически справедливо уравнение (2.3.2), которое при $q = 0$ примет вид

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \rho Di/dt. \quad (9.1.4)$$

## 9.2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ТЕПЛООТДАЧЕЙ И ТРЕНИЕМ

Рассмотрим уравнения теплопроводности и движения жидкости с постоянными физическими свойствами, скорость течения которой достаточно мала, чтобы пренебречь квадратичными членами указанных уравнений. В безразмерной форме эти уравнения имеют вид (6.5.3). При отсутствии внутреннего источника тепла и безнапорном течении

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \vartheta &= \partial\vartheta/\partial \mathrm{Fo} + \mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}(\omega, \operatorname{grad} \vartheta); \\ \nabla^2 \omega &= \mathrm{Pr}^{-1}\, \partial\omega/\partial \mathrm{Fo} + \mathrm{Re}(\omega, \operatorname{grad} \omega); \\ \operatorname{div} \omega &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (9.2.1)$$

Здесь $\vartheta = (T - T_0)/(T_{\text{ст}} - T_0)$ — безразмерная температура; $\omega = w/w_0$ — безразмерная скорость течения.

Легко заметить, что при условии $\mathrm{Pr} = 1$ уравнения теплопроводности и движения в (9.2.1) становятся тождественными относительно переменных $\vartheta$ и $\omega$, что означает тождество полей размерных величин $T$ и $w$ при подобным образом заданных краевых условиях.

На поверхности стенки в случае ее непроницаемости $\omega_{\text{ст}} = \vartheta_{\text{ст}} = 0$. По линии распределения $T_0$ и $w_0$ подобие граничных условий будет выполнено, если $(T_{\text{ст}} - T_0)_x/(T_{\text{ст}} - T_0)_0 = w_{0x}/w_{00} = f(x/l_0)$. Здесь $(T_{\text{ст}} - T_0)$ и $w_{0x}$ — текущие значения масштабов температурного напора и скорости $(T_{\text{ст}} - T_0)$ и $w_{00}$ — значения этих масштабов в сечении $x = 0$.

Условию $\mathrm{Pr} = 1$ с большой точностью соответствуют многоатомные газы приближенно другие газы, а также некоторые капельные жидкости в определенных интервалах температур (табл. 9.1, 9.2).

Течение в заполненных трубах является напорным, и, следовательно, если в этом случае и существует известное подобие профилей скоростей и температур, то оно является приближенным. Опыт показывает, что такое приближенное подобие имеет место только при развитом турбулентном течении среды с $\mathrm{Pr} = 1$ и при подобным образом заданных граничных условиях.

При наличии подобия полей температур и скоростей можно найти связь между коэффициентами теплоотдачи и трения, не прибегая к непосредственному интегрированию уравнения теплопроводности. Действительно, в некотором плоском потоке

$$\frac{q}{\tau}=\frac{(\lambda+\lambda_T)\,\partial T/\partial y}{(\mu+\mu_T)\,\partial w/\partial y}, \quad (9.2.2)$$

или

$$\frac{q}{\tau}=\frac{\lambda+\lambda_T}{\mu+\mu_T}\,\frac{T_{\text{ст}}-T_0}{w_0}\,\frac{\partial\vartheta/\partial\xi}{\partial\omega/\partial\xi}. \quad (9.2.3)$$

Таблица 9.1

**Число Pr для газов**

| Количество атомов в молекуле | Pr |
|---|---|
| 1 | ~0,66 |
| 2 | ~0,75 |
| 3 | ~0,84 |
| 4 и более | ~1 |

Таблица 92

**Число Pr для воды**

| $T$, °C | Pr |
|---|---|
| 100 | 1,75 |
| 160 | 1,10 |
| 170 | 1,05 |
| 180 | 1,00 |
| 200 | 0,93 |
| 250 | 0,86 |
| 310 | 1,02 |
| 320 | 1,11 |
| 350 | 1,60 |

Здесь $\mu_T$ и $\lambda_T$ — коэффициенты турбулентной вязкости и теплопроводности. Знак осреднения во времени над величинами $T$ и $w$ опущен. Если поля температур и скоростей подобны, то

$$\left.\begin{aligned}&\partial\vartheta/\partial\xi=\partial\omega/\partial\xi;\\&\lambda_T=c_p\,\mu_T.\end{aligned}\right\} \quad (9.2.4)$$

Последнее подобие непосредственно следует из уравнения (4.4.6). Но обязательным условием такого подобия является равенство единице числа Pr, когда $\lambda=c_p\mu$. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$q/\tau=c_p\,(T_{\text{ст}}-T_0)/w_0. \quad (9.2.5)$$

На стенке

$$q=\alpha\,(T_{\text{ст}}-T_0), \quad (9.2.6)$$

где $\alpha$ — коэффициент теплоотдачи, и

$$\tau_{\text{ст}}=c_f\,\rho w_0^2/2, \quad (9.2.7)$$

где $c_f$ — коэффициент трения.

Подставляя эти выражения в (9.2.5), находим, что при подобии полей температур и скоростей коэффициенты теплоотдачи и трения связаны простой зависимостью

$$\mathrm{St}=\alpha/c_p\,\rho w_0=c_f/2. \quad (9.2.8)$$

Это выражение называется аналогией Рейнольдса. Введя характерный линейный размер $l_0$ (например, расстояние от входной кромки пластины), получим

$$\mathrm{Nu}=\mathrm{Pe}\,c_f/2, \quad (9.2.9)$$

или, принимая во внимание, что при $\mathrm{Pr}=1$ $\mathrm{Pe}=\mathrm{Re}$,

$$\mathrm{Nu}=\mathrm{Re}\,c_f/2. \quad (9.2.10)$$

### 9.3. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

При плавном безотрывном обтекании тела потоком жидкости продольная составляющая скорости течения на стенке равна нулю, а на ближайшем удалении в глубь потока имеет конечное значение. Отсюда следует, и опыт это подтверждает, что в пристенной области должно иметь место наиболее существенное изменение скорости течения. Соответственно именно в этой области и должно наиболее отчетливо проявляться действие вязкости. При плоском течении касательные напряжения на стенке со стороны жидкости

$$\tau_{\text{ст}}=\mu\,(\partial w_x/\partial y)_{\text{ст}}. \quad (9.3.1)$$

Величина $dw_x/dy$ может быть сопоставлена с величиной $w_0/\delta$, где $w_0$ — скорость потока на большом удалении от тела (т. е. скорость невозмущенного потока) и $\delta$ — некоторый линейный размер, имеющий порядок толщины пристенного слоя жидкости, в котором скорость меняется от 0 до значения, близкого к $w_0$. Принимая во внимание (9.2.7), находим

$$\left.\begin{aligned} &\delta \approx 2\nu/c_f w_0; \\ &\delta/x \approx 2/c_f \mathrm{Re}_x, \end{aligned}\right\} \qquad (9.3.2)$$

где $\mathrm{Re}_x = w_0 x/\nu$ и $x$ — координата, направленная вдоль обвода тела вниз по течению. Известно, что в первом приближении $c_f \approx \mathrm{Re}^{-n}$, где $n \leqslant 0{,}5$. Следовательно,

$$\delta/x \approx \mathrm{Re}_x^{n-1}, \qquad (9.3.3)$$

т. е. даже при $n = 0{,}5$ $\delta/x \approx 0{,}01$ при $\mathrm{Re}_x \approx 10^4$. Для воздуха при атмосферном давлении, $T = 293$ и $w_0 = 10$ м/с этому значению числа Рейнольдса соответствует длина $x = 0{,}0157$ м, а для воды при $T = 293$ К и $w = 1$ м/с $x = 0{,}01$ м. Этим числам соответствует абсолютное значение $\delta$ порядка $10^{-4}$ м.

Таким образом, при практически реализуемых в большинстве случаев параметрах $\delta \ll l_0$, где $l_0$ — характерный размер обтекаемого тела.

Слой $\delta$, в котором отчетливо проявляется действие вязкости и происходит наиболее существенное изменение скорости по нормали к обтекаемой поверхности, называется гидродинамическим пограничным слоем. В плоском гидродинамическом пограничном слое, вследствие того что $\delta \ll l_0$, имеют место условия

$$\left.\begin{aligned} &\partial w_x/\partial y \gg \partial w_x/\partial x; \\ &\partial^2 w_x/\partial y^2 \gg \partial^2 w_x/\partial x^2. \end{aligned}\right\} \qquad (9.3.4)$$

Из уравнения сплошности следует, что в этом случае

$$\partial w_y/\partial y \approx -\partial w_x/\partial x \ll \partial w_x/\partial y. \qquad (9.3.5)$$

Соответственно из уравнения движения следует, что в пограничном слое

$$\partial p/\partial y \ll \partial p/\partial x. \qquad (9.3.6)$$

Таким образом, статическое давление можно считать постоянным по сечению пограничного слоя. При этих условиях из уравнения Навье—Стокса и уравнения сплошности следуют уравнения Прандтля для плоского пограничного слоя:

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y}\right) = \rho\left(\frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y}\right); \\ &\partial p/\partial y = 0; \\ &\partial \rho w_x/\partial x + \partial \rho w_y/\partial y = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9.3.7)$$

На внешней границе гидродинамического пограничного слоя $w \approx w_0$, и, следовательно, в области $y > \delta$ течение можно считать безвязкостным. Отсюда следует, что

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left(\frac{\partial w_0}{\partial t} + w_0 \frac{\partial w_0}{\partial x}\right). \qquad (9.3.8)$$

Тепловым пограничным слоем называется пристенная область, в которой существенно проявляются тепловые возмущения, т. е. то расстояние $\delta_T$, на котором температура потока меняется от $T_{\text{ст}}$ до значения, весьма близкого к температуре невозмущенного потока $T_0$. Толщина теплового пограничного слоя определится из условия

$$\left.\begin{aligned} &q = \alpha (T_{\text{ст}} - T_0) \approx \lambda \frac{T_{\text{ст}} - T_0}{\delta_T}; \\ &\delta_T/x \approx 1/\mathrm{Nu}_x. \end{aligned}\right\} \qquad (9.3.9)$$

Соответственно при достаточно больших значениях числа Нуссельта в тепловом пограничном слое $\partial^2 T/\partial y^2 \gg \partial^2 T/\partial x^2$.

Ниже приведены соотношения между толщинами теплового и динамического пограничных слоев:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Pr . . . . . . . . | $<1$ | $1$ | $>1$ |
| $\delta_T$ . . . . . . . . | $>\delta$ | $\sim\delta$ | $<\delta$ |

Уравнение теплопереноса аналогично уравнению (9.3.7) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2=\rho\left(w_x\frac{\partial i}{\partial x}+w_y\frac{\partial i}{\partial y}\right)-w_x\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (9.3.10)$$

Строго говоря, граничные условия к уравнениям (9.3.7) и (9.3.10) следует записать так:

$$\left.\begin{aligned}&y=0;\ w_x=0;\ w_y=w_{y,\,\text{ст}};\ T=T_{\text{ст}};\\&y\to\infty,\ w_x\to w_0;\ w_y\to 0,\ T\to T_0.\end{aligned}\right\} \qquad (9.3.11)$$

На непроницаемой стенке $w_{y,\,\text{ст}}=0$. Эти условия показывают, что распределение скоростей и температур в пограничных слоях асимптотически приближается к соответствующим значениям в невозмущенном потоке. В этом смысле говорят об *асимптотическом пограничном слое*. Однако весьма плодотворным оказывается введение понятия о *пограничном слое конечной толщины*. Переход от асимптотического слоя к слою конечной толщины можно осуществить заменой второй строки условий (9.3.11) условиями

$$\left.\begin{aligned}&y=\delta;\quad w_x=(1-\varepsilon)\,w_0;\\&y=\delta_T;\quad T=(1-\varepsilon)\,T_0,\end{aligned}\right\} \qquad (9.3.12)$$

где $\varepsilon$—заранее заданная малая величина.

## 9.4. СИСТЕМА ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛООБМЕНА В ПОТОКЕ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Как уже указывалось в гл. 2, присоединяя к уравнению теплопереноса уравнения движения, сплошности и состояния среды, а также учитывая зависимость $\mu$ и $\lambda$ от $T$, получаем систему основных уравнений, определяющих теплообмен в сжимаемой среде.

Для установившегося теплообмена в потоке газа, подчиняющегося уравнению Клапейрона—Менделеева,

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{div}(\lambda\operatorname{grad}T)+\mu\operatorname{diss}F(\mathbf{w})=\rho(\mathbf{w},\operatorname{grad}i)-(\mathbf{w},\operatorname{grad}p);\\&-\operatorname{grad}\left(p+\frac{2}{3}\mu\operatorname{div}\mathbf{w}\right)+2\operatorname{div}(\mu\dot{S})=\rho(\mathbf{w},\operatorname{grad}\mathbf{w});\\&\operatorname{div}(\rho\mathbf{w})=0;\\&\lambda=\lambda(T);\quad p=R\rho T;\quad \mu=\mu(T);\quad i=i(T).\end{aligned}\right\} \qquad (9.4.1)$$

Для плоского пограничного слоя получаем:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2=\rho\left(w_x\frac{\partial i}{\partial x}+w_y\frac{\partial i}{\partial y}\right)-w_x\frac{\partial p}{\partial x};\\&-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)=\rho\left(w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}\right);\\&\frac{\partial\rho w_x}{\partial x}+\frac{\partial\rho w_y}{\partial y}=0;\\&p=R(\rho/c_p)\,i;\quad \mu=\mu(i);\quad \lambda=\lambda(i).\end{aligned}\right\} \qquad (9.4.2)$$

Подставляя в первое из этих уравнений выражение для $\partial p/\partial x$ из второго уравнения, получаем

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2+w_x \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)=\rho\left(w_x \frac{\partial i}{\partial x}+w_y \frac{\partial i}{\partial y}\right)+$$
$$+\rho\left(w_x w_x \frac{\partial w_x}{\partial x}+w_y w_x \frac{\partial w_x}{\partial y}\right). \qquad (9.4.3)$$

Замечая, что

$$\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2+w_x \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu w_x \frac{\partial w_x}{\partial y}\right);$$

приводим уравнение теплопереноса плоского пограничного слоя к виду

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu \frac{\partial (w_x^2/2)}{\partial y}\right]=$$
$$=\rho\left(w_x \frac{\partial i}{\partial x}+w_y \frac{\partial i}{\partial y}\right)+\rho\left[w_x \frac{\partial (w_x^2/2)}{\partial x}+w_y \frac{\partial (w_x^2/2)}{\partial y}\right], \qquad (9.4.4)$$

или, при $c_p = \text{const}$,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\lambda \frac{\partial}{\partial y}\left[T^*+(\Pr-1)\frac{w_x^2}{2c_p}\right]\right\}=c_p\rho\left(w_x \frac{\partial T^*}{\partial x}+w_y \frac{\partial T^*}{\partial y}\right), \qquad (9.4.5)$$

где $T^*$ — температура торможения. Последнее уравнение было предложено М. Ф. Широковым.

При $\Pr = 1$ в уравнении (9.4.5) вместо двух переменных $T^*$ и $w_x^2/2c_p$ остается только температура торможения. Кроме того, в этом случае $\lambda = \mu c_p$, и система уравнений (9.4.2) может быть записана в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial T^*}{\partial y}\right)=\rho\left(w_x \frac{\partial T^*}{\partial x}+w_y \frac{\partial T^*}{\partial y}\right);\\
&-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)=\rho\left(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x}+w_y \frac{\partial w_x}{\partial y}\right);\\
&\frac{\partial \rho w_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho w_y}{\partial y}=0;\\
&p=R\rho T; \quad \mu=\mu(T).
\end{aligned}\right\} \qquad (9.4.6)$$

Отсюда непосредственно следует, что в общем случае при $\Pr = 1$, $\partial p/\partial x = 0$, $c_p = \text{const}$ и подобии граничных условий в пограничном слое имеет место подобие полей скоростей и энтальпий торможения.

Для жидкости с постоянными физическими свойствами при $w_x^2/2c_p \ll T$ уравнения плоского пограничного слоя существенно упрощаются и принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
&a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=w_x \frac{\partial T}{\partial x}+w_y \frac{\partial T}{\partial y};\\
&-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}+\nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}=w_x \frac{\partial w_x}{\partial x}+w_y \frac{\partial w_x}{\partial y};\\
&\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial y}=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.4.7)$$

### 9.5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОГО СТАЦИОНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА НЕПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

От дифференциальных уравнений пограничного слоя можно перейти к интегральным уравнениям, проинтегрировав систему (9.4.6) почленно в пределах от 0 до $\delta_T$ для уравнения теплопереноса и от 0 до $\delta$ для уравнений движения и сплошности.

Уравнение теплопереноса при $\Pr = 1$ с учетом уравнения сплошности можно привести к виду

$$\frac{q}{c_p} = \frac{1}{c_p}\int\limits_0^{\delta_T} \frac{\partial}{\partial y}\lambda\left(\frac{\partial T^*}{\partial y}\right)dy = \int\limits_0^{\delta_T} \frac{\partial(\rho w_x T^*)}{\partial x}dy + \int\limits_0^{\delta_T} \frac{\partial(\rho w_y T^*)}{\partial y}dy. \quad (9.5.1)$$

Величина $c_p$ вынесена за знак интегрирования, так как для газа ее обычно можно считать постоянной. Замечая, что

$$\int\limits_0^{\delta_T} \frac{\partial(\rho w_y T^*)}{\partial y}dy = T_0^*(\rho w_y)_{y=\delta_T} = -T_0^*\int\limits_0^{\delta_T} \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}dy,$$

где $T_0^*$ — температура торможения невозмущенного потока, получаем

$$\frac{q}{c_p} = \frac{d}{dx}\int\limits_0^{\delta_T} \rho w_x T^* dy - T_0^*\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\delta_T} \rho w_x dy. \quad (9.5.2)$$

Это уравнение может быть преобразовано к виду

$$\frac{\alpha}{c_p\rho_0 w_0} = \frac{d\delta_T^{**}}{dx} + \left[\frac{1}{w_0}\frac{dw_0}{dx} + \frac{1}{T_{\text{ст}}-T_0^*}\frac{d(T_{\text{ст}}-T_0^*)}{dx} + \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dx}\right]\delta_T^{**} +$$

$$+\frac{1}{T_{\text{ст}}-T_0^*}\frac{dT_0^*}{dx}\int\limits_0^{\delta_T}\frac{\rho w_x}{\rho_0 w_0}dy, \quad (9.5.3)$$

где

$$\alpha = q/(T_{\text{ст}} - T_0^*) \quad (9.5.4)$$

и

$$\delta_T^{**} = \int\limits_0^{\delta_T}\frac{\rho w_x}{\rho_0 w_0}\left(1 - \frac{T_{\text{ст}}-T^*}{T_{\text{ст}}-T_0^*}\right)dy. \quad (9.5.5)$$

Индекс 0 показывает, что величина относится к невозмущенному потоку.

Формула (9.5.4) является обобщенным понятием коэффициента теплоотдачи, отнесенного не к разности термодинамических температур стенки и потока, а к разности температуры стенки и температуры торможения потока. В гл. 12 будет показано, что удобнее вместо температуры торможения потока в это выражение вводить температуру стенки при ее изоэнтропическом обтекании. Величина $\delta_T^{**}$ является некоторой линейной характеристикой, называемой толщиной потери теплосодержания. В общем случае при $\Pr = 1$ и $\partial p/\partial x = 0$ коэффициент теплоотдачи следует определять через разность энтальпий, т. е. полагать

$$\alpha = q/(i_{\text{ст}} - i_0^*), \quad (9.5.6)$$

где $i_{\text{ст}}$ — энтальпия потока при параметрах на поверхности тела.

Уравнения движения и сплошности принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &-\delta\frac{\partial p}{\partial x} - \tau_{\text{ст}} = -\int\limits_0^{\delta}\frac{\partial p}{\partial x}dy + \int\limits_0^{\delta}\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial w_x}{\partial y}dy = \\ &= \int\limits_0^{\delta}\rho w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}dy + \int\limits_0^{\delta}\rho w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}dy; \\ &(\rho w_y)_{y=\delta} = \int\limits_0^{\delta}\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y}dy = -\int\limits_0^{\delta}\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}dy. \end{aligned}\right\} \quad (9.5.7)$$

При этом предполагается, что стенка непроницаема, т. е. при $y=0$ $\rho w_y=0$. Решая эти уравнения совместно, получаем

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho w_x^2\,dy - w_0\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho w_x\,dy = \tau_{ст} - \delta\frac{dp}{dx}. \qquad (9.5.8)$$

При этом принято во внимание, что в соответствии с формулой интегрирования по частям и уравнением сплошности

$$\int_0^\delta \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y}\,dy = (\rho w_y w_x)_{y=\delta} - \int_0^\delta w_x \frac{\partial \rho w_y}{\partial y}\,dy = w_0(\rho w_y)_{y=\delta} + \int_0^\delta \rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x}\,dy =$$

$$= -w_0\int_0^\delta \frac{\partial \rho w_x}{\partial x}\,dy + \int_0^\delta \rho w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}\,dy.$$

Для стационарного течения из уравнения (9.3.8) следует, что

$$-\partial p/\partial x = \rho_0 w_0\, dw_0/dx, \qquad (9.5.9)$$

и уравнение (9.5.8) приводится к виду

$$\frac{\tau_{ст}}{\rho_0 w_0^2} = \frac{c_f}{2} = \frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{1}{w_0}\frac{dw_0}{dx}(2\delta^{**}+\delta^*) + \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dx}\delta^{**}. \qquad (9.5.10)$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} \delta^{**} &= \int_0^\delta \frac{\rho w_x}{\rho_0 w_0}\left(1-\frac{w_x}{w_0}\right)dy;\\ \delta^* &= \int_0^\delta \left(1-\frac{\rho w_x}{\rho_0 w_0}\right)dy. \end{aligned}\right\} \qquad (9.5.11)$$

Величина $\delta^{**}$ называется толщиной потери импульса, а величина $\delta^*$ — толщиной вытеснения.

Разность

$$w_0\int_0^\delta \rho w_x\,dy - \int_0^\delta \rho w_x^2\,dy = \rho_0 w_0^2\,\delta^{**}$$

представляет собой изменение кинетической энергии потока под влиянием трения, т. е. в канале толщиной $\delta^{**}$ как бы концентрируется этот дефект импульса. Соответственно разность $\rho_0 w_0\delta - \int_0^\delta \rho w_x dy = \rho_0 w_0 \delta^*$ представляет собой уменьшение расхода жидкости через область пограничного слоя вследствие проявления того же трения. Таким образом, если контуры рассматриваемого тела увеличить на толщину $\delta^*$, то такой контур обтекается при данных условиях потенциальным потоком. Иначе говоря, линии тока потенциального течения выталкиваются трением на расстояние $\delta^*$.

Интегральное соотношение импульсов для пограничного слоя было введено Карманом. Характеристические толщины пограничного слоя пропорциональны его условной толщине $\delta$. Так, например,

$$\bar{\delta}_T^{**} = \frac{\delta_T^{**}}{\delta} = \int_0^1 \frac{\rho w_x}{\rho_0 w_0}\left(1-\frac{T_{ст}-T^*}{T_{ст}-T_0^*}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right). \qquad (9.5.12)$$

Однако если экспериментальное определение $\delta$ условно и связано с точностью измерений, вычисление $\delta^*$, $\delta^{**}$ и $\delta_T^{**}$ по экспериментальным полям скоростей и температур более точно и определенно. Последнее тем более су-

щественно, что значение этих величин отнюдь не связано с представлением о слое конечной толщины и, по существу, рассмотренные выше интегралы могут браться в пределах от 0 до $\infty$. Конечное значение этих интегралов при верхнем пределе, равном бесконечности, обусловливается резким изменением скоростей в узкой области порядка $\delta$ и температур также в узкой области порядка $\delta_T$.

Интегральные уравнения пограничного слоя могут быть решены, если каким-либо способом заданы профили скоростей и тепература или так называемые законы сопротивления и теплообмена

$$\left.\begin{aligned} &\tau_{\text{ст}}/\rho_0 w_0^2 = f(\mathrm{Re}^{**}); \\ &\alpha/c_p \rho_0 w_0 = f(\mathrm{Re}_T^{**}), \end{aligned}\right\} \tag{9.5.13}$$

где

$$\mathrm{Re}^{**} = w_0 \delta^{**}/\nu_0; \quad \mathrm{Re}_T^{**} = w_0 \delta_T^{**}/\nu_0. \tag{9.5.14}$$

Для жидкости с постоянными физическими свойствами при $w_x^2/2c_p \ll T$ интегральные уравнения плоского пограничного слоя принимают вид

$$\frac{\alpha}{c_p \rho w_0} = \frac{d\delta_T^{**}}{dx} + \left[\frac{1}{w_0}\frac{dw_0}{dx} + \frac{1}{T_{\text{ст}} - T_0}\frac{d(T_{\text{ст}} - T_0)}{dx}\right]\delta_T^{**}; \tag{9.5.15}$$

$$\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho w_0^2} = \frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{1}{w_0}\frac{dw_0}{dx}(2\delta^{**} + \delta^*), \tag{9.5.16}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\delta_T^{**} = \int_0^{\delta_T} \frac{w_x}{w_0}\left(1 - \frac{T_{\text{ст}} - T}{T_{\text{ст}} - T_0}\right)dy; \\ &\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{w_x}{w_0}\left(1 - \frac{w_x}{w_0}\right)dy; \\ &\delta^* = \int_0^{\delta}\left(1 - \frac{w_x}{w_0}\right)dy. \end{aligned}\right\} \tag{9.5.17}$$

## 9.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И СКОРОСТЕЙ В ПЛОСКОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Поле касательных напряжений в потоке жидкости и газа весьма консервативно относительно режима течения. Так, при стационарном, неускоренном течении в осесимметричном канале распределение касательных напряжений по поперечному сечению одинаково зависит от безразмерного радиуса как для ламинарного, так и для переходного и турбулентного режимов течения. Автомодельность поля касательных напряжений относительно режима течения с большой степенью точности выполняется и в пограничном слое при внешнем обтекании твердых тел.

Из уравнения движения и общих соображений о физических свойствах стационарного плоского пограничного слоя несжимаемой жидкости, обтекающей непроницаемую поверхность, следует, что на его границах должны выполняться следующие условия:

$$\left.\begin{aligned} &y = 0,\ w_x = w_y = 0,\ \tau = \tau_{\text{ст}};\ -dp/dx + \partial\tau/\partial y = 0;\ \partial^2\tau/\partial y^2 = 0; \\ &y = \delta,\ w_x = w_0,\ \tau = 0,\ \partial\tau/\partial y = 0,\ \partial^2\tau/\partial y^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.6.1}$$

Таким образом, имеются хорошо фиксированные условия, позволяющие аппроксимировать неизвестное распределение касательных напряжений в пограничном слое с помощью степенного полинома. Шести условиям для каса-

тельного напряжения соответствует полином пятой степени. При течении без градиента давления этот полином имеет вид

$$\tilde{\tau} = \tau/\tau_{ст} = 1 - 10\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5, \qquad (9.6.2)$$

где $\xi = y/\delta$ — относительное расстояние от стенки.

Практически для решения многих задач оказывается возможным ограничиться кубической параболой, коэффициенты которой определяются из условий

$$\left.\begin{aligned} &\xi = 0,\ \tilde{\tau} = 1,\ \partial\tilde{\tau}/\partial\xi = (\delta/\tau_{ст})\, dp/dx;\\ &\xi = 1,\ \tilde{\tau} = 0,\ \partial\tilde{\tau}/\partial\xi = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9.6.3)$$

После вычислений находим, что данная аппроксимация профиля касательных напряжений имеет вид

$$\tilde{\tau} = 1 + \Lambda\xi - (3 + 2\Lambda)\,\xi^2 + (2 + \Lambda)\,\xi^3, \qquad (9.6.4)$$

где

$$\Lambda = \frac{\delta}{\tau_{ст}}\frac{dp}{dx} = -\frac{\mu w_0}{\tau_{ст}\,\delta}\frac{\delta^2}{\nu}\frac{dw_0}{dx}. \qquad (9.6.5)$$

В данном случае не удовлетворяется условие $\partial^2\tau/\partial y^2 = 0$.

Таблица 9.3

**Сопоставление касательных напряжений $\tilde{\tau}$, вычисленных по полиномам разных степеней**

| Полином | $\xi$ | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 |
| $1-3\xi^2+2\xi^3$ | 1 | 0,972 | 0,896 | 0,784 | 0,648 | 0,500 | 0,352 | 0,216 | 0,104 | 0,028 | 0 |
| $1-2\xi^3+\xi^4$ | 1 | 0,992 | 0,985 | 0,954 | 0,887 | 0,812 | 0,697 | 0,554 | 0,385 | 0,198 | 0 |
| $1-10\xi^3+15\xi^4-6\xi^5$ | 1 | 0,991 | 0,942 | 0,836 | 0,682 | 0,500 | 0,317 | 0,163 | 0,058 | 0,008 | 0 |

Практически достаточность аппроксимации (9.6.4) для вычисления $\tilde{\tau}$ видна из табл. 9.3. Сопоставление с экспериментальными данными Миклея для обтекания пластины показано на рис. 9.1. Величина $\Lambda_1 = (\delta^2/\nu)\, dw_0/dx$ представляет собой специфическую форму записи числа Рейнольдса, в котором роль скорости выполняет произведение $\delta dw_0/dx$. Эта величина называется параметром Польгаузена, предложившего метод решения уравнения импульсов для ламинарного пограничного слоя путем аппроксимации профиля скоростей. Аппроксимация профиля касательных напряжений, являющаяся более общей, была введена К. К. Федяевским.

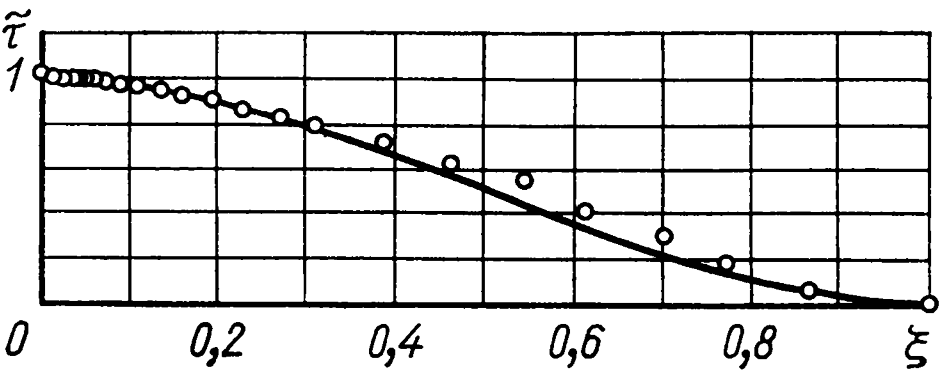



Рис. 9.1. Распределение касательных напряжений в турбулентном пограничном слое по формуле $\tilde{\tau} = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$

Распределение продольной составляющей вектора скорости определяется из уравнения

$$\tau = (\mu + \mu_T)\, \partial w_x/\partial y. \qquad (9.6.6)$$

Отсюда следует, что при $\mu = \text{const}$ и $\mu_T/\mu = f(\xi)$

$$\omega = \frac{w_x}{w_0} = \frac{\tau_{ст}\,\delta}{\mu w_0}\int\limits_0^{\xi}\frac{\tilde{\tau}}{1 + \mu_T/\mu}\, d\xi. \qquad (9.6.7)$$

При $\xi = 1$ $\omega = 1$, и, следовательно,

$$\frac{\tau_{ст}\,\delta}{\mu w_0} = \left(\int_0^1 \frac{\tilde{\tau}}{1+\mu_T/\mu}\, d\xi\right)^{-1}. \qquad (9.6.8)$$

Таким образом, аппроксимирующий профиль скоростей определится интегральным соотношением

$$\omega = \int_0^{\xi} \frac{\tilde{\tau}}{1+\mu_T/\mu}\, d\xi \left(\int_0^1 \frac{\tilde{\tau}}{1+\mu_T/\mu}\, d\xi\right)^{-1}. \qquad (9.6.9)$$

Подставляя в последнее выражение значение $\mu_T = 0$ и значение $\tau$ из уравнения (9.6.4), находим аппроксимирующий профиль скоростей в ламинарном пограничном слое при $\mu = \text{const}$:

$$\omega = \frac{12+\Lambda_1}{6}\xi - \frac{\Lambda_1}{2}\xi^2 - \frac{4-\Lambda_1}{2}\xi^3 + \frac{6-\Lambda_1}{6}\xi^4. \qquad (9.6.10)$$

Приняв определенную схему турбулентного обмена, т. е. задав связь между $\mu_T/\mu$ и $\xi$, можно вычислить распределение скоростей и в турбулентном пограничном слое.

## 9.7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА И ТЕМПЕРАТУРЫ В ПЛОСКОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

На границах плоского стационарного теплового пограничного слоя должны выполняться условия:

на непроницаемой стенке $y = 0$, $q = q_{ст}$, $\partial q/\partial y = 0$;

на границе с невозмущенным (в отношении теплового состояния) потоком $y = \delta_т$, $q = 0$, $\partial q/\partial y = 0$.

Этим условиям удовлетворяет аппроксимирующая кубическая парабола

$$\tilde{q} = 1 - 3\xi_T^2 + 2\xi_T^3, \qquad (9.7.1)$$

где

$$\tilde{q} = q/q_{ст};\quad \xi_T = y/\delta_T.$$

Распределение температур по оси $y$ можно определить из уравнения

$$q = -(\lambda + \lambda_T)\,\partial T/\partial y, \qquad (9.7.2)$$

откуда следует, что при $\lambda = \text{const}$

$$\vartheta = \frac{T_{ст}-T}{T_{ст}-T_0} = \frac{\alpha\delta_T}{\lambda}\int_0^{\xi_T} \frac{\tilde{q}}{1+\lambda_T/\lambda}\, d\xi_T. \qquad (9.7.3)$$

Здесь

$$\lambda_T/\lambda = \varepsilon\,\Pr\,\mu_T/\mu, \qquad (9.7.4)$$

где $\varepsilon \approx 1$. При $\xi_T = 1$ $\vartheta = 1$ и

$$\frac{\alpha\delta_T}{\lambda} = \left(\int_0^1 \frac{\tilde{q}}{1+\lambda_T/\lambda}\, d\xi\right)^{-1}. \qquad (9.7.5)$$

Таким образом, при $\lambda = \text{const}$ профиль температур определится соотношением

$$\vartheta = \int_0^{\xi_T} \frac{\tilde{q}}{1+\lambda_T/\lambda}\, d\xi_T \left(\int_0^1 \frac{\tilde{q}}{1+\lambda_T/\lambda}\, d\xi_T\right)^{-1}. \qquad (9.7.6)$$

Подставляя в последнее выражение значение $\lambda_T = 0$ и $\tilde{q}$ из уравнения (9.7.1), находим аппроксимирующий профиль температур в ламинарном тепловом пограничном слое при $\lambda = \text{const}$:

$$\vartheta = 2\xi_T - 2\xi_T^3 + \xi_T^4. \qquad (9.7.7)$$

## 9.8. ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА В ПЛОСКОМ НЕСЖИМАЕМОМ ПОТОКЕ ВБЛИЗИ ТВЕРДОЙ СТЕНКИ

Рассмотренные в гл. 4 осредненные уравнения движения и теплообмена в турбулентном потоке оказываются незамкнутыми, так как в них появляются члены, содержащие неизвестные величины пульсаций скорости и температуры. Длительное время не удавалось построить теорию, позволяющую вычислить эти величины, не прибегая к эксперименту. В связи с этим широкое распространение получили так называемые полуэмпирические теории турбулентности, в основу которых положено предположение о том или ином виде связи между переносимой турбулентными пульсациями величиной (количество движения, количество теплоты, напряженность вихря и т. п.) и соответствующими осредненными параметрами потока.

Основы полуэмпирической теории турбулентности были заложены Прандтлем и Тэйлором.

Уравнение Рейнольдса показывает, что мерой интенсивности турбулентных пульсаций может являться величина $\sqrt{\tau/\rho}$. Особенно отчетливо это видно при рассмотрении области плоского потока, достаточно удаленной от твердой стенки. В этом случае $\mu_T \gg \mu$ и полное касательное напряжение практически равно $\tau_T$. Тогда из формулы (4.2.18) следует, что

$$\left| \sqrt{\overline{V_x V_y}} \right| = \sqrt{\tau/\rho}. \qquad (9.8.1)$$

Величина $v^* = \sqrt{\tau/\rho}$ имеет размерность скорости и называется *скоростью касательных напряжений* или *динамической скоростью*.

Обычно в качестве характерного принимают значение этой величины на поверхности стенки:

$$v^*_{\text{ст}} = \sqrt{\tau_{\text{ст}}/\rho}. \qquad (9.8.2)$$

Рассмотрим соотношение между турбулентным и молекулярным трением. в плоском турбулентном потоке несжимаемой жидкости без градиента давления Оно может зависеть только от абсолютного уровня касательных напряжений, их распределения по толщине потока, расстояния от стенки и двух физических характеристик среды — плотности и молекулярной вязкости, т. е.

$$\mu_T = f(\tau_{\text{ст}}, \rho, \mu, y, \delta), \qquad (9.8.3)$$

где $\delta$ — толщина потока.

Из величин, находящихся под знаком функции, можно составить два безразмерных комплекса: относительное расстояние от стенки и число Рейнольдса, построенное по локальной скорости касательного напряжения и расстоянию от стенки:

$$\eta = v^* y/\nu. \qquad (9.8.4)$$

Таким образом, зависимость (9.8.3) можно представить в виде связи трех безразмерных величин:

$$\mu_T/\mu = f_1(\eta;\ \xi). \qquad (9.8.5)$$

На некотором удалении от стенки, когда молекулярное трение практически перестает влиять на турбулентные пульсации скорости, функция $f$ должна принять форму, в которой отсутствует величина $\mu$. Этому условию соответствует зависимость

$$\mu_T/\rho v^* y = f_2(\xi). \qquad (9.8.6)$$

Если вблизи стенки $f_2$ меняется слабо, то в области $y_1 < y \ll \delta$ (где $y_1$ — толщина слоя, в котором существенно проявляется молекулярное трение)

$$\mu_T \approx \varkappa \rho v^* y. \tag{9.8.7}$$

Здесь $\varkappa$ — некоторая константа, характеризующая структуру турбулентного потока. Тогда

$$\tau_T = \mu_T \, d\bar{w}/dy = \varkappa \rho v^* y \, \partial\bar{w}/\partial y,$$

и поскольку при $y > y_1$ $\tau_T = \rho v^{*2}$, то окончательно

$$\tau_T = \rho \, (\varkappa y \, \partial\bar{w}/\partial y)^2. \tag{9.8.8}$$

Эта формула означает, что в ядре турбулентного пограничного слоя между пульсационными компонентами скорости течения существует корреляция:

$$V_x \sim V_y \sim y \partial\bar{w}/\partial y. \tag{9.8.9}$$

Формула (9.8.8) может быть обобщена введением некоторой характерной длины

$$l = yf(\xi), \tag{9.8.10}$$

причем в области $y_1 < y \ll \delta$ $f(\xi) \approx \text{const} = \varkappa$.

При таком обобщении формула (9.8.8) примет вид

$$\tau_T = \rho l^2 \left| \frac{\partial\bar{w}}{\partial y} \right| \frac{\partial\bar{w}}{\partial y}, \tag{9.8.11}$$

где введение модуля производной скорости по нормали к стенке обусловлено необходимостью сохранения знака касательного напряжения.

Формула (9.8.11) впервые была получена Тэйлором. Прандтль назвал величину $l$ *длиной пути перемешивания*. При этом он исходил из аналогии между турбулентным перемещением условных молей жидкости и движением молекул в газе. В этой схеме величина $l$ является аналогом длины свободного пробега молекул. Такая схема, как выяснилось в дальнейшем, не является достаточной, поскольку в турбулентном потоке переносы в действительности осуществляются спектром пульсаций. Однако сама формула (9.8.8) оказалась весьма эффективной и, как это было показано выше, получается в качестве первого приближения из общих соображений о свойствах плоского турбулентного потока.

Во внешней части пограничного слоя имеет место условие

$$l \underset{y \to \delta}{\to} \varkappa_1 \delta, \tag{9.8.12}$$

причем константы $\varkappa$ и $\varkappa_1$ связаны друг с другом.

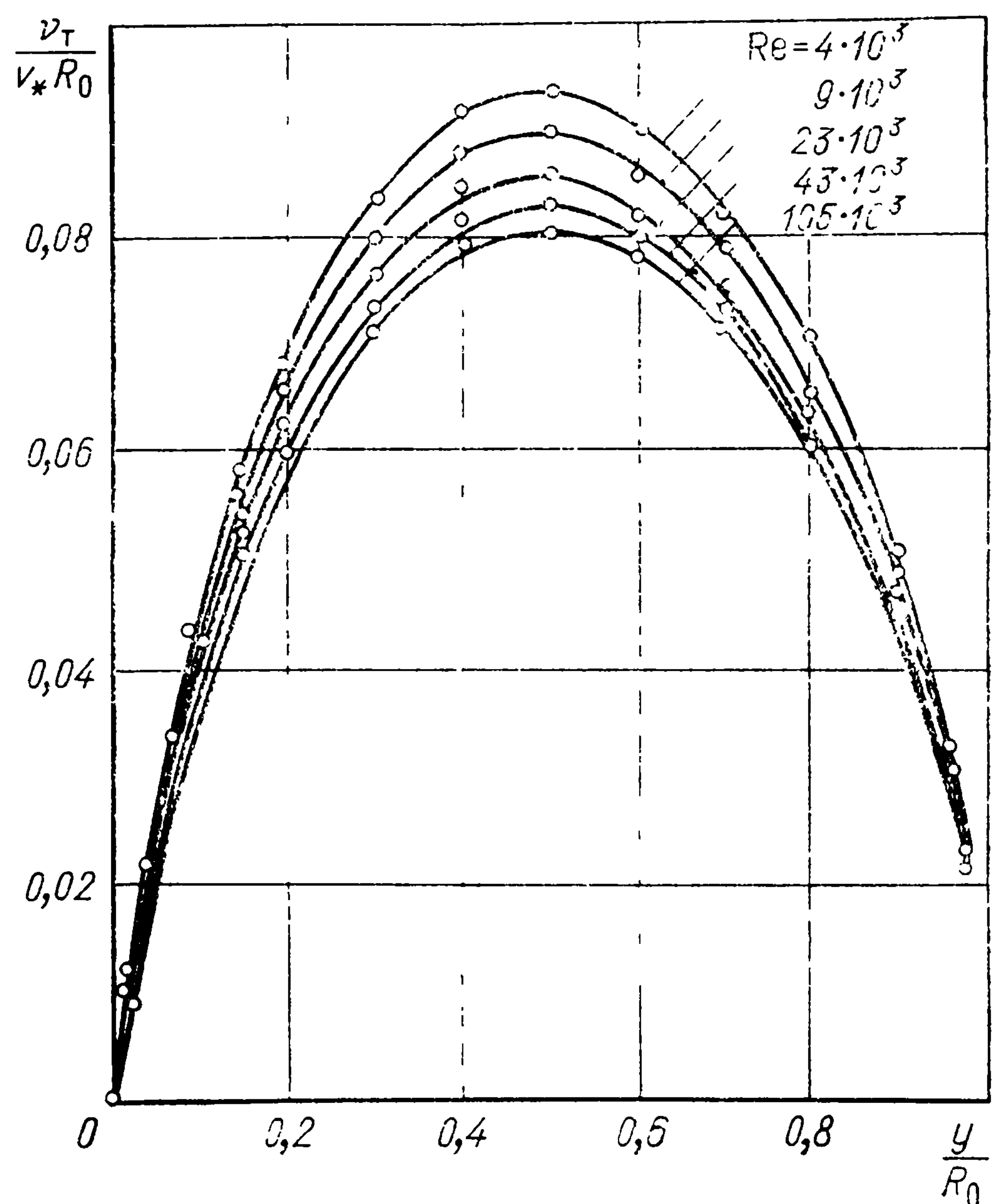



Рис. 9.2. Распределение коэффициента турбулентной вязкости по радиусу трубы в изотермическом потоке несжимаемой жидкости

На рис. 9.2 показаны изменения кинематического коэффициента турбулентной вязкости $\nu_T = \mu_T/\rho$ и длины пути перемешивания по радиусу гладкой трубы по опытам И. Никурадзе. При $\text{Re} < 10^5$ влияние молекулярного трения проявляется в некоторой степени во всей толще потока. При $\text{Re} > 10^5$ турбулентные характеристики потока практически не зависят от молекулярной вязкости среды.

Для пограничного слоя на пластине $\varkappa_1 = 0{,}07 - 0{,}09$. При течении в трубе это значение примерно в два раза больше в связи с тем, что максимальный масштаб турбулентных пульсаций в этом случае имеет порядок двух толщин (радиусов) пограничного слоя. Около стенки действительно оправдывается формула (9.8.8), причем по этим опытам $\varkappa = 0{,}4$. При течении в шероховатых трубах на значительном удалении от выступов значение $l$ такое же, как и при течении в гладких трубах с большими числами Re.

Тэйлор обратил внимание на то, что при отсутствии действия вязкости каждая частица жидкости может сохранять свою завихренность, в то время как возможно изменение ее количества движения под влиянием местных пульсаций давления. Если все существующие в течении вихри имеют оси, перпендикулярные к направлению осредненного течения и к направлению градиента осредненной скорости, то течение будет двумерным.

Введем в уравнение движения плоского невязкого пограничного слоя величину вихря

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial x}\right). \tag{9.8.13}$$

Получим

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w_x^2 + w_y^2}{2}\right) + 2w_y\,\omega. \tag{9.8.14}$$

Осредняя это уравнение с введением пульсационной составляющей вихря $\omega'$, получаем

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{w}_x^2 + \bar{w}_y^2}{2}\right) + 2\bar{w}_y\,\bar{\omega} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{V}_x^2 + \bar{V}_y^2}{2}\right) + 2\overline{V_y\,\omega'}. \tag{9.8.15}$$

Отсюда следует, что

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{V}_x^2 + \bar{V}_y^2}{2}\right) - 2\overline{V_y\,\omega'} = \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial t} + \bar{w}_x\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \bar{w}_y\frac{\partial \bar{w}_y}{\partial y} \tag{9.8.16}$$

и для равномерного вдоль оси $x$ потока

$$\partial\tau_T/\partial y = \rho 2\overline{V_y|\omega'}. \tag{9.8.17}$$

Осредненное напряжение вихря в каком-либо слое равно $\frac{1}{2}\frac{d\bar{w}}{dy}$, и, следовательно, при перемещении на длине пути перемешивания переносится избыточная завихренность $-l\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}\frac{d\bar{w}}{dy}\right)$, т. е.

$$2\omega' = -l d^2\bar{w}/dy^2. \tag{9.8.18}$$

Отсюда

$$d\bar{p}/dx = d\tau_T/dy = \rho\overline{lV_y}\,d^2\bar{w}/dy^2, \tag{9.8.19}$$

в то время как по Прандтлю

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = \rho\frac{d}{dy}\left(\overline{lV_y}\,\frac{d\bar{w}}{dy}\right). \tag{9.8.20}$$

Эти выражения совпадают только при независимости $\overline{lV_y}$ от $y$. Измерения распределения температур в следе за телом подтвердили правильность идеи Тэйлора.

На пространственные течения полуэмпирическая теория длины пути смешения Прандтля наиболее эффективно была перенесена Н. И. Булеевым. На других полуэмпирических теориях турбулентности мы здесь останавливаться не будем, отсылая читателя к литературе, названной в конце этой главы. Укажем только, что М. А. Гольдштиком и автором значение константы $\varkappa$

было определено теоретически, исходя из теории максимальной квазиламинарной устойчивости турбулентности пограничного слоя. Эта теория позволила впервые вычислить и другие важнейшие характеристики плоского турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости.

## 9.9. СВЯЗЬ МЕЖДУ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ВЯЗКОСТИ

Из рассмотрения теплопроводности в направлении оси $y$ в плоском турбулентном потоке несжимаемой жидкости в соответствии с уравнением (4.4.6)

$$q_T = c_p \rho \overline{V_y \Theta}. \tag{9.9.1}$$

Следовательно, пульсация $V_y$ переносит избыточное теплосодержание $c_p \rho \Theta$. По аналогии с переносом количества движения или вихря можно положить

$$\left.\begin{aligned} &\Theta \sim l_T\, \partial \overline{T}/\partial y; \\ &q_T = c_p \rho l_T\, l\, \frac{d\overline{w}}{dy}\, \frac{d\overline{T}}{dy}\,. \end{aligned}\right\} \tag{9.9.2}$$

Здесь $l_T$ — длина пути рассеяния теплосодержания, в общем случае не обязательно равная длине пути гидродинамического перемешивания $l$. Сопоставляя эти выражения с соответствующими выражениями для турбулентного трения, можно написать

$$\lambda_T = \varepsilon c_p\, \mu_T, \tag{9.9.3}$$

или

$$\lambda_T/\lambda = \varepsilon \Pr \mu_T/\mu. \tag{9.9.4}$$

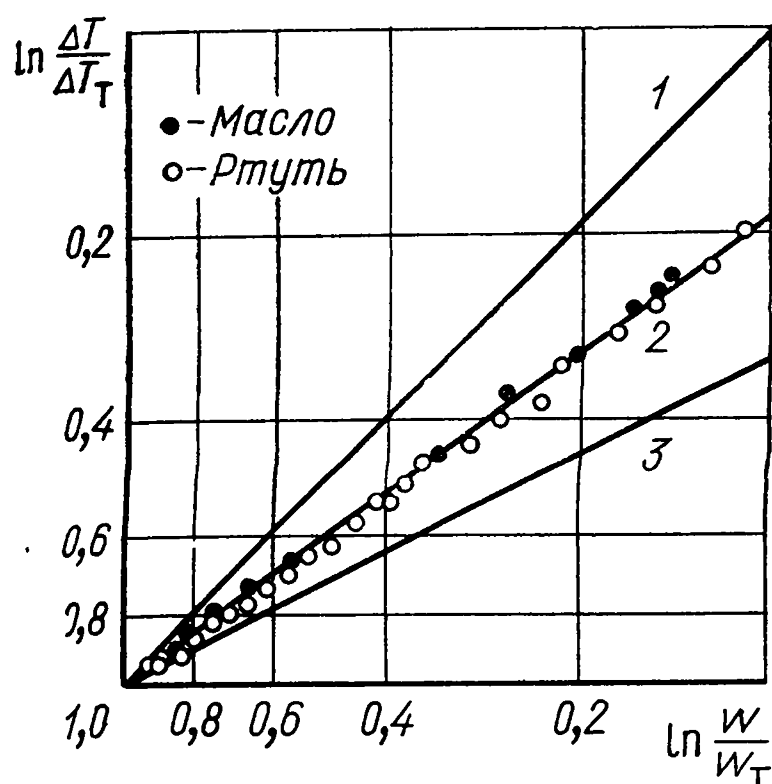



Рис. 9.3. К определению турбулентного числа Прандтля:
1 — $\Pr_T = 1$ (схема Прандтля);
2 — $\Pr_T = 0{,}75$ (эксперимент);
3 — $\Pr_T = 0{,}5$ (схема Тэйлора)

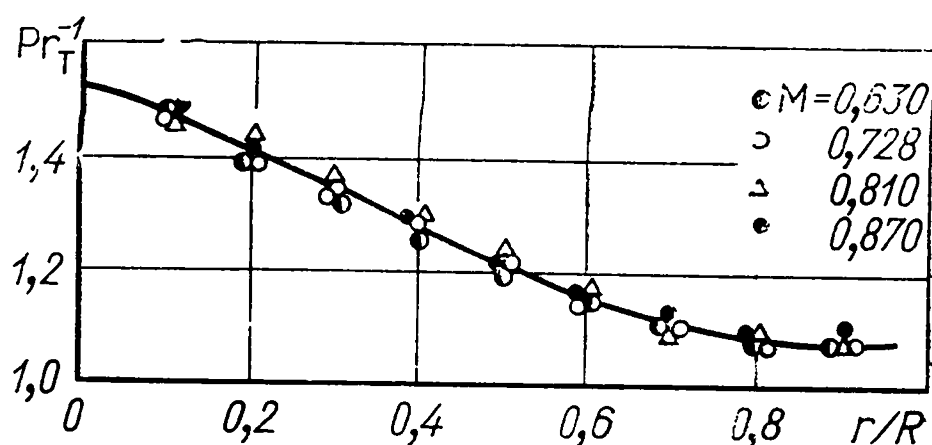



Рис. 9.4. Изменение турбулентного числа $\Pr_T$ по радиусу трубы для значений $\mathrm{Re} = (3{,}2 \div 7{,}3) \cdot 10^5$

Здесь $\varepsilon$ — коэффициент неподобия рассеяния тепла и количества движения в результате турбулентных пульсаций скорости. Величина, обратная $\varepsilon$, имеет смысл числа Прандтля для турбулентного обмена:

$$\Pr_T = c_p\, \mu_T/\lambda_T. \tag{9.9.5}$$

По Прандтлю эта величина равна 1, по Тейлору 0,5. На рис. 9.3 приведены данные о соотношении турбулентных коэффициентов диффузии импульса и тепла в свободных струях, а на рис. 9.4 — аналогичные данные для пограничного слоя в трубе.

## 9.10. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПЕРЕНОС В ВЯЗКОМ ПОДСЛОЕ

На поверхности жесткой, непроницаемой пластины при отсутствии скольжения имеют место условия

$$\{y = 0,\ w_x = w_y = 0,\ V_x = V_y = 0\}. \tag{9.10.1}$$

Отсюда следует, что при

$$y \to 0 \begin{cases} \overline{V_x V_y} \to 0; \\ \tau \to \mu (\partial \overline{w}_x / \partial y)_{\text{ст}}; \\ \overline{w} \to y\tau_{\text{ст}}/\mu. \end{cases} \qquad (9.10.2)$$

Следовательно, в непосредственной близости от твердой стенки существует область течения, в которой распределение скоростей практически полностью определяется молекулярным трением. Эта область турбулентного пограничного слоя

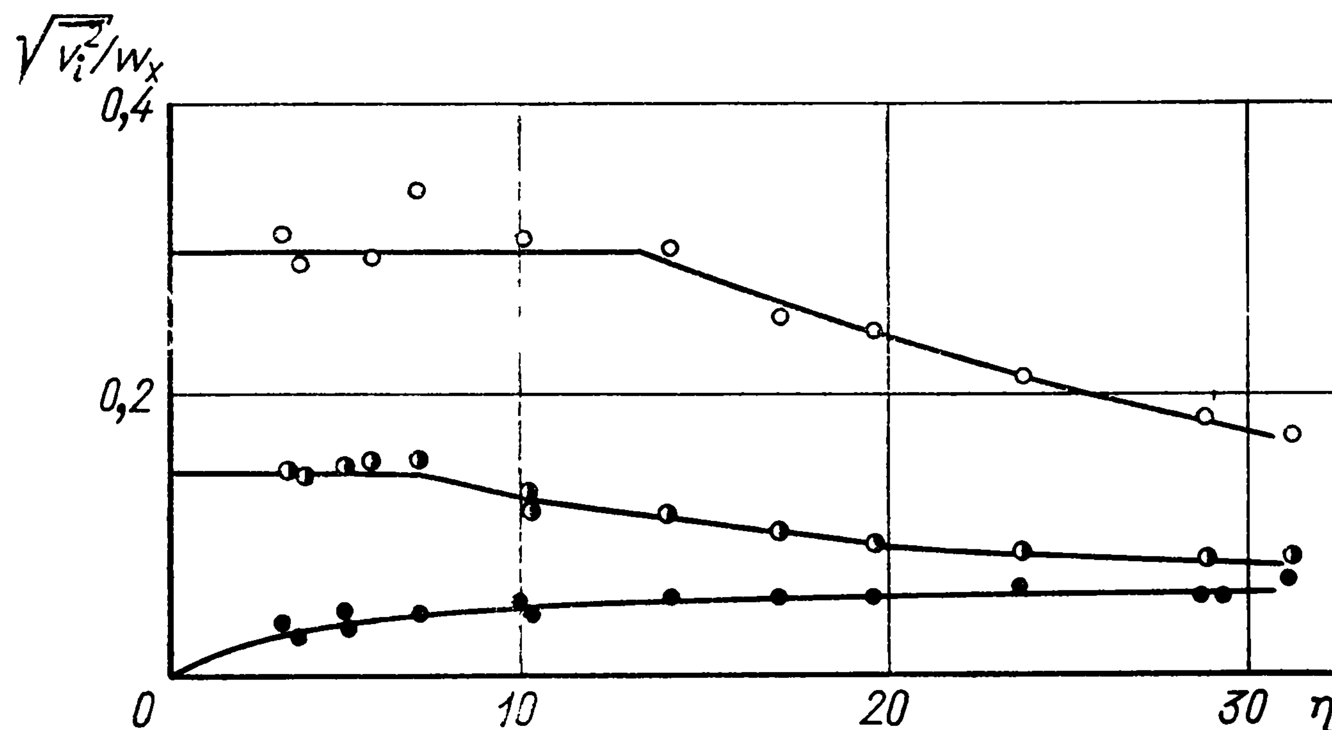



Рис. 9.5. Относительные значения пульсаций скорости в канале с параллельными стенками:

● — $\sqrt{\overline{V_y^2}}/w_x$; ◑ — $\sqrt{\overline{V_z^2}}/w_x$; ○ — $\sqrt{\overline{V_x^2}}/w_x$

называется *вязким подслоем*. Условную толщину вязкого подслоя мы будем обозначать, как и ранее, через $y_1$, полагая, что при

$$\{0 < y < y_1, \ \mu_T \ll \mu\}. \qquad (9.10.3)$$

Однако это не означает малости соотношения $\lambda_T$ и $\lambda$, поскольку последнее зависит по формуле (9.9.4) еще и от значения числа Прандтля жидкости. Поэтому при $\Pr \gg 1$ турбулентный и молекулярный переносы теплоты в вязком подслое могут быть вполне соизмеримы.

Очевидно, что под влиянием молекулярного трения корреляция типа (9.8.9) между пульсационными компонентами скорости течения будет нарушаться. Действительно, если положить

$$V_x \sim (\partial \overline{w}_x / \partial y)_{\text{ст}}\, y = (\tau_{\text{ст}}/\mu)\, y, \qquad (9.10.4)$$

то из уравнения неразрывности пульсационного течения следует, что

$$V_y \sim \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \overline{w}_x}{\partial y}\, y\right) dy \sim \frac{\tau_{\text{ст}}}{\mu}\, y^2. \qquad (9.10.5)$$

Отсюда следует, что в вязком подслое турбулентное трение пропорционально расстоянию от стенки в степени не меньше третьей:

$$\{y < y_1;\ V_x \sim \overline{W}_x;\ \overline{V_x V_y} \sim y^3\}. \qquad (9.10.6)$$

На рис. 9.5 приведены экспериментальные данные Е. М. Хабахпашевой и Е. С. Михайловой, показывающие, что продольная компонента турбулентной пульсации скорости действительно пропорциональна продольной компоненте осредненной скорости.

Из соотношений (9.10.2) и (9.10.6) следует, что

$$\mu_T/\mu \underset{y \to 0}{\to} \beta \eta^3. \qquad (9.10.7)$$

Для турбулентного переноса тепла в вязком подслое необходимо учесть то обстоятельство, что пульсация температуры $\Theta$ коррелирует с компонентой пульсации скорости $V_y$, т. е. в предельном случае при $y \to 0$

$$\{\overline{\Theta V_y} \sim \overline{V_y^2} \sim y^4;\ \lambda_T/\lambda \underset{y\to 0}{\to} \beta_T \Pr \eta^4\}. \tag{9.10.8}$$

При этом

$$\beta_T \approx \beta^{4/3}. \tag{9.10.9}$$

Более детальный анализ показывает, что зависимость (9.10.8) тем точнее, чем больше число Прандтля.

## 9.11. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ В ПЛОСКОМ НЕСЖИМАЕМОМ ПОТОКЕ ВБЛИЗИ СТЕНКИ

Введя в уравнение (4.2.20) выражение $\tau_T$ из соотношения (9.8.8), получим

$$\tau = \mu d\bar{w}/dy + \rho l^2 (d\bar{w}/dy)^2. \tag{9.11.1}$$

При этом в области вязкого подслоя $(y < y_1)$ $\tau \gg \tau_T$.

В переменных $\varphi = \bar{w}/v^*$ и $\eta = v^* y/\nu$ уравнения для касательных напряжений примут вид (при $dp/dx = 0$):

в области $0 < \eta < \eta_1$, где $\eta_1 = v^* y_1/\nu$,

$$d\varphi/d\eta - \tilde{\tau} = 0; \tag{9.11.2}$$

в области $\eta > \eta_1$

$$\frac{d\varphi}{d\eta} + \left(\frac{l}{y}\eta\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 - \tilde{\tau} = 0. \tag{9.11.3}$$

Здесь и далее под величиной $v^*$ понимается динамическая скорость на стенке.

Из условия монотонности профиля скоростей следует, что

$$(d\varphi/d\eta)_{\eta_1 - 0} = (d\varphi/d\eta)_{\eta_1 + 0}. \tag{9.11.4}$$

Если принять во внимание, что $y_1 \ll \delta$ и, следовательно, в области $y < y_1$ $\tilde{\tau} \approx 1$, то из выражения (9.11.3) следует, что при $\eta < \eta_1$

$$\varphi = \eta. \tag{9.11.5}$$

Из уравнения (9.11.3) следует, что при $\eta > \eta_1$

$$\varphi = \varphi_1 + \int\limits_{\eta_1}^{\eta} \frac{\sqrt{1 + 4\tilde{\tau}(l\eta/y)^2} - 1}{2(l\eta/y)^2} d\eta, \tag{9.11.6}$$

где в соответствии с выражением (9.11.5) $\varphi_1 = \eta_1$.

Рассмотрим область значений $\eta > \eta_1$, в которой достаточно точно выполняется зависимость (9.8.7) и условие $\tilde{\tau} \approx 1$. В этом случае уравнение (9.11.3) принимает вид

$$\frac{d\varphi}{d\eta} + \left(\varkappa\eta\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 - 1 = 0, \tag{9.11.7}$$

а его интеграл равен

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{1}{\varkappa}\ln(\eta/\eta_1). \tag{9.11.8}$$

Если условно профиль (9.11.5) распространить до $\eta = \eta_1$, то $\varphi_1 = \eta_1$. На рис. 9.6 в полулогарифмических координатах изображен профиль скоростей в плоском турбулентном потоке несжимаемой жидкости по ряду экспериментальных данных. По этим данным $\varkappa = 0{,}4$ и $\eta_1 = 11{,}6$. Логарифмический профиль скоростей (9.11.8) практически существует почти до оси симметрии при течении в замкнутом канале и нарушается во внешней области пограничного слоя.

Обычно логарифмический профиль скорости удобно записывать в форме

$$\varphi = C_* + (1/\varkappa) \ln \eta. \tag{9.11.9}$$

Из (9.11.8) $C_* = \eta_1 - (1/\varkappa) \ln \eta_1$, что при $\varkappa = 0{,}4$ и $\eta_1 = 11{,}6$ дает значение $C_* = 5{,}5$.

Для приближенной оценки характера изменения скорости потока в области между вязким подслоем и турбулентным ядром можно, например, принять допущение о том, что турбулентное трение на границе вязкого подслоя равно

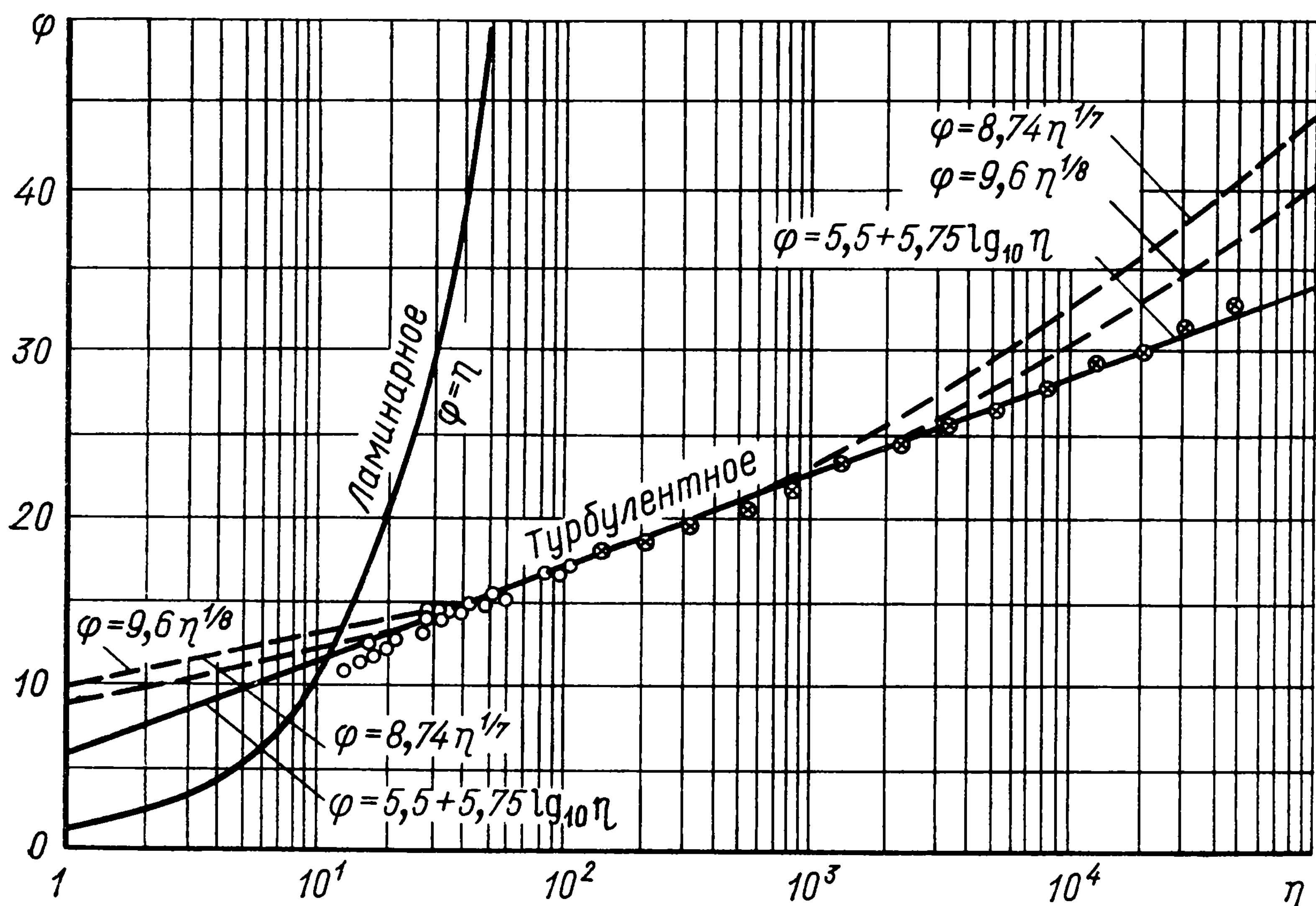



Рис. 9.6. Закон распределения скоростей в турбулентном потоке несжимаемой жидкости

нулю. Наиболее простое выражение для турбулентных касательных напряжений, удовлетворяющее этому требованию и условию, что при $y \gg y_1$ $l = \varkappa y$, имеет вид

$$\tau_T \approx \rho \varkappa^2 (y - y_1)^2 (dw/dy)^2, \tag{9.11.10}$$

чему соответствует значение

$$l \approx \varkappa (y - y_1). \tag{9.11.11}$$

Подставляя это значение $l$ в уравнение (9.11.6) и интегрируя его при $\tilde{\tau} = 1$, получаем

$$\varphi = \eta_1 + \frac{1 - \sqrt{1 + 4\varkappa^2 (\eta - \eta_1)^2}}{2\varkappa^2 (\eta - \eta_1)} + \frac{1}{\varkappa} \ln \left[2\varkappa (\eta - \eta_1) + \sqrt{1 + 4\varkappa^2 (\eta + \eta_1)^2}\right]. \tag{9.11.12}$$

При $\eta \gg \eta_1$ это уравнение переходит в (9.11.9), причем $C_* = \eta_1 + \frac{1}{\varkappa} (\ln 4\varkappa - 1)$. По этой формуле приведенным выше экспериментальным значениям $\varkappa$ и $C_*$ соответствует значение $\eta_1 = 6{,}8$. Формула (9.11.12) дает несколько более крутое изменение скорости в промежуточном слое турбулентного потока, чем это следует из опытов.

Рядом авторов (Ван-Дрист, Дейслер, Рейхардт, Лин, Левич, Лойцянский) были предложены полуэмпирические и эмпирические зависимости для определения профиля скоростей в турбулентном пограничном слое. Однако для области совместного действия молекулярной и турбулентной вязкости они или имеют весьма сложный и неудобный для дальнейших операций вид, или авторы разбивают профиль на значительное число отдельных участков.

Практически, как предложил в свое время Карман, достаточно разбить пограничный слой на три зоны, две из которых аппроксимируются логарифмическими формулами. С расчетной точки зрения в ряде случаев бывает удобным заменить универсальный закон распределения скоростей в турбулентном потоке простым степенным выражением типа

$$\varphi = A\eta^n. \qquad (9.11.13)$$

При этом логарифмический профиль скоростей является огибающей семейства степенных профилей. Коэффициенты A и $n$ могут быть вычислены из логарифмического профиля скоростей.

Степенной аппроксимации профиля скоростей соответствуют и степенные формулы для коэффициента гидравлического сопротивления. Средняя расходная скорость несжимаемой жидкости в круглой трубе

$$\bar{w} = \frac{2}{R_0^2} \int_0^{R_0} wRdR, \qquad (9.11.14)$$

где $R_0$ — радиус трубы.

Подставляя сюда распределение скоростей по формуле (9.11.13) и принимая во внимание, что $\bar{\varphi} = \sqrt{8/\zeta}$, где $\zeta$ — коэффициент гидравлического сопротивления, получаем

$$\zeta = 2^{(1+2n)/(1+n)} \left[ \frac{(n+1)(n+2)}{A} \right]^{2/(1+n)} \mathrm{Re}^{-2n/(1+n)}, \qquad (9.11.15)$$

где

$$\mathrm{Re} = 2R_0 \bar{w}/\nu. \qquad (9.11.16)$$

Для отношения средней расходной скорости к скорости на оси трубы

$$\bar{w}/w_{\text{макс}} = 2/(1+n)(n+2). \qquad (9.11.17)$$

При $n = 1/7$ получаем формулу Блазиуса

$$\zeta = 0{,}316\, \mathrm{Re}^{-0{,}25}, \qquad (9.11.18)$$

пригодную для гладких труб в области $10^4 < \mathrm{Re} < 10^5$.

Строго говоря, логарифмический профиль скоростей следует рассматривать как некоторый факт, выражающий существование универсального закона распределения скоростей $\varphi(\eta)$ при обтекании окрестности непроницаемой пластины турбулентным неограниченным изотермическим потоком несжимаемой жидкости. Во всех остальных случаях имеют место другие распределения скоростей.

## 9.12. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПЕРЕНОСОВ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКИЙ ПОТОК ГАЗА

Рассмотренные выше формулы полуэмпирической теории турбулентности построены на соотношениях типа $V \sim d\bar{w}/dy$ и $\theta \sim dT/dy$. Применяя эти соотношения к формулам (4.4.7), получаем

$$\frac{\tau_T}{\rho} = l^2 \left(\frac{dw}{dy}\right)^2 - \beta w_y l^2 \frac{dw}{dy}\frac{dT}{dy} - \beta l^3 \left(\frac{dw}{dy}\right)^2 \frac{dT}{dy}; \qquad (9.12.1)$$

$$\frac{q_T}{c_p \rho} = l^2 \frac{dw}{dy}\frac{dT}{dy} - \beta w_y l^2 \left(\frac{dT}{dy}\right)^2 - \beta l^3 \left(\frac{dT}{dy}\right)^2 \frac{dw}{dy}, \qquad (9.12.2)$$

где $\rho \equiv \bar{\rho}$, $w \equiv \bar{w}$, $T \equiv \bar{T}$, $\beta = 1/T$. Если положить $l = \varkappa y$, то при $\beta = 0$ или $dT/dy = 0$ формула (9.12.1) переходит в формулу Прандтля (9.8.7) для изотермического течения несжимаемой жидкости.

## 9.13. ПОРЯДОК ВЕЛИЧИНЫ ВЯЗКОГО ПОДСЛОЯ НА НЕПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Формула (9.8.8) показывает, что в окрестности стенки, но вне вязкого подслоя турбулентное течение непосредственно связано с градиентом осредненной скорости течения. В случае течения без градиента давления во всех точках пограничного слоя $\partial w_x/\partial y \gg \partial w_x/\partial x$ и формулы (9.8.8) и (9.8.11) можно записывать в полных дифференциалах.

При течении с градиентом давления условие $\partial w_x/\partial y \gg \partial w_x/\partial x$ выполняется только в окрестности стенки. Во внешней же области пограничного слоя может иметь место и соотношение $\partial w_x/dy \ll \partial w_x/\partial x$.

Действительно, в окрестности твердой стенки всегда существует максимум касательных напряжений и соответственно величины $\partial w_x/\partial y$. Величина же $\partial w_x/\partial x$ в этой области мала, поскольку на стенке она точно равна нулю. Во внешней области пограничного слоя величина $\partial w_x/\partial x$ имеет порядок $\partial w_0/\partial x$, а величина $\partial w_x/\partial y$ стремится к нулю.

Параметр

$$\frac{\partial w_x/\partial x}{\partial w_x/\partial y} \tag{9.13.1}$$

можно рассматривать как меру влияния продольного градиента давления на характеристики турбулентности в пограничном слое.

Выше было показано, что при $y_1 \ll y < \delta$ этот параметр всегда мал, и, следовательно, в данной области закон турбулентного трения практически автомоделен. В этом смысле можно говорить о консервативности закона турбулентного трения в окрестности стенки.

Принимая во внимание этот факт и то, что в области перехода от турбулентного ядра к вязкому подслою молекулярное и турбулентное трения соизмеримы, можем написать

$$\rho\left(y\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2 \approx \mu \frac{\partial w_x}{\partial y}\bigg|_{y=y_1}. \tag{9.13.2}$$

Отсюда следует, что внутренняя граница преобладания турбулентного закона трения определяется безразмерным комплексом

$$\dot{\mathrm{R}}\mathrm{e}_1 = \left(\frac{y^2}{\nu}\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)_1, \tag{9.13.3}$$

где индекс 1 означает, что все величины относятся к точке $y = y_1$. Поскольку в данном случае

$$y \approx y_1;\ v^* \approx \nu \partial w_x/\partial y, \tag{9.13.4}$$

то параметру (9.13.3) эквивалентен параметр

$$\eta_1 = (v^* y_1/\nu). \tag{9.13.5}$$

При $dp/dx = 0$ в области $y \ll \delta$ $v^* \approx v^*_{\text{ст}}$, т. е. при двухслойной схеме турбулентного пограничного слоя

$$\eta_1 \approx 10. \tag{9.13.6}$$

Величина $\dot{\mathrm{R}}\mathrm{e}_1$ является некоторым критическим значением числа Рейнольдса, определяющим возможность существования вязкого течения даже в крайне неблагоприятных условиях проникновения из внешней области пограничного слоя мощных трубулентных возмущений. Полагая $\eta_1 = 6$, находим, что $\dot{\mathrm{R}}\mathrm{e}_1 = 36$. Это значение действительно того же порядка, что и нижний теоретический предел устойчивости плоского ламинарного потока с наложенной на него произвольной системой возмущений. Значению $\eta_1 = 11{,}6$ соответствует число $\dot{\mathrm{R}}\mathrm{e}_1 = 134$.

## 9.14. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ТРЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА

При очень больших числах Рейнольдса турбулентный пограничный слой обладает некоторыми замечательными свойствами. В частности, при $Re \to \infty$ отношения $c_f/c_{f_0}$ и $St/St_0$ выражаются теоретическими зависимостями, не содержащими в себе констант турбулентности. Здесь $c_{f_0}$ и $St_0$ — значения коэффициента трения и числа Стентона при обтекании непроницаемой пластины неограниченным, изотермическим, турбулентным пограничным слоем.

Введем в формулу (9.8.8) значение $\tau$ из уравнения (9.12.1) и представим полученное уравнение в следующем виде:

$$\tau_{ст}\,\tilde{\tau} = \rho\,(l\partial w_x/\partial y)^2\,(1-\tilde{\beta}). \tag{9.14.1}$$

Здесь $\tilde{\beta}$ — коэффициент, учитывающий влияние пульсаций плотности, $\tilde{\tau} = \tau/\tau_{ст} = f(\xi)$ — закон распределения касательных напряжений по поперечному сечению пограничного слоя.

С другой стороны, можно написать

$$\tau_{ст} = c_f\,\rho_0\,w_0^2/2, \tag{9.14.2}$$

где $\rho_0$ — плотность потока вне динамического пограничного слоя.

Разделим обе части уравнения (9.14.1) на произведение $c_{f_0}\tilde{\tau}_0$, где $\tilde{\tau}_0$ — закон распределения касательных напряжений на непроницаемой пластине, обтекаемой изотермическим пограничным слоем. Проинтегрировав это уравнение, получим

$$\Psi = \left(\frac{1}{Z}\int\limits_{\omega_1}^{1}\sqrt{\frac{\rho\tilde{\tau}_0}{\rho_0\tilde{\tau}}}\,d\omega\right)^2. \tag{9.14.3}$$

Здесь $\Psi = (c_f/c_{f0})_{Re^{**}}$ — относительное изменение коэффициента трения при сопоставлении для условий $Re^{**} = idem$; $\omega_1$ — безразмерная скорость на границе вязкого подслоя;

$$Z = \sqrt{\frac{c_{f_0}}{2}}\int\limits_{\xi_1}^{1}\sqrt{\frac{\tilde{\tau}_0}{1-\tilde{\beta}}}\,\frac{\delta}{l}\,d\xi, \tag{9.14.4}$$

где $\xi_1 = y_1/\delta$ — безразмерная толщина вязкого подслоя.

Величины $\omega_1$ и $\xi_1$ однозначно связаны друг с другом через уравнения движения и теплопроводности в вязком подслое. Поэтому для их вычисления достаточно знать температурные функции $\lambda(T)$, $\mu(T)$ и условие устойчивости вязкого подслоя, определяющее величину $y_1$. Отсутствие строгого определения последнего и составляет основную трудность решения уравнения (9.14.3) в области конечных чисел Рейнольдса.

Следует обратить также особое внимание на определение числа Рейнольдса, при котором производится сопоставление истинного коэффициента трения $c_f$ с эталонным (стандартным) $c_{f0}$. Поскольку величины $w_0$ и $\delta^{**}$ определяются вполне стандартным образом для любого пограничного слоя, то неоднозначность выбора величины $Re^{**}$ связана с отнесением входящих в нее физических характеристик потока $\rho$ и $\mu$ к той или иной характерной температуре. Наиболее определенными, очевидно, являются или величина $T_0$, или величина $T_{ст}$.

Поскольку в общем случае имеют место зависимости

$$\xi_1 = \xi_1(Re^{**};\ \psi;\ M;\ldots); \tag{9.14.5}$$

$$\omega_1 = \omega_1(Re^{**};\ \psi;\ M;\ldots), \tag{9.14.6}$$

что непосредственно следует из уравнений движения и теплопроводности вязкого подслоя и условия его устойчивости (например, из оценки по значению $Re_1$), то единственным требованием является одинаковое определение величины

Re** при определении $\Psi$ и $\xi_1$. Известный произвол в определении Re** в настоящее время имеется только вследствие отсутствия достаточно хорошего теоретического определения функций (9.14.6). Мы в качестве основного определения примем в Re** значение кинематической вязкости при температуре $T_0$. Эти трудности снимаются при переходе к числам Re $\to\infty$, так как с ростом числа Рейнольдса его влияние на значения коэффициентов трения, тепло- и массообмена в турбулентном потоке все больше уменьшается. В качестве эталона при определении $\Psi$ естественно выбрать наиболее простое течение, каковым является продольное обтекание гладкой непроницаемой пластины потоком изотермической несжимаемой жидкости. Для этих условий

$$\left.\begin{aligned}&\rho=\tilde{\rho}_0;\ \tilde{\tau}=\tilde{\tau}_0;\ \tilde{\beta}=0;\ \Psi=1;\\ &Z_0=1-\omega_{10};\ \omega_{10}=\eta_{10}\sqrt{c_{f_0}/2};\\ &\sqrt{c_{f_0}/2}=\left(\int\limits_{\xi_{10}}^{1}\sqrt{\tilde{\tau}_0}\,\frac{d\xi}{\tilde{l}_0}+\eta_{10}\right)^{-1};\\ &\xi_{10}=\frac{\eta_{10}\tilde{\delta}_0^{**}}{\mathrm{Re}^{**}}\sqrt{2/c_{f_0}}.\end{aligned}\right\}\tag{9.14.7}$$

Здесь $\tilde{\delta}^{**}=\delta^{**}/\delta$ — относительная толщина потери импульса. Учитывая эти зависимости, формулу (9.14.4) можно записать в виде

$$Z=\left(\int\limits_{\xi_{10}}^{1}\sqrt{\tilde{\tau}_0}\,\frac{d\xi}{\tilde{l}_0}+\eta_{10}\right)^{-1}\int\limits_{\xi_1}^{1}\sqrt{\frac{\tilde{\tau}_0}{1-\tilde{\beta}}}\,\frac{d\xi}{\tilde{l}}.\tag{9.14.8}$$

Рассмотрим свойства интегралов (9.14.5) и (9.14.8) при очень больших числах Рейнольдса. Последнее отнюдь не означает, что речь идет о больших скоростях течения или значительной протяженности обтекаемых потоком тел. Сколь угодно большие числа Рейнольдса могут иметь место при вполне конечных скоростях течения и малых толщинах пограничного слоя, если рассматривать жидкость с «исчезающей вязкостью», т. е. когда коэффициент вязкости стремится к нулю, но строго в нуль не обращается.

Из формулы (9.13.3) следует, что $\xi_1\sim\nu$, а из уравнения (9.12.1), что

$$\tilde{\beta}\sim\left(\frac{w_y}{w_0}+\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}\tilde{\tau}c_f}\right)\frac{\Delta T}{T}.\tag{9.14.9}$$

Полагая далее

$$w_y/w_0\sim w_0\,d\delta/dx\sim w_0(\delta/\delta^{**})\,c_f,$$

получаем

$$\tilde{\beta}\sim\left(\frac{w_0}{\tilde{\delta}^{**}}c_f+\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}\tilde{\tau}c_f}\right)\frac{\Delta T}{T}.\tag{9.14.10}$$

Поскольку при обтекании гладкой поверхности коэффициент трения с ростом числа Рейнольдса стремится к нулю, из этих оценок следует, что в потоке с «исчезающей вязкостью» имеют место условия

$$\{\mathrm{Re}\to\infty,\ c_f\to 0,\ \xi_1\to 0,\ \omega_1\to 0,\ \tilde{\beta}\to 0\},\tag{9.14.11}$$

т. е. происходит вырождение вязкого подслоя и пульсаций плотности. Соответственно при Re $\to\infty$ из выражения (9.14.3) следует, что

$$\int\limits_0^1\sqrt{\frac{\rho\tilde{\tau}_0}{\rho_0\tilde{\tau}\Psi}}\,d\omega=Z_\infty,\tag{9.14.12}$$

где

$$Z_\infty = \left( \int\limits_{\xi_{10}\to 0}^{1} \sqrt{\tilde{\tau}_0}\, \frac{d\xi}{\tilde{l}_0} \right)^{-1} \int\limits_{\xi_1 \to 0}^{1} \sqrt{\tilde{\tau}_0}\, \frac{d\xi}{\tilde{l}}. \qquad (9.14.13)$$

Из выясненных ранее свойств турбулентного пограничного слоя следует, что

$$\{\text{при } \xi \to \xi_1 \quad \tilde{\tau}_0 \to 1, \ \tilde{l} \to \varkappa\xi; \ \text{при } \xi \to 1 \quad \tilde{\tau}_0 \to 0\}. \qquad (9.14.14)$$

Кроме того, по своей физической природе зависимости $\tilde{\tau}_0(\xi)$ и $\tilde{l}\ (\xi)$ являются непрерывными и гладкими. Поэтому подынтегральные функции в уравнении (9.14.12) можно аппроксимировать полиномом вида

$$\sqrt{\tilde{\tau}_0}/\tilde{l} = \frac{1}{\varkappa\xi} + \sum a_i \xi^i \ (1 \leqslant i \leqslant n), \qquad (9.14.15)$$

в котором на интервале $0 < \xi < 1$

$$\frac{1}{\varkappa} > \sum a_i \xi^i > 0 \ (1 \leqslant i \leqslant n). \qquad (9.14.16)$$

Вводя значение $\sqrt{\tau_0}$ из уравнения (9.14.15) в уравнение (9.14.13), находим, что

$$Z_\infty = \ln \xi_1 / \ln \xi_{10}, \text{ где } \xi_1 \to 0; \ \xi_{10} \to 0. \qquad (9.14.17)$$

Таким образом, при $\mathrm{Re} \to \infty$ в интегральном соотношении (9.14.8) выпадают члены, содержащие коэффициенты $a_i$, которые в общем случае зависят от возмущающих факторов.

При течении без градиента давления из формулы (9.13.5) следует

$$\ln \xi_1 = -\ln \mathrm{Re}^{**} + \ln \eta_1 \tilde{\delta}^{**} \sqrt{2/c_f}. \qquad (9.14.18)$$

Из логарифмического профиля скоростей следует, что при $\mathrm{Re} \to \infty$

$$\tilde{\delta}^{**} \sqrt{2/c_f} \to 1/\varkappa,$$

т. е. второй член формулы (9.14.18) — число ограниченное и

$$\ln \xi_{10} \,|_{\mathrm{Re}\to\infty} \to -\ln \mathrm{Re}^{**}. \qquad (9.14.19)$$

Таким образом, при весьма больших числах Рейнольдса существует предельный относительный закон трения, выражаемый интегральным соотношением Кутателадзе—Леонтьева:

$$\mathrm{Re} \to \infty; \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{\rho\tilde{\tau}_0}{\rho_0 \tilde{\tau} \Psi}}\, d\omega \to -\frac{\ln \xi_1}{\ln \mathrm{Re}^{**}}; \quad \xi_1 \to 0. \qquad (9.14.20)$$

Для течения без градиента давления это соотношение принимает вид

$$\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{\rho}{\Psi \rho_0 \tilde{\tau}_{\xi \ll 1}}}\, d\omega \xrightarrow[f=0,\ \mathrm{Re}\to\infty]{} 1. \qquad (9.14.21)$$

Отношение $\tau_0/\tau$ в этом интеграле легко определяется в соответствии с соображениями, изложенными в разд. 9.6. Отношение $\rho/\rho_0$ связано с отношением $T/T_0$ через уравнение состояния. Для совершенного газа, поскольку в пограничном слое $\partial p/\partial y = 0$, $\rho/\rho_0 = T_0/T$.

При наличии приближенного подобия полей скоростей и энтальпий торможения можем записать:

$$T/T_0 = \psi - \Delta\psi\varepsilon\omega - (\psi^* - 1)\,\omega^2. \qquad (9.14.22)$$

Здесь $\psi = T_{\text{ст}}/T_0$ — так называемый первый температурный фактор; $\psi^* = T^*_{\text{ст}}/T_0$ — кинетический температурный фактор; $\Delta\psi = \psi - \psi^*$ — фактор теплообмена; $\varepsilon$ — коэффициент неподобия полей температур и скоростей.

Более подробно о величинах $\psi$ и $\psi^*$ будет сказано в последующих главах. Значение $\varepsilon$ в первом приближении равно отношению $(\delta/\delta_T)^n$, где $n$ — показатель степени профиля скоростей. В случае обтекания пластины газом при условии, что и динамический, и тепловой слой развиваются с ее передней кромки, $\varepsilon \approx 1$.

Аналогично уравнению (9.14.3) из формулы (9.9.2) следует относительный закон теплообмена

$$\Psi_S = \left( \frac{1}{Z_T} \int_{\xi_{T_1}}^{1} \sqrt{\frac{c_p \rho \tilde{q}_0}{c_p \rho_0 \tilde{q}} \frac{\partial \omega}{d\xi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}} \, d\xi_T \right)^2, \qquad (9.14.23)$$

где

$$Z_T = \sqrt{\mathrm{St}_0} \int_{\xi_1}^{1} \sqrt{\frac{\tilde{q}_0 \varepsilon_l}{1 - \tilde{\beta}_T} \frac{d\xi_T}{\tilde{l}_T}}\,. \qquad (9.14.24)$$

здесь $\tilde{q} = q/q_{\text{ст}}$ — относительная плотность теплового потока в точке $\xi_T = y/\delta_T$; $\mathrm{St} = \alpha/c_{p_0}\rho_0 w_0$ — число Стентона; $\varepsilon_l = l_T/l$ — коэффициент неподобия тепловой и гидродинамической длин пути смешивания. Свойства величин $\tilde{\beta}_T$, $\xi_{T_1}$, $Z_T$ аналогичны свойствам $\beta$, $\xi_1$, $Z$, т. е. при $\mathrm{Re} \to \infty$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{c_p \rho \tilde{q}_0}{c_{p_0} \rho_0 \tilde{q} \Psi_S} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}} \, d\xi_T \to Z_{T_\infty}. \qquad (9.14.25)$$

При этом, естественно, в последнем уравнении распределения скорости и температуры нужно брать для условий турбулентного течения с вырожденным вязким подслоем.

Предельные законы теплообмена в своей общей формулировке сложнее законов трения. Поэтому при значительных нарушениях подобия температур и скоростей функции $\Psi$ и $\Psi_S$ могут существенно различаться.

Так, например, в области диффузорного течения $(dp/dx > 0)$ турбулентного пограничного слоя с постоянными физическими свойствами значение $\Psi$ может быть существенно меньше единицы при любых числах Рейнольдса, в то время как значение $\Psi_S$ при конечных числах Рейнольдса пограничного слоя почти не меняется с ростом градиента давления.

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*


1. **Бетчелор Д.** Теория однородной турбулентности. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
2. **Булеев Н. И.** Теоретическая модель механизма турбулентного теплообмена в потоках жидкости.— В сб.: Теплопередача. М., Изд-во АН СССР, 1962, с. 64.
3. **Кутателадзе С. С.** Пристенная турбулентность. Новосибирск, «Наука», 1973.
4. **Линь Цзя-цзяо.** Теория гидродинамической устойчивости. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
5. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965; ч. 2. М., «Наука», 1967.
6. **Проблемы** турбулентности. Сборник пер. статей. М.— Л., ОНТИ, 1936. Авт.: О Рейнольдс, Л. Прандтль, К. Тейлор, Т. Карман и др.
7. **Ротта И.** Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости. Пер. с англ. Л., «Судостроение», 1967.
8. **Таунсенд А.** Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
9. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. Пер. с нем. М., «Наука», 1969.

*Глава* **10**

# ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ВНЕШНЕМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

## 10.1. ХАРАКТЕР ВНЕШНЕГО ОБТЕКАНИЯ

При внешнем обтекании тел потоком жидкости наблюдаются две существенно различные формы течения: безотрывное и отрывное обтекание. В последнем случае струи жидкости отделяются от поверхности тела и образуют в непосредственной близости от нее вихревую область. Наличие того или другого типа обтекания зависит как от формы тела, так и от числа Рейнольдса.

Явление отрыва пограничного слоя от непроницаемой поверхности связано с взаимодействием поля давления и силы трения в пристенной области. Внутри пограничного слоя скорость течения всегда меньше скорости на его внешней границе. Продольный же градиент давления постоянен по всему поперечному сечению пограничного слоя и связан только со скоростью во внешней области. Для стационарного течения эта связь выражается формулой (9.5.9). Поэтому при диффузорном течении, когда $dp/dx > 0$, кинетическая энергия потока внутри пограничного слоя недостаточна для полного преодоления направленного ему навстречу действия поля давления. В результате положительный градиент давления вызывает внутри пограничного слоя торможение, а затем остановку и обратный ток жидкости около обтекаемого ею тела. Точка, в которой значение величины $\partial w_x/\partial y$ на стенке обращается в нуль, характеризует начало возникновения обратного тока и называется точкой отрыва. Очевидно, что в точке обращения течения трение равно нулю (рис. 10.1).

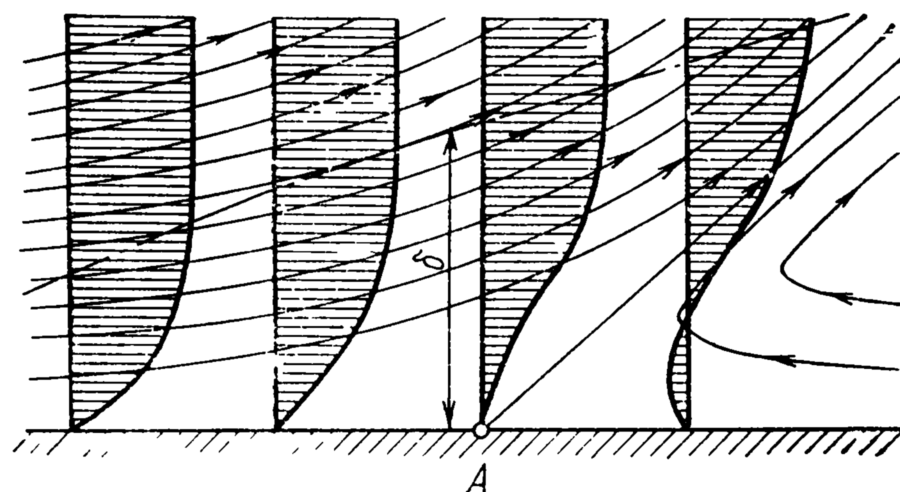



Рис. 10.1. Схема деформации профилей в диффузорной области течения пограничного слоя

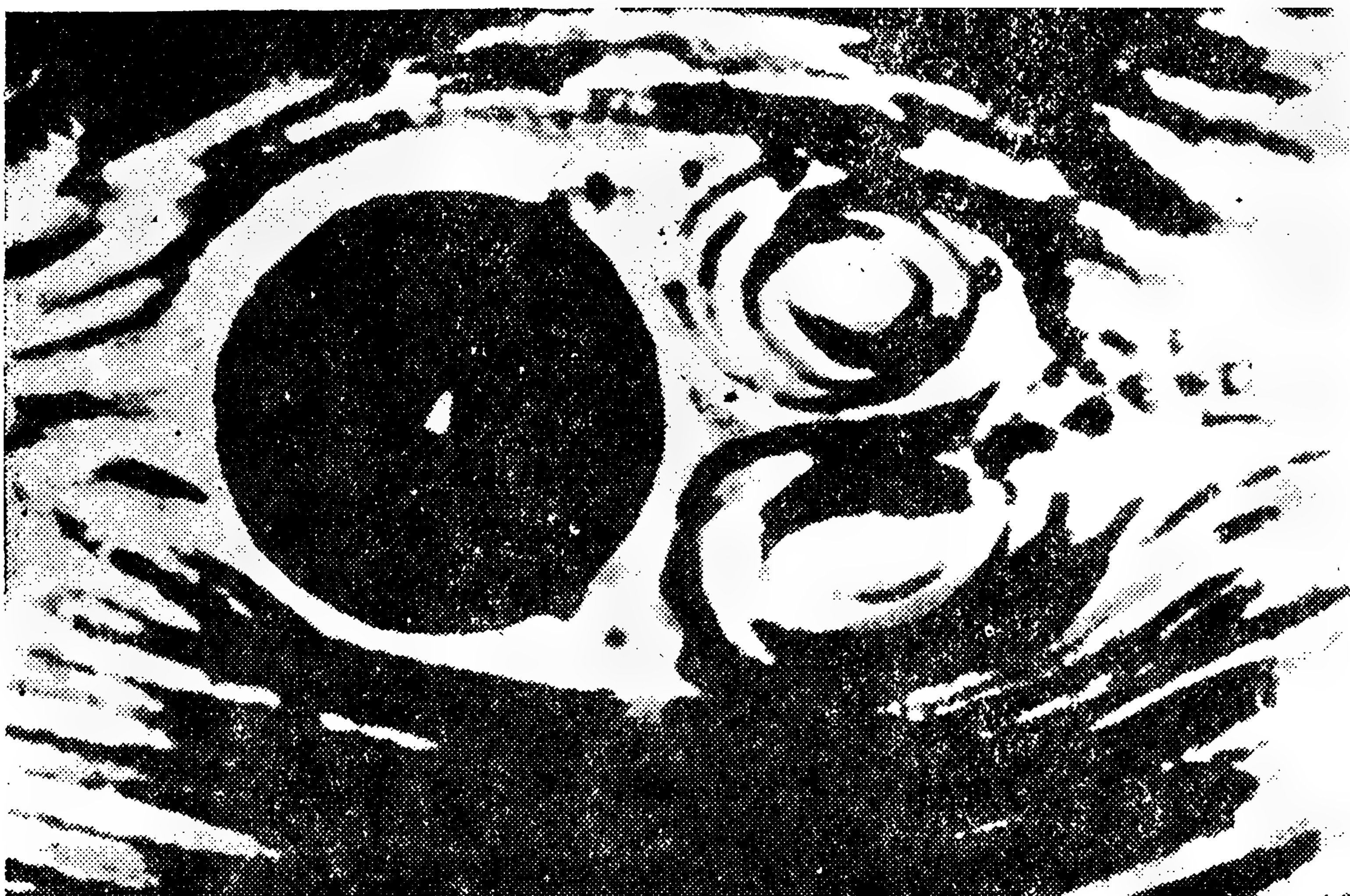


Рис. 10.2. Фотография отрывного обтекания цилиндра.

В действительности отрыв пограничного слоя происходит, конечно, не в какой-то точно фиксированной точке, а охватывает некоторую конечную область. За областью отрыва возникает вихревое движение жидкости, сопровождающееся резким возрастанием общего аэродинамического сопротивления тела (рис. 10.2).

При конфузорном течении ($dp/dx < 0$) поток ускоряется, направление движения жидкости совпадает с направлением действия поля давления и условия, необходимые для отрыва пограничного слоя, отсутствуют. Пограничный слой

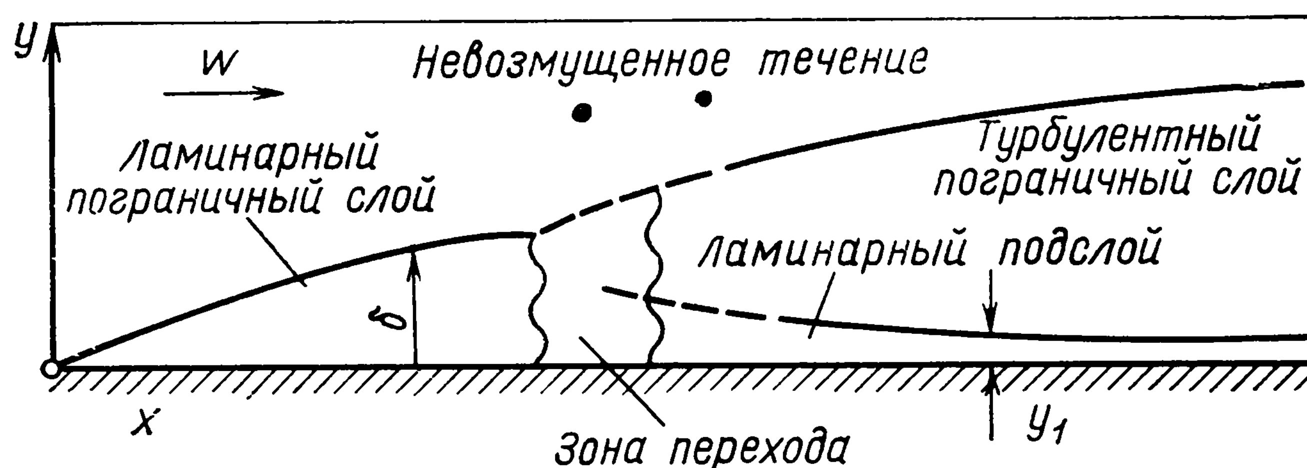



Рис. 10.3. Схема пограничного слоя

на внешней поверхности обтекаемого тела не следует смешивать с вязким подслоем в турбулентном потоке. Пограничный слой может быть как ламинарным, так и турбулентным (рис. 10.3).

Таким образом, внешнее обтекание тела неограниченным потоком жидкости существенно отличается от течения в замкнутых каналах, в частности, тем, что на теле достаточной протяженности возможно существование в различных его областях как ламинарного, так и переходного и развитого турбулентного течений.

## 10.2. ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛАСТИНЕ (ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ)

Рассмотрим пластину, продольно-обтекаемую ламинарным пограничным слоем жидкости с постоянными физическими свойствами. Скорость течения достаточно мала, и теплотой трения можно пренебречь, течение стационарное, температура на всей поверхности пластины одна и та же, $\partial p/\partial x = 0$.

Уравнения пограничного слоя имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &w_x\,\partial w_x/\partial x + w_y\,\partial w_x/\partial y = \nu\partial^2 w_x/\partial y^2;\\ &\partial w_x/\partial x + \partial w_y/\partial y = 0;\\ &w_x\,\partial T/\partial x + w_y\,\partial T/\partial y = a\partial^2 T/\partial y^2 \end{aligned}\right\} \tag{10.2.1}$$

при граничных условиях: $y = 0$, $w_x = 0$, $w_y = 0$, $T = T_{\text{ст}}$; $y = \infty$, $w_x = w_0$, $T = T_0$.

Эти уравнения преобразуются в два обыкновенных дифференциальных уравнения, если ввести новые переменные:

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{w_0}{\nu x}}\,y;\\ &\zeta(\xi) = \frac{\psi}{\sqrt{w_0 \nu x}};\\ &\vartheta(\xi) = \frac{T_{\text{ст}} - T}{T_{\text{ст}} - T_0}, \end{aligned}\right\} \tag{10.2.2}$$

где $\psi$ — функция тока, связанная с компонентами скорости течения известными соотношениями

$$w_x = \partial\psi/\partial y; \quad w_y = -\partial\psi/\partial x. \tag{10.2.3}$$

В новых переменных система уравнений принимает вид

$$\left.\begin{aligned} & d^3\zeta/d\xi^3+\zeta d^2\zeta/d\xi^2=0; \\ & d^2\vartheta/d\xi^2+\Pr\zeta d\vartheta/d\xi=0 \end{aligned}\right\} \qquad (10.2.4)$$

при граничных условиях: $\xi=0,\ \zeta=0,\ \zeta'=0,\ \vartheta=0;\ \xi=\infty,\ \zeta'=2,\ \vartheta=1$.

Профиль скоростей находят через функцию $\zeta$, которая впервые была вычислена Блазиусом. Компоненты скорости течения находят по формулам

$$\left.\begin{aligned} & w_x=\zeta' w_0/2; \\ & w_y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu w_0}{x}}\,(\xi\zeta'-\zeta). \end{aligned}\right\} \qquad (10.2.5)$$

В табл. 10.1 приведены значения $\zeta$ по вычислениям Хауерта.

Таблица 10.1

**Значения функции $\zeta$ для ламинарного пограничного слоя на плоской продольно-обтекаемой пластине**

| $\xi=\frac{y}{2}\sqrt{\frac{w_0}{\nu x}}$ | $\zeta$ | $\zeta'=\frac{w_x}{w_0}$ | $\zeta''$ | $\xi=\frac{y}{2}\sqrt{\frac{w_0}{\nu x}}$ | $\xi$ | $\zeta'=\frac{w_x}{w_0}$ | $\zeta''$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0,33206 | 2,0 | 2,30576 | 0,95552 | 0,06424 |
| 0,1 | 0,00664 | 0,06641 | 0,33199 | 2,1 | 2,49806 | 0,96696 | 0,05052 |
| 0,2 | 0,02656 | 0,13277 | 0,33147 | 2,2 | 2,69238 | 0,97587 | 0,03897 |
| 0,3 | 0,05974 | 0,19894 | 0,33008 | 2,3 | 2,88826 | 0,98269 | 0,02948 |
| 0,4 | 0,10611 | 0,26471 | 0,32739 | 2,4 | 3,08534 | 0,98779 | 0,02187 |
| 0,5 | 0,16557 | 0,32979 | 0,32301 | 2,5 | 3,28329 | 0,99155 | 0,01591 |
| 0,6 | 0,23795 | 0,39378 | 0,31659 | 2,6 | 3,48189 | 0,99425 | 0,01134 |
| 0,7 | 0,32298 | 0,45627 | 0,30787 | 2,7 | 3,68094 | 0,99616 | 0,00793 |
| 0,8 | 0,42032 | 0,51676 | 0,29667 | 2,8 | 3,88131 | 0,99748 | 0,00543 |
| 0,9 | 0,52952 | 0,57477 | 0,28923 | 2,9 | 4,07990 | 0,99838 | 0,00365 |
| 1,0 | 0,65003 | 0,62977 | 0,26675 | 3,0 | 4,27964 | 0,99898 | 0,00240 |
| 1,1 | 0,78120 | 0,68132 | 0,24835 | 3,1 | 4,48948 | 0,99937 | 0,00155 |
| 1,2 | 0,92230 | 0,72899 | 0,22809 | 3,2 | 4,67938 | 0,99961 | 0,00098 |
| 1,3 | 1,07252 | 0,77246 | 0,20646 | 3,3 | 4,87931 | 0,99977 | 0,00061 |
| 1,4 | 1,23099 | 0,81152 | 0,18401 | 3,4 | 5,07928 | 0,99987 | 0,00037 |
| 1,5 | 1,39682 | 0,84605 | 0,16136 | 3,5 | 5,27926 | 0,99992 | 0,00022 |
| 1,6 | 1,56911 | 0,87609 | 0,13913 | 3,6 | 5,47925 | 0,99996 | 0,00013 |
| 1,7 | 1,74696 | 0,90177 | 0,11788 | 3,7 | 5,67924 | 0,99998 | 0,00007 |
| 1,8 | 1,92954 | 0,92333 | 0,09809 | 3,8 | 5,87924 | 0,99999 | 0,00004 |
| 1,9 | 2,11605 | 0,94112 | 0,08013 | 3,9 | 6,07923 | 1,00000 | 0,00002 |
| | | | | 4,0 | 6,27923 | 1,00000 | 0,00001 |

Решение уравнения, определяющего поле температур, имеет вид

$$\vartheta=\frac{\int\limits_0^\xi \exp\left(-\Pr\int\limits_0^\xi \zeta d\xi\right)d\xi}{\int\limits_0^\infty \exp\left(-\Pr\int\limits_0^\xi \zeta d\xi\right)d\xi} \qquad (10.2.6)$$

Отсюда

$$\alpha_x=-\frac{\lambda}{T_{\text{ст}}-T_0}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{\text{ст}}=\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{w_0}{\nu x}}\,f(\Pr), \qquad (10.2.7)$$

где

$$f(\Pr)=\left[\int\limits_0^\infty \exp\left(-\Pr\int\limits_0^\xi \zeta d\xi\right)d\xi\right]^{-1}. \qquad (10.2.8)$$

Средний коэффициент теплоотдачи по пластине определяется формулой

$$\bar{\alpha}=\frac{1}{L}\int\limits_0^L \alpha_x\,dx, \qquad (10.2.9)$$

откуда

$$(\bar{\alpha}/\lambda)\,L=f\,(\mathrm{Pr})\left(\frac{w_0 L}{\nu}\right)^{1/2}. \qquad (10.2.10)$$

Значения функции $f$ (Pr) приведены в табл. 10.2.

Таблица 10.2

**Значения $f$ (Pr) для ламинарного пограничного слоя на плоской продольно-обтекаемой пластине**

| Pr | 0,003 | 0,005 | 0,01 | 0,1 | 0,7 | 1,0 | 3,0 | 7,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ (Pr) | 0,0556 | 0,0770 | 0,104 | 0,266 | 0,586 | 0,664 | 0,956 | 1,29 |
| Pr | 10,0 | 15,0 | 50 | 100 | 300 | 500 | 1000 | 3000 |
| $f$ (Pr) | 1,46 | 1,67 | 2,50 | 3,14 | 4,52 | 5,32 | 6,54 | 9,60 |

Для гидродинамического пограничного слоя точное решение дает значение

$$c_f=0{,}664\,(\nu/w_0\,x)^{0,5} \qquad (10.2.11)$$

или

$$c_f=0{,}44/\mathrm{Re}^{**}. \qquad (10.2.12)$$

## 10.3. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПЛАСТИНЫ, ОБТЕКАЕМОЙ ЛАМИНАРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ (ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ)

Из условия

$$\frac{c_f}{2}=\frac{\mu_{\text{ст}}}{\rho_0\,w_0^2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)_{\text{ст}} \qquad (10.3.1)$$

получим

$$c_f=\frac{2\tilde{\delta}^{**}}{\mathrm{Re}^{**}}\left(\tilde{\mu}\,\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right)_{\text{ст}}. \qquad (10.3.2)$$

Здесь $\mathrm{Re}^{**}=w_0\delta^{**}/\nu_0$, $\omega=w_x/w_0$, $\xi=y/\delta$, $\tilde{\mu}=\mu/\mu_0$, $\tilde{\delta}^{**}=\delta^{**}/\delta$ — относительные параметры пограничного слоя.

При постоянных физических свойствах потока и аппроксимации профиля скоростей полиномом (9.6.10) в рассматриваемом случае имеем

$$\{\Lambda=0;\quad \omega=2\xi-2\xi^3+\xi^4;\quad \tilde{\delta}^{**}=0{,}1175;\quad (\tilde{\mu}\partial\omega/\partial\xi)_{\text{ст}}=2\}. \qquad (10.3.3)$$

Подставляя отсюда соответствующие величины в уравнение (10.3.2), находим, что в данном приближении

$$c_f=0{,}47/\mathrm{Re}^{**}, \qquad (10.3.4)$$

что на 6% отличается от точного решения. Уравнение импульсов (9.5.16) при $\partial p/\partial x=0$ принимает весьма простую форму:

$$d\delta^{**}/dx=c_f/2. \qquad (10.3.5)$$

При автомодельности скоростей и температур относительно продольной координаты (т. е. одинаковости функций $\omega$ ($\xi$) и $\vartheta$ ($\xi$) для всех поперечных сечений пограничного слоя)

$$d\delta^{**}/dx=\tilde{\delta}^{**}\,d\delta/dx;\quad (\tilde{\mu}\partial\omega/\partial\xi)_{\text{ст}}=\mathrm{const}. \qquad (10.3.6)$$

Соответственно из равенства (10.3.5) и уравнения (10.3.2) получим:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\delta} &= \sqrt{\tilde{\delta}_0^2 + 2\,\frac{(\tilde{\mu}\partial\omega/\partial\xi)_{\text{ст}}}{\tilde{\delta}^{**}\,\mathrm{Re}_x}}\,;\\ c_f &= 2\,\frac{(\tilde{\mu}\partial\omega/\partial\xi)_{\text{ст}}}{\tilde{\delta}\,\mathrm{Re}_x}\,.\end{aligned}\right\} \qquad (10.3.7)$$

Здесь $\tilde{\delta} = \delta/x$ — относительная толщина пограничного слоя; $\tilde{\delta}_0 = \delta_0/x$, где $\delta_0$ — значение $\delta$ при $x = 0$; $\mathrm{Re}_x = w_0 x/\nu_0$ — число Рейнольдса, где $x$ — текущее значение координаты. При $\rho = \text{const}$, $\tilde{\mu} = 1$, $\delta_0 = 0$ в приближении (10.3.3)

$$\delta = 5{,}83/\sqrt{\mathrm{Re}_x}, \quad c_f = 0{,}686/\sqrt{\mathrm{Re}_x}. \qquad (10.3.8)$$

## 10.4. ТЕПЛООТДАЧА ПЛАСТИНЫ, ОБТЕКАЕМОЙ ЛАМИНАРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ ПРИ Pr$\geqslant$1 (ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ)

Вследствие аналогичности граничных условий вид интерполяционных профилей скоростей и температур оказывается одинаковым, т. е. при полиноме четвертой степени

$$\left.\begin{aligned}w_x/w_0 &= 2y/\delta - 2(y/\delta)^3 + (y/\delta)^4;\\ (T_{\text{ст}} - T)/(T_{\text{ст}} - T_0) &= 2y/\delta_T - 2(y/\delta_T)^3 + (y/\delta_T)^4.\end{aligned}\right\} \qquad (10.4.1)$$

Здесь следует обратить внимание на то существенное обстоятельство, что, несмотря на аналогичность выражений (10.4.1), поля скоростей и температур, вообще говоря, не подобны, поскольку при $\mathrm{Pr} \neq 1$ $\delta_T \neq \delta$.

Перепишем уравнение энергии (9.5.15) в виде (при $dw_0/dx = d\Delta T/dx = 0$)

$$c_p\,\rho w_0 (T_{\text{ст}} - T_0)\,\frac{d\delta_T^{**}}{dx} = \lambda \left[\frac{\partial (T - T_0)}{\partial y}\right]_{\text{ст}} \qquad (10.4.2)$$

и подставим в него значения $w_x$, $T$ и $dT/dy$ из уравнения (10.4.1).

После интегрирования получим

$$w_0\,\frac{d}{dx}\left\{\frac{\delta_{\text{т}}^2}{\delta}\left[0{,}133 - 0{,}0214\left(\frac{\delta_{\text{т}}}{\delta}\right)^2 + 0{,}0055\left(\frac{\delta_{\text{т}}}{\delta}\right)^3\right]\right\} = \frac{2a}{\delta_{\text{т}}}\,. \qquad (10.4.3)$$

При $\mathrm{Pr} \geqslant 1$ возмущения, обусловленные молекулярным трением, распространяются на большую область, чем возмущения, обусловленные молекулярной теплопроводностью.

Следовательно, при $\nu \geqslant a$ $\delta \geqslant \delta_T$ и значение отношения $\delta_T/\delta$ лежит между единицей и нулем. При этом значение величины, стоящей в квадратных скобках последнего уравнения, меняется в пределах от 0,133 до 0,117, т. е. всего на 14%. Принимая в первом приближении среднее значение, равное 0,125, приводим уравнение (10.4.3) к весьма простому выражению относительно $\delta_T^3$:

$$\frac{d(\delta_T^3)}{dx} + \frac{3}{2}\,\delta_T^3\,\delta\,\frac{d(1/\delta)}{dx} - 24\,\frac{a\delta}{w_0} = 0. \qquad (10.4.4)$$

Находя интеграл этого обыкновенного дифференциального уравнения относительно $\delta_T^3$ и подставляя в него значение $\delta$ из уравнений (10.3.7), окончательно получаем

$$\delta_T^3/x^{3/4} = C + 186 a\nu^{1/2}\,x^{3/4}/w_0^{3/2}. \qquad (10.4.5)$$

Если на входной кромке ($x = 0$) толщина пограничного слоя $\delta_T = 0$, то $C = 0$ и

$$\delta_T = 5{,}72\,(a/\nu)^{1/3}\,(\nu x/w_0)^{1/2}. \qquad (10.4.6)$$

Поскольку при обтекании пластины средой, имеющей $\Pr = 1$, должно иметь место точное подобие полей температур и скоростей, то в этом случае $\delta_T = \delta$. Сопоставляя формулы (10.3.7) и (10.4.6), находим, что с точностью до 2% при ламинарном пограничном слое и $\Pr \geqslant 1$

$$\delta/\delta_T = \Pr^{1/3}. \tag{10.4.7}$$

Коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \frac{\lambda}{T_0 - T_{\text{ст}}} \left[\frac{\partial (T - T_{\text{ст}})}{\partial y}\right]_{y=0} = \frac{2\lambda}{\delta_{\text{т}}}, \tag{10.4.8}$$

или

$$\text{St} = 2\tilde{\delta}_T^{**}/\text{Pe}^{**}, \tag{10.4.9}$$

где

$$\text{Pe}^{**} = w_0 \delta_T^{**}/a. \tag{10.4.10}$$

Подставляя в уравнение (10.4.8) значение $\delta_T$, получаем

$$\alpha_x = 0{,}35\lambda \Pr^{1/3} (w_0/\nu x)^{1/2}. \tag{10.4.11}$$

Средний коэффициент теплоотдачи пластины длиной $L$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L}\int_0^L \alpha_x\, dx = 0{,}7\lambda \Pr^{1/3} (w_0/\nu L)^{1/2} \tag{10.4.12}$$

или в критериальной форме, полагая $\overline{\text{Nu}} = \bar{\alpha}L/\lambda$ и $\text{Re} = w_0 L/\nu$, можно записать

$$\overline{\text{Nu}} = 0{,}7\Pr^{1/3}\text{Re}^{1/2}. \tag{10.4.13}$$

Второе приближение, дающее практически точный результат, получаем, вводя в квадратные скобки формулы (10.4.3) значение $\delta_T/\delta$ по формуле (10.4.7) первого приближения.

Решение имеет вид

$$\overline{\text{Nu}} = 0{,}715\,(\Pr - 0{,}161\Pr^{1/3} + 0{,}041)^{1/3}\,\text{Re}^{1/2}. \tag{10.4.14}$$

Эта формула дает практически полное совпадение с точным решением, которое при $\Pr > 0{,}6$ хорошо аппроксимируется формулой

$$\overline{\text{Nu}} = 0{,}664\Pr^{1/3}\text{Re}^{1/2}. \tag{10.4.15}$$

## 10.5. ТЕПЛООТДАЧА ПЛАСТИНЫ, ОБТЕКАЕМОЙ ЛАМИНАРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ ПРИ $\Pr \ll 1$ (ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ)

При $\Pr < 1$ $\delta < \delta_T$, т. е. тепловой пограничный слой проникает в область гидродинамически невозмущенного потока. Если свободная турбулентность этого потока мала, то профиль температур (10.4.1) можно сохранить и в данном случае, причем интеграл (9.5.5), определяющий величину $\delta_T^{**}$, распадается на две области — область $0 < y < \delta$, в которой скорость течения меняется от 0 до $\omega_0$, и область $y \geqslant \delta$, в которой скорость течения равна скорости невозмущенного потока. Отсюда

$$\frac{2a}{w_0 \delta_T} = \frac{d}{dx}\left\{\int_0^\delta \left[2\frac{y}{\delta} - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4\right]\left[1 - 2\frac{y}{\delta_T} + 2\left(\frac{y}{\delta_T}\right)^3 - \left(\frac{y}{\delta_T}\right)^4\right] dy + \right.$$

$$\left. + \int_\delta^{\delta_T} \left[1 - 2\frac{y}{\delta_T} + 2\left(\frac{y}{\delta_T}\right)^3 - \left(\frac{y}{\delta_T}\right)^4\right]\right\} dy,$$

или

$$\frac{2a}{w_0\delta_T}=\frac{d}{dx}\left\{0{,}300\delta_T\left[1-\frac{\delta}{\delta_T}+0{,}480\left(\frac{\delta}{\delta_T}\right)^2-0{,}0735\left(\frac{\delta}{\delta_T}\right)^4-0{,}146\left(\frac{\delta}{\delta_T}\right)^5\right]\right\}. \tag{10.5.1}$$

Определяя порядок отношения $\delta/\delta_T$ по формуле (10.4.7), находим, что уже при $\Pr \leqslant 0{,}1$ в уравнении (10.5.1) можно пренебречь членами, содержащими $\delta/\delta_T$ в степенях, больших единицы. Интегрируя уравнение (10.5.1) при этом условии, получаем

$$\delta_T \approx 3{,}65\sqrt{\frac{ax}{(1-\delta/\delta_T)\,w_0}}. \tag{10.5.2}$$

При $\Pr \to 0$ $\delta/\delta_T \to 0$, чему соответствует значение толщины теплового слоя

$$\delta_T = 3{,}65\sqrt{ax/w_0}. \tag{10.5.3}$$

Сопоставление последней формулы с первой формулой (10.3.8) показывает, что при $\Pr \to 0$

$$\delta/\delta_T \to 1{,}6\,\Pr^{1/2}. \tag{10.5.4}$$

Ниже приведено сопоставление значений величин $\sqrt{1-\delta/\delta_T}$, рассчитанных при помощи формул (10.4.7) и (10.5.4):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr=\nu/a$ . . . . . . . . | 0,1 | 0,05 | 0,01 | 0,005 | 0 |
| $\sqrt{1-\Pr^{1/3}}$ . . . . . . | 0,731 | 0,795 | 0,885 | 0,910 | 1 |
| $\sqrt{1-1{,}6\Pr^{1/2}}$ . . . . | 0,700 | 0,795 | 0,915 | 0,943 | 1 |

Как видно, для области чисел Pr, характерных для жидких металлов, практически можно пользоваться любым из этих приближений.

Выбирая более простое расчетное выражение, после подстановки значения $\delta_T$ из формул (10.4.7) в (10.5.4) и осреднения по длине пластины получаем

$$\overline{\mathrm{Nu}} \approx 1{,}1\sqrt{(1-\Pr^{1/3})\,\mathrm{Pe}}, \tag{10.5.5}$$

где

$$\mathrm{Pe} = w_0 L/a. \tag{10.5.6}$$

Таким образом, в области $0 < \Pr \ll 1$ увеличение числа Прандтля несколько снижает интенсивность теплоотдачи по сравнению с решением для потенциального обтекания ($w$ = const, $\Pr = 0$). Объясняется это тем, что при $\Pr > 0$ в данном решении учитывается деформация профиля скорости в непосредственной окрестности стенки.

## 10.6. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПЛАСТИНЫ, ОБТЕКАЕМОЙ ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Как уже указывалось в гл. 9, отклонение истинного изотермического турбулентного профиля скоростей на пластине от логарифмического имеет место только в области значений $0{,}9 < \omega < 1$. Поэтому закон трения при продольном обтекании пластины турбулентным пограничным слоем с постоянными физическими свойствами можно вычислить из распределения скоростей по уравнению (9.11.9). Имеем

$$\eta > 11{,}6;\quad \omega=\sqrt{\frac{c_f}{2}}\left(C_* + \frac{1}{\varkappa}\ln\eta\right). \tag{10.6.1}$$

Подставляя в эту формулу $y = \delta$ и $\omega = 1$, находим

$$C_* = \sqrt{\frac{c_f}{2}} - \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{v^*\delta}{\nu}. \tag{10.6.2}$$

Соответственно можно получить новое, удобное выражение логарифмическо[го] профиля скоростей:

$$\omega = 1 + (1/\varkappa)\sqrt{c_f/2}\ln\xi. \quad (10.6.3)$$

Этому профилю соответствуют значения:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\delta}^{**} &= (1/\varkappa)\sqrt{c_f/2} - c_f/\varkappa^2. \\ H &= \delta^*/\delta^{**} = (1-(1/\varkappa)\sqrt{2c_f})^{-1}. \end{aligned}\right\} \quad (10.6.4)$$

Введя это значение $\tilde{\delta}^{**}$ в формулу (10.6.3), получим закон трения:

$$\sqrt{\frac{2}{c_f}} = C_* - \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{\varkappa^2}{\varkappa - \sqrt{2c_f}} + \frac{1}{\varkappa}\ln \mathrm{Re}^{**}. \quad (10.6.5)$$

Подставляя в последнее выражение значения $C_* = 5{,}5$, $\varkappa = 0{,}4$ и замеча[я], что разность первых двух членов его правой части меняется весьма слабо, по[-]лучаем относительно простой логарифмический закон трения Кармана:

$$c_f/2 = (2{,}5\ln \mathrm{Re}^{**} + 3{,}8)^{-2}. \quad (10.6.6)$$

Для степенной аппроксимации турбулентного профиля скоростей типа (9.11.1[?])

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \xi^n; \\ \tilde{\delta}^{**} &= \frac{n}{(1+n)(1+2n)}; \\ H &= 1+2n; \\ c_f &= B\,\mathrm{Re}^{**-m}; \\ m &= 2n/(1+n); \\ B &= 2\left(\frac{\tilde{\delta}^{**n}}{A}\right)^{2/(1+n)}. \end{aligned}\right\} \quad (10.6.7)$$

Если турбулентный пограничный слой развивается с передней кромки пласт[и]ны ($x = 0$, $\delta = 0$), то из формулы (10.6.7) и уравнения импульсов (10.3[...]) следует, что

$$c_f = B_1 \mathrm{Re}_x^{-m_1}, \quad (10.6.8)$$

где

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= m/(1+m); \\ B_1 &= \sqrt[1+m]{B\left(\frac{2}{1+m}\right)^m}. \end{aligned}\right\} \quad (10.6[.9])$$

Значения коэффициентов в формулах для $c_f$ даны в табл. 10.3.

В области $10^4 < \mathrm{Re}^{**} < 10^6$ хорошие результаты дает формула Фолкне[ра]

$$c_f = 0{,}0131\,\mathrm{Re}^{**-1/6}. \quad (10.6.1[0])$$

Таблица 1[0.3]

**Значения параметров степенного распределения скоростей**

| $n$ | 1/7 | 1/8 | 1/9 | 1/10 | $n$ | 1/7 | 1/8 | 1/9 | 1/1[0] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 8,74 | 9,71 | 10,6 | 11,5 | $m_1$ | 0,200 | 0,182 | 0,167 | 0,15[...] |
| $\tilde{\delta}^{**}$ | 0,0975 | 0,0890 | 0,0818 | 0,0757 | $B$ | 0,0252 | 0,0206 | 0,0190 | 0,0[...] |
| $H$ | 1,28 | 1,25 | 1,22 | 1,20 | $B_1$ | 0,0576 | 0,0450 | 0,0362 | 0,03[...] |
| $m$ | 0,250 | 0,222 | 0,200 | 0,182 | | | | | |

Если турбулентный слой развивается с передней кромки так, что при $x = 0$ $\delta = 0$, то этой формуле соответствует формула

$$c_f = 0{,}0263\mathrm{Re}_x^{-1/7}. \qquad (10.6.11)$$

В области закона распределения скоростей по степени $n = 1/8$ ($5 \cdot 10^5 < \mathrm{Re}_x < 1 \cdot 10^7$)

$$\left.\begin{aligned} c_f &= 0{,}0576\mathrm{Re}_x^{-0,2}; \\ \bar{c}_f &= 0{,}072\mathrm{Re}_x^{-0,2}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.6.12)$$

## 10.7. ТЕПЛООТДАЧА ПЛАСТИНЫ, ОБТЕКАЕМОЙ ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ С ПОСТОЯННЫМИ ФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Для газов и неметаллических жидкостей практически удовлетворительные результаты дает аналогия Рейнольдса с поправкой на число Прандтля в виде простого сомножителя. По данным опытов Б. С. Петухова, А. А. Детлафа, В. В. Кириллова, А. Б. Амбразявичюса и др. можно полагать при $0{,}5 < \mathrm{Pr} < 50$

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{c_f}{2}\mathrm{Re}_x\mathrm{Pr}^{0,4}. \qquad (10.7.1)$$

Соответственно для $n \approx 1/8$

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}0288\mathrm{Pr}^{0,4}\mathrm{Re}_x^{0,8}; \qquad (10.7.2)$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_x = 0{,}036\mathrm{Pr}^{0,4}\mathrm{Re}_{x_{\text{из}}}^{0,8}. \qquad (10.7.3)$$

При турбулентном пограничном слое металлической жидкости, покрывающей всю пластину ($x = 0$; $\delta = 0$; $10^3 < \mathrm{Pe} < 10^5$), по расчетам, выполненным Е. Д. Федоровичем под руководством автора, имеет место зависимость

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}46\,\mathrm{Pe}^{0,65}. \qquad (10.7.4)$$

## 10.8. НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЙ ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ГАЗА НА ПЛАСТИНЕ

Пусть $\mathrm{Pr} = 1$, $dp/dx = 0$, $T_{\text{ст}} = \mathrm{const}$ и вязкость газа подчиняется формуле Сезерленда

$$\mu = \mu_0\frac{T_0 + C}{T + C}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}. \qquad (10.8.1)$$

Здесь $C$ — константа данного газа, имеющая размерность абсолютной температуры. Будем называть величину

$$\psi_C = C/T_0 \qquad (10.8.2)$$

*температурным фактором Сезерленда* или вторым температурным фактором.

Рассмотрим задачу о теплообмене и трении в приближении, соответствующем распределению касательных напряжений поперек пограничного слоя по кубической параболе. Сформулированным выше условиям соответствует система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &2d\delta^{**}/dx = c_f; \\ &\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{T}{T_0} = \psi - (\psi - 1)\,\omega; \\ &\tau = \mu\,\frac{\partial w_x}{\partial y}; \\ &\tilde{\tau} = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3; \\ &\mu = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1 + \psi_C}{1 + \psi_C T_0/T}\sqrt{\frac{T}{T_0}}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.8.3)$$

Профиль скоростей определится из уравнения

$$\widetilde{\omega} = \int_0^{\xi} \frac{\widetilde{\tau}}{\widetilde{\mu}}\, d\xi \left( \int_0^{1} \frac{\widetilde{\tau}}{\widetilde{\mu}}\, d\xi \right)^{-1} . \quad (10.8.4)$$

Если при $x = 0$ $\delta = 0$, то из уравнения импульсов следует, что

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{2\,(\widetilde{\mu}\partial\omega/\partial\xi)_{\text{ст}}}{\widetilde{\delta}^{**}\,\text{Re}_x}} \quad (10.8.5)$$

и

$$\frac{c_f}{2} = \sqrt{\frac{\widetilde{\delta}^{**}\,(\widetilde{\mu}\partial\omega/\partial\xi)_{\text{ст}}}{2\text{Re}_x}} . \quad (10.8.6)$$

Результаты численного решения системы уравнений (10.8.3) показан на рис. 10.4, из которого видно, что неизотермичность слабо влияет на трени и теплообмен в ламинарном пограничном слое. Нормальным и высоким темпе

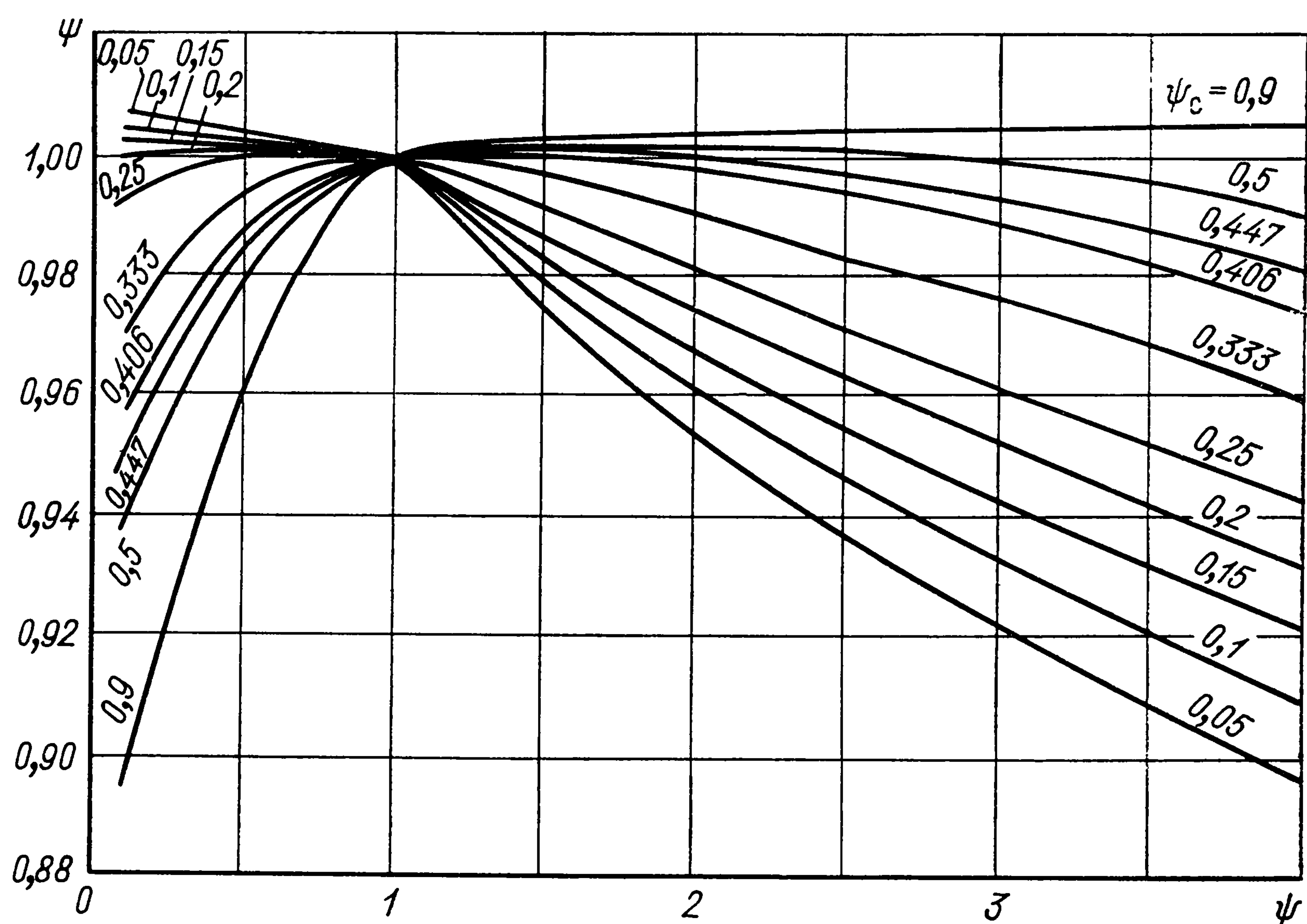



Рис. 10.4. Зависимость относительного коэффициента трения $\Psi$ от температурного фактора $\psi$ для различных значений второго температурного фактора $\psi_c$

ратурам потока, т. е. малым значениям фактора $\psi_c$, соответствует весь медленное снижение коэффициентов трения и теплоотдачи с ростом темпер турного фактора $\psi$. В области низких температур потока ($\psi_c \approx 1$) имеет мес обратная тенденция.

Слабое влияние неизотермичности потока в данном случае связано с вз имной компенсацией влияния изменения вязкости и теплопроводност Действительно, повышение вязкости утолщает пограничный слой, но одн временное возрастание коэффициента теплопроводности уменьшает его те мическое сопротивление.

## 10.9. НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЙ ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ГАЗА НА ПЛАСТИНЕ

Рассмотрим ту же задачу, что и в предыдущем параграфе, но для турбулентного пограничного слоя. Подставляя в уравнение (9.14.3) значения $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0$ и $\rho_0/\rho$ из второй формулы (10.8.3), находим, что

$$\Psi_S = \Psi = 4\left[\frac{1-\sqrt{\psi-(\psi-1)\omega_1}}{Z(1-\psi)}\right]^2. \qquad (10.9.1)$$

При Re $\to\infty$ $\omega_1 \to 0$, $Z \to 1$ и

$$\Psi \to [2/(\sqrt{\psi}+1)]^2. \qquad (10.9.2)$$

В области $\psi \approx 1$ предельный закон (10.9.2) может быть записан в приближенной форме:

$$\Psi \approx \psi^{-1/2}. \qquad (10.9.3)$$

Теоретические расчеты и экспериментальные данные показывают, что величина $\Psi$ является довольно слабой функцией числа Рейнольдса. Поэтому

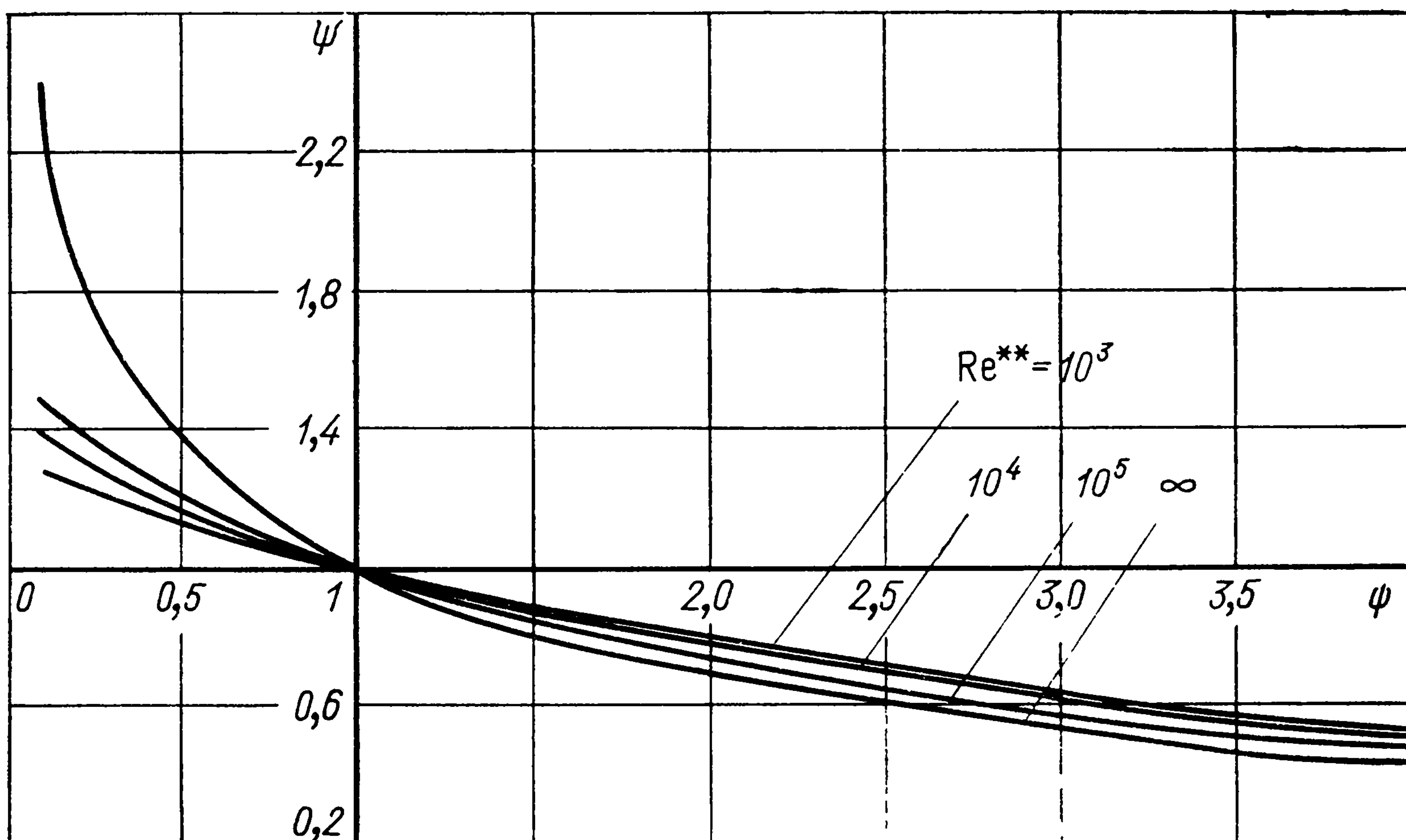



Рис. 10.5. Влияние неизотермичности на трение и теплообмен в дозвуковом турбулентном пограничном слое газа

для области конечных чисел Re вполне удовлетворительные результаты дает подстановка в уравнение (10.9.1) значений функции $\omega_1$ и $Z$, взятых в форме, точной для $\psi = 1$, т. е. если положить

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 &= 11{,}6\sqrt{c_f/2};\\ Z &= 1-\omega_1.\end{aligned}\right\} \qquad (10.9.4)$$

В области $\psi < 1$ и конечных чисел Re: $\Psi \approx 1$, а в области $\psi > 1$: $\Psi \approx \Psi_{\mathrm{Re}\to\infty}$. Используя это обстоятельство, расчетные формулы можно записать в следующем виде:

$$\psi<1; \quad \Psi = \left[\frac{2}{\sqrt{\psi-8{,}2(\psi-1)\sqrt{c_{f_0}}}+1}\right]^2; \qquad (10.9.5)$$

$$\psi>1; \quad \Psi = \left[\frac{2}{\sqrt{\psi-16{,}4(\sqrt{\psi}-1)\sqrt{c_{f_0}}}+1}\right]^2. \qquad (10.9.6)$$

Подставив в последние формулы значение $c_{f0}$ из уравнения (10.6.6), получим:

$$\psi < 1; \quad \Psi = 4\left[1 + \sqrt{\psi - 2\frac{\psi - 1}{\lg \mathrm{Re}^{**} + 0{,}66}}\right]^{-2}; \qquad (10.9.7)$$

$$\psi > 1; \quad \Psi = 4\left[1 + \sqrt{\psi - 4\frac{\sqrt{\psi} - 1}{\lg \mathrm{Re}^{**} + 0{,}66}}\right]^{-2}. \qquad (10.9.8)$$

Как видно из рис. 10.5, при турбулентном течении влияние неизотермичности в области $\psi > 1$ заметно больше, чем при ламинарном. При этом из сопоставлений решений для ламинарного и турбулентного пограничных слоев ясно, что в последнем неизотермичность сказывается решающим образом через изменение плотности в турбулентном ядре слоя.

## 10.10. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Уравнение импульсов (9.5.10) можно записать в следующей форме:

$$\frac{d\mathrm{Re}^{**}}{d\tilde{x}} + \mathrm{Re}_L (1 + H - \mathrm{M}^2) f = \mathrm{Re}_L \frac{c_f}{2}. \qquad (10.10.1)$$

Здесь $\mathrm{Re}^{**} = w_0 \delta^{**}/\nu_0$ — текущее число Рейнольдса, построенное по толщине потери импульса; $\mathrm{Re}_L = w_0 L/\nu_0$ — текущее число Рейнольдса, построенное по длине контура $L$; $f = (\delta^{**}/w_0)(dw_0/dx)$ — формпараметр, характеризующий аэродинамическую кривизну потока; $H = \delta^*/\delta^{**}$ — формпараметр, представляющий собой отношение толщин вытеснения и потери импульса; $\mathrm{M} = w_0/a_0$ — число Маха; $\rho_0$, $\nu_0$, $a_0$ — плотность, кинематическая вязкость и скорость звука на внешней границе слоя в данном сечении $x$; $x$ — координата, направленная вниз по потоку вдоль обвода контура; $L$ — полная длина контура или другой его характерный размер (хорда, диаметр); $\tilde{x} = x/L$ — относительное расстояние по обводу контура.

Полная длина контура рассчитывается от его передней кромки до задней или от точки разветвления потока до задней кромки тела.

Рассмотрим течение среды с постоянными физическими свойствами. Тогда коэффициент трения в общем случае будет функцией числа $\mathrm{Re}^{**}$ и аэродинамической кривизны контура. Локальной характеристикой последнего фактора может служить формпараметр $f$, а интегральной — распределение скорости $w_0$ по контуру $L$, т. е. функция

$$\tilde{w} = w_0/w_{00} = \tilde{w}(\tilde{x}). \qquad (10.10.2)$$

Здесь $w_{00}$ — характерная скорость, например скорость на бесконечности. В однопараметрическом приближении

$$\left.\begin{aligned} c_f &= c_f(\mathrm{Re}^{**}; f); \\ H &= H(\mathrm{Re}^{**}; f). \end{aligned}\right\} \qquad (10.10.3)$$

Совместное решение уравнений (10.10.1) и (10.10.3) дает возможность рассчитать распределение основных параметров пограничного слоя вдоль контура.

Для ламинарного пограничного слоя имеются точные решения некоторых классов течения, характеризуемых видом функции (10.10.2), полученные Фолкнером и Скэн, Хоуартом, Гертлером и Виттингом, А. А. Дородницыным и др. Приближенные методы были предложены в работах Кармана и Польгаузена, Л. Г. Лойцянского и др. Подробное изложение основных из этих методов дано в монографиях Л. Г. Лойцянского.

Здесь мы ограничимся приведением результирующей таблицы однопараметрического решения, полученного Н. Е. Кочиным и Л. Г. Лойцянским

Таблица 10.4

**Характеристики изотермического ламинарного пограничного слоя по приближенному однопараметрическому решению**

| $f\,\mathrm{Re}^{**}$ | $c_f\,\mathrm{Re}^{**}$ | $\Psi$ | $H$ | $\bar{H}$ | $f\,\mathrm{Re}^{**}$ | $c_f\,\mathrm{Re}^{**}$ | $\Psi$ | $H$ | $\bar{H}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| —0,089 | 0,000 | 0,000 | 3,85 | 1,47 | 0,00 | 0,438 | 1 | 2,61 | 1 |
| —0,085 | 0,038 | 0,086 | 3,66 | 1,40 | 0,01 | 0,472 | 1,08 | 2,55 | 0,975 |
| —0,08 | 0,078 | 0,178 | 3,50 | 1,34 | 0,02 | 0,506 | 1,15 | 2,50 | 0,957 |
| —0,07 | 0,142 | 0,324 | 3,28 | 1,26 | 0,03 | 0,540 | 1,23 | 2,46 | 0,942 |
| —0,06 | 0,194 | 0,444 | 3,12 | 1,20 | 0,04 | 0,572 | 1,31 | 2,41 | 0,924 |
| —0,05 | 0,240 | 0,547 | 3,00 | 1,15 | 0,05 | 0,604 | 1,38 | 2,36 | 0,905 |
| —0,04 | 0,284 | 0,649 | 2,90 | 1,11 | 0,06 | 0,636 | 1,45 | 2,32 | 0,890 |
| —0,03 | 0,324 | 0,740 | 2,82 | 1,08 | 0,07 | 0,670 | 1,53 | 2,28 | 0,874 |
| —0,02 | 0,362 | 0,825 | 2,74 | 1,05 | 0,08 | 0,700 | 1,60 | 2,24 | 0,857 |
| —0,01 | 0,400 | 0,912 | 2,67 | 1,02 | 0,085 | 0,714 | 1,63 | 2,22 | 0,850 |
| —0,00 | 0,438 | 1 | 2,61 | 1 | — | — | — | — | — |

(табл. 10.4). Как видно, по этому решению отрыв изотермического ламинарного пограничного слоя происходит при значении формпараметра

$$f_{\text{кр}} = -0{,}089/\mathrm{Re}^{**}, \qquad (10.10.4)$$

а закон трения может быть выражен интерполяционной формулой

$$\Psi = (1 - f)^{3/4} \qquad (10.10.5)$$

с погрешностью до 3%.

Для турбулентного пограничного слоя теоретическое определение всего комплекса параметров отрыва впервые было сделано в однопараметрическом приближении автором и А. И. Леонтьевым. Для изотермических условий по этому решению

$$\{f_{\text{кр}} = -0{,}01;\ \tilde{\delta}^{**}_{\text{кр}} = 0{,}16;$$
$$H_{\text{кр}} = 1{,}87\}, \qquad (10.10.6)$$

а зависимость (10.10.3) определяется графиками рис. 10.6.

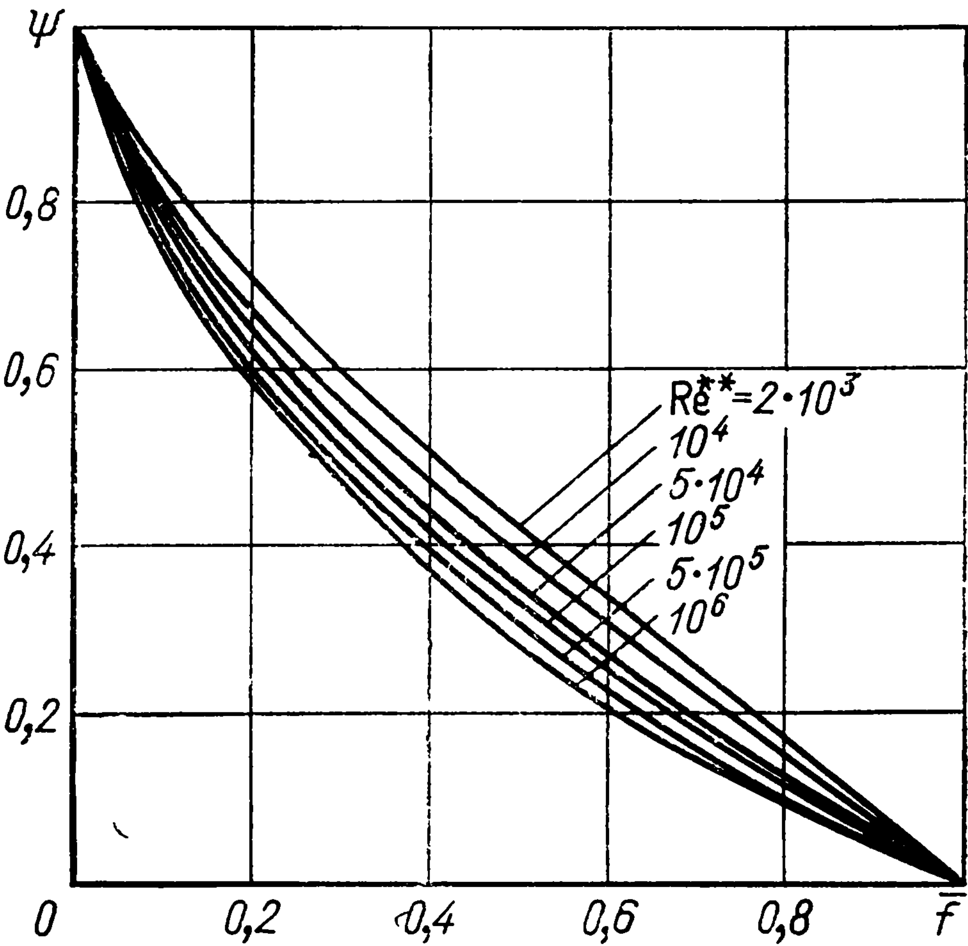



Рис. 10.6. Закон трения в диффузорной области

Экспериментальные данные Никурадзе и Фуруа хорошо подтверждают это решение в отношении величин $\tilde{\delta}^{**}_{\text{кр}}$ и $H_{\text{кр}}$. Что касается значения $f_{\text{кр}}$, достаточно точных экспериментальных данных пока не имеется и оно, видимо, лежит в пределах $0{,}005 < |f_{\text{кр}}| < 0{,}01$.

Из сопоставления формул (10.10.4) и (10.10.6) видно, что отрыв ламинарного пограничного слоя наступает при меньшем значении формпараметра $f$, чем отрыв слоя турбулентного. Кроме того, универсальной характеристикой отрыва ламинарного пограничного слоя является произведение $f\,\mathrm{Re}^{**}$, а у турбулентного пограничного слоя — собственно формпараметр $f$.

Введем в рассмотрение функцию

$$F(\tilde{f}) = \Psi - (1 + H_{\text{кр}})\,\Gamma_{\text{кр}}\,\tilde{f}. \qquad (10.10.7)$$

Здесь $\Gamma = 2f/c_{f_0}$ — формпараметр Бури —Лойцянского. Тогда уравнение импульсов можно записать в виде ($\tilde{f} = f/f_{\text{кр}}$).

$$\frac{2}{c_{f_0}\,\mathrm{Re}_L}\,\frac{d\,\mathrm{Re}^{**}}{d\tilde{x}} = F(\tilde{f}). \qquad (10.10.8)$$

При $\tilde{f} = 0$ $\Psi = \Psi_T$, $F(0) = \Psi_T$; при $\tilde{f} = 1$ $\Psi = 0$, $F(1) = -(1+H_{кр})\,\Gamma_{кр}$. Здесь $\Psi_T$ — относительное изменение коэффициента трения под влиянием неизотермичности при обтекании пластины. При $\mathrm{Re} \to \infty$ $\Gamma_{кр} \to \infty$, и поэтому в области больших чисел Рейнольдса вполне приемлемо приближение

$$F(\tilde{f}) \simeq \Psi_T - (1 + H_{кр})\,\Gamma_{кр}\,\tilde{f}. \qquad (10.10.9)$$

Вводя это выражение $F(f)$ в уравнение (10.10.8) и определяя закон трения степенной формулой, получаем

$$\frac{d\,\mathrm{Re}^{**}}{d\tilde{x}} + (1 + H_{кр})\,\frac{\mathrm{Re}^{**}}{w_0}\,\frac{dw_0}{d\tilde{x}} \approx \frac{\Psi_T\,B\,\mathrm{Re}_L}{2\,\mathrm{Re}^{**m}}. \qquad (10.10.10)$$

Интегрируя это уравнение для условий изотермического течения ($\Psi_T = 1$), находим

$$\mathrm{Re}^{**} \approx \tilde{w}_0^{-\chi_1}\left[\frac{1+m}{2}\,B\,\mathrm{Re}_0\int\limits_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}} \tilde{w}_0^{\chi_2}\,d\tilde{x} + \left(\mathrm{Re}^{**}\,\tilde{w}_0^{\chi_1}\right)_{\tilde{x}_1}^{1+m}\right]^{1/(1+m)}. \qquad (10.10.11)$$

Здесь $\chi_1 = 1 + H_{кр}$; $\chi_2 = 1 + (1 + m)(1 + H_{кр})$; $\mathrm{Re}_0 = w_{00}L_0/\nu$; $\tilde{x}_1$ — безразмерная координата начала развития рассматриваемого пограничного слоя. Далее, по распределению $\mathrm{Re}^{**}$ определяется и распределение коэффициента трения.

Более подробное изложение этой проблемы можно найти в монографиях, приведенных в списке литературы к данной главе.

## 10.11. КОНСЕРВАТИВНОСТЬ ЗАКОНА ТЕПЛООБМЕНА ОТНОСИТЕЛЬНО ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

При $dp/dx \neq 0$ нарушается одно из основных условий существования подобия полей температур и скоростей. При этом процесс теплообмена значительно менее чувствителен к аэродинамической кривизне тела, чем трение. Это обстоятельство обнаруживается уже при сопоставлении распределений касательных напряжений и плотностей теплового потока по поперечному сечению пограничного слоя. Так, в точке $f = f_{кр}$ по уравнению (9.6.4)

$$\tau/\rho_0 w_0^2 = -(f/\delta^{**})_{кр}\,(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), \qquad (10.11.1)$$

в то время как соответствующее приближение закона распределения $\tilde{q}$ выражается формулой (9.7.1) независимо от значения параметра $f$. Таким образом, в пределах аппроксимации законов $\bar{\tau}(\xi)$ и $\bar{q}(\xi)$ кубической параболой распределение теплового потока автомодельно относительно градиента давления. На рис. 10.7 эти зависимости показаны графически. Как видно, в пристенной области при $f = f_{кр}$ ход зависимостей $\tau(\xi)$ и $q(\xi)$ совершенно различен.



Рис. 10.7. Распределение касательных напряжений (1) и тепловых потоков (2) в точке отрыва пограничного слоя

Произведем оценку закона теплообмена в точке отрыва пограничного слоя, т. е. там, где должно иметь место наибольшее отклонение от закона теплообмена для пластины ($f = 0$). При этом ограничимся рассмотрением пограничного слоя с постоянными физическими свойствами и $\mathrm{Pr} \approx 1$.

В случае ламинарного пограничного слоя распределению касательных напряжений (10.11.1) соответствует профиль скоростей

$$\omega = -\frac{\Gamma_{кр}}{\tilde{\delta}^{**2}}\left(\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{2}{3}\xi^3 + \frac{1}{4}\xi^4\right). \qquad (10.11.2)$$

Из условия, что при $\xi = 1$ $\omega = 1$ следует

$$12\tilde{\delta}_{кр}^{**2} = -\Gamma_{кр}. \qquad (10.11.3)$$

Далее, полагая $\Gamma_{кр} = -0,089$, получаем

$$\left\{\tilde{\delta}_{кр}^{**} = 0,272;\ \omega = 6\left(\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^4\right)\right\}; \qquad (10.11.4)$$

$$\tilde{\delta}_T^{**} = 6\int\limits_0^1 \left(\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^4\right)(1 - 2\xi_T + 2\xi_T^3 - \xi_T^4)\, d\xi_T =$$

$$= 0,143\,\tilde{\delta}_T^2 - 0,086\tilde{\delta}_T^3 + 0,017\tilde{\delta}_T^4, \qquad (10.11.5)$$

где $\tilde{\delta}_T = \delta_T/\delta$.

Подставляя это выражение $\tilde{\delta}_T^{**}$ в формулу (10.4.9), находим, что в точке отрыва динамического пограничного слоя

$$\mathrm{St}/\mathrm{St}_0 \approx 1,21\,\tilde{\delta}_T^2 - 0,73\tilde{\delta}_T^3 + 0,14\tilde{\delta}_T^4. \qquad (10.11.6)$$

Расчеты по последней формуле приведены в табл. 10.5.

Таблица 10.5

**Значение $\Psi_S$ в точке отрыва пограничного слоя**

| $\delta_T/\delta$ | 0,5 | 0,75 | 1 | 1,25 | 1,5 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{St}/\mathrm{St}_0$ | 0,22 | 0,31 | 0,62 | 0,81 | 0,86 | 1,23 |

В случае турбулентного пограничного слоя выражению $H_{кр}$ по формулам (10.10.6) и (10.6.7) соответствует профиль скоростей в ядре:

$$\omega = \xi^{0,43} \qquad (10.11.7)$$

и в области вязкого подслоя:

$$\omega = -\Gamma_{кр}\,\xi^2/2\tilde{\delta}_{кр}^{**2}, \qquad (10.11.8)$$

где $\tilde{\delta}_{кр}^{**} = 0,16$. Последняя формула следует из уравнения (10.11.2) при $\xi \to 0$:

$$\tilde{q}\,\mathrm{St} = \tilde{l}\tilde{l}_T \frac{\partial\omega}{\partial\xi}\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}. \qquad (10.11.9)$$

Для оценки значения числа Стентона в точке отрыва турбулентного пограничного слоя положим $\tilde{l}_T \approx \tilde{l} \approx 0,4\sqrt{\tilde{\tau}_0}\xi$, $q = 1$, что соответствует логарифмическому профилю скоростей при $f = 0$, $\Pr \approx 1$, $\tilde{\delta}_T \approx 1$. Тогда

$$\mathrm{St} \approx 0,0685\int\limits_{\vartheta_1}^{1}\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\partial\xi\left(\int\limits_{\xi_1}^{1}\frac{d\xi}{\xi^{1,43}}\right)^{-1} \approx$$

$$\approx 0,0295\xi_1^{0,43}(1 - \vartheta_1). \qquad (10.11.10)$$

Здесь

$$\vartheta_1 = \alpha y_1/\lambda = \mathrm{St}\,\mathrm{Pe}^{**}\,\xi_{1,\,кр}/\tilde{\delta}_{кр}^{**}. \qquad (10.11.11)$$

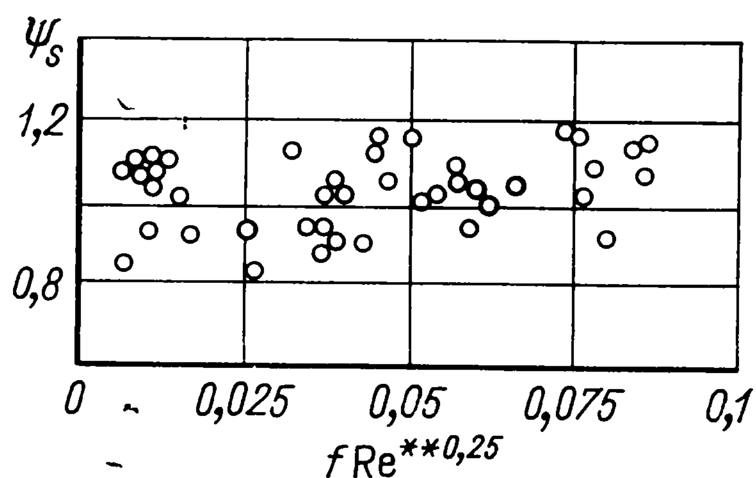



Рис. 10.8. Влияние градиента давления на теплообмен

Определяя $\xi_{1,кр}$ по пересечению профилей скоростей (10.11.7) и (10.11.8), находим по выражению (10.11.10):

$$\mathrm{St} \approx 0,048/\mathrm{Re}^{**0,37}. \qquad (10.11.12)$$

Из приведенных в табл. 10.6 оценок видно, что интенсивность теплообмена зависит от градиента давления существенно меньше, чем аэродинамическое трение. При этом в точке отрыва число Стентона при конечных числах Рейнольдса отнюдь не равно нулю.

Таблица 10.6

**Значение $\Psi_S$ в точке отрыва турбулентного пограничного слоя**

| Re** | $1\cdot 10^3$ | $5\cdot 10^3$ | $1\cdot 10^4$ | $5\cdot 10^5$ | $1\cdot 10^6$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $St/St_0$ | 1,64 | 1,24 | 1,14 | 0,83 | 0,42 | 0 |

На рис. 10.8 показаны экспериментальные данные А. И. Леонтьева, А. Н. Обливина и П. Н. Романенко, подтверждающие консервативность закона теплообмена в диффузорной области течения турбулентного пограничного слоя.

## 10.12. ИНТЕГРАЛ УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Уравнение энергии пограничного слоя (9.5.3) при $M \ll 1$ может быть записано в форме

$$\frac{d\mathrm{Re}_T^{**}}{d\tilde{x}} + \frac{\mathrm{Re}_T^{**}}{\Delta T}\frac{d\Delta T}{d\tilde{x}} = \mathrm{Re}_L \Psi_S \mathrm{St}_0, \tag{10.12.1}$$

где $\mathrm{Re}_T^{**} = w_0\delta_T^{**}/\nu_0$ — число Рейнольдса, построенное по толщине потери энергии. Полагая

$$\mathrm{St}_0 = B/2\mathrm{Pr}^n\, \mathrm{Re}_T^{**m}, \tag{10.12.2}$$

после интегрирования получаем

$$\mathrm{Re}_T^{**} = \frac{1}{\Delta T}\left[\frac{1+m}{2\mathrm{Pr}^n} B\mathrm{Re}_0 \int\limits_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}} \tilde{w}_0 \Psi_S \Delta T^{1+m}\, d\tilde{x} + (\mathrm{Re}_T^{**}\,\Delta T)_{x_1}^{1+m}\right]^{1/(1+m)}. \tag{10.12.3}$$

По найденному значению Re** определится локальное значение числа Стентона: $\mathrm{St} = \Psi_S \mathrm{St}_0$. Показатель степени при числе Прандтля в формуле (10.12.1) для газов и неметаллических жидкостей можно принимать: для ламинарного пограничного слоя $n \approx 0{,}7$, для турбулентного пограничного слоя $n \approx 0{,}6$. Коэффициенты $B$ и $m$ берут соответственно степенному закону трения для данной области значений числа Рейнольдса.

Если задано не распределение температуры стенки, а закон подвода тепла через нее $q_{\text{ст}}(x)$, то уравнение (10.11.12) удобно переписать в более компактной форме:

$$\frac{d}{dx}(\Delta T \mathrm{Re}_T^{**}) = \frac{q_{\text{ст}}(x)}{c_p\,\mu_0}. \tag{10.12.4}$$

Отсюда

$$\Delta T \mathrm{Re}_T^{**} = \frac{1}{c_p\,\mu_0}\int\limits_{x_1}^{x} q_{\text{ст}}\, dx + (\Delta T \mathrm{Re}_T^{**})_{x_1}. \tag{10.12.5}$$

Выражая $\mathrm{Re}_T^{**}$ через число Стентона, можно привести это уравнение к виду

$$\Delta T = \left(\frac{2q_{\text{ст}} L}{B\lambda_0 \mathrm{Re}_0 \tilde{w}_0 \Psi_S \mathrm{Pr}^{n_1}}\right)^{1/(1+m)} \left[\int\limits_{x_1}^{x} \frac{q_{\text{ст}}}{\lambda_0}\, dx + \frac{1}{\mathrm{Pr}}(\Delta T \mathrm{Re}_T^{**})_{x_1}\right]^{m/(1+m)}, \tag{10.12.6}$$

где $n_1 = 1 + m - n$.

В практических расчетах влиянием градиента давления на закон теплообмена обычно пренебрегают и во всех формулах полагают $\Psi_S = \Psi_T$.

## 10.13. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ОБТЕКАНИИ ШАРА

Шар представляет собой плохо обтекаемое тело, не имеющее преимущественного направления. В приведенной на рис. 10.9 зависимости коэффициента сопротивления шара от числа Рейнольдса потока $\zeta$ определен по формуле

$$\zeta = 2F/\rho w_0^2 \Omega, \qquad (10.13.1)$$

где $F$ — сила гидродинамического сопротивления; $\Omega$ — характерная площадь сечения тела. Для продольно обтекаемой пластины $F\Omega^{-1} = \tau_{ст}$. Для шара $\Omega = \pi R_0^2$, где $R_0$ — радиус.

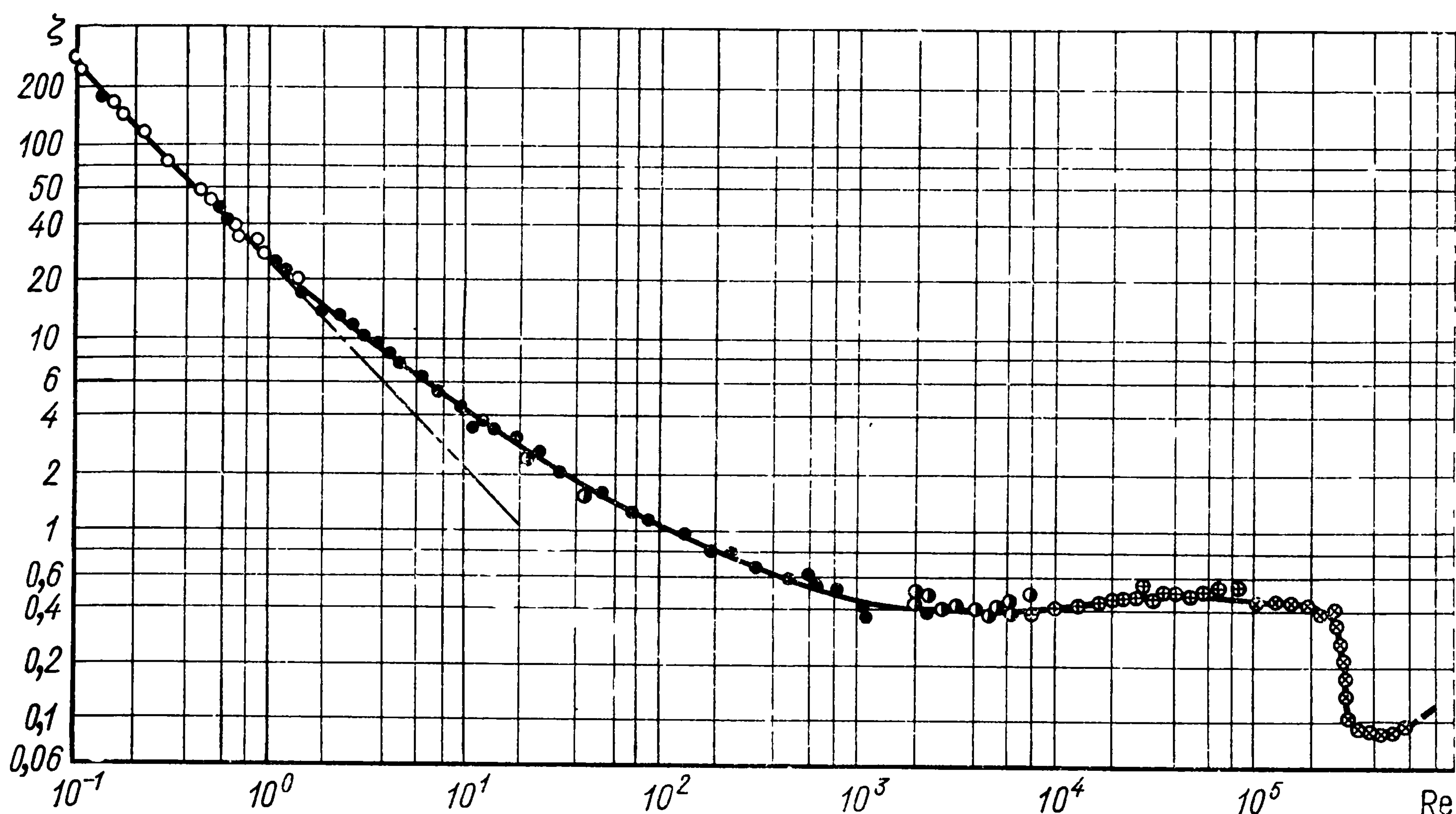



Рис. 10.9. Зависимость коэффициента сопротивления шаров от числа Рейнольдса:
—.—.——кривая, рассчитанная по теории Стокса; ○—данные Шиллера—Шмиделя; ●—Либстера; ◑—Аллена, ⌒—Визельсберга (1921 г.); ⊗—Визельсберга (1926 г.)

Число Рейнольдса в данном случае определено по диаметру шара и скорости набегающего потока:

$$\mathrm{Re} = 2R_0 w_0/\nu. \qquad (10.13.2)$$

В области чисел $\mathrm{Re} < 2$ действует закон Стокса

$$F = 6\pi\mu R_0 w_0; \quad \zeta = 24\mathrm{Re}^{-1}. \qquad (10.13.3)$$

Далее коэффициент сопротивления уменьшается обратно пропорционально числу Рейнольдса в степени, меньшей единицы, и в области чисел $2 \cdot 10^3 < \mathrm{Re} < 2 \cdot 10^5$ остается почти постоянным и равным в среднем 0,4.

Возникновение этой первой области автомодельности коэффициента сопротивления шара по отношению к числу Рейнольдса обусловлено возникновением отрыва ламинарного пограничного слоя при $\mathrm{Re} > 2 \cdot 10^3$ и возникновением «сопротивления давления». Последнее означает, что большая часть сопротивления обусловлена не трением в пограничном слое на лобовой части шара, а разностью статических давлений в лобовой части и в вихревой зоне, возникающей в кормовой области течения.

Наконец, в области чисел $\mathrm{Re} > 2 \cdot 10^5$ возникает новый, отчетливый кризис сопротивления и при $\mathrm{Re} > 10^6$ имеет место вторая автомодельная область с $\zeta \approx 0,2$. Это явление связано с турбулизацией пограничного слоя при больших числах Рейнольдса и соответствующим сдвигом точки отрыва ближе к кормовой области течения.

Для шара можно установить минимальное значение коэффициента теплоотдачи, которое имеет место при $w_0 \to 0$ и определяется теплопроводностью от сферического источника, погруженного в неограниченную однородную

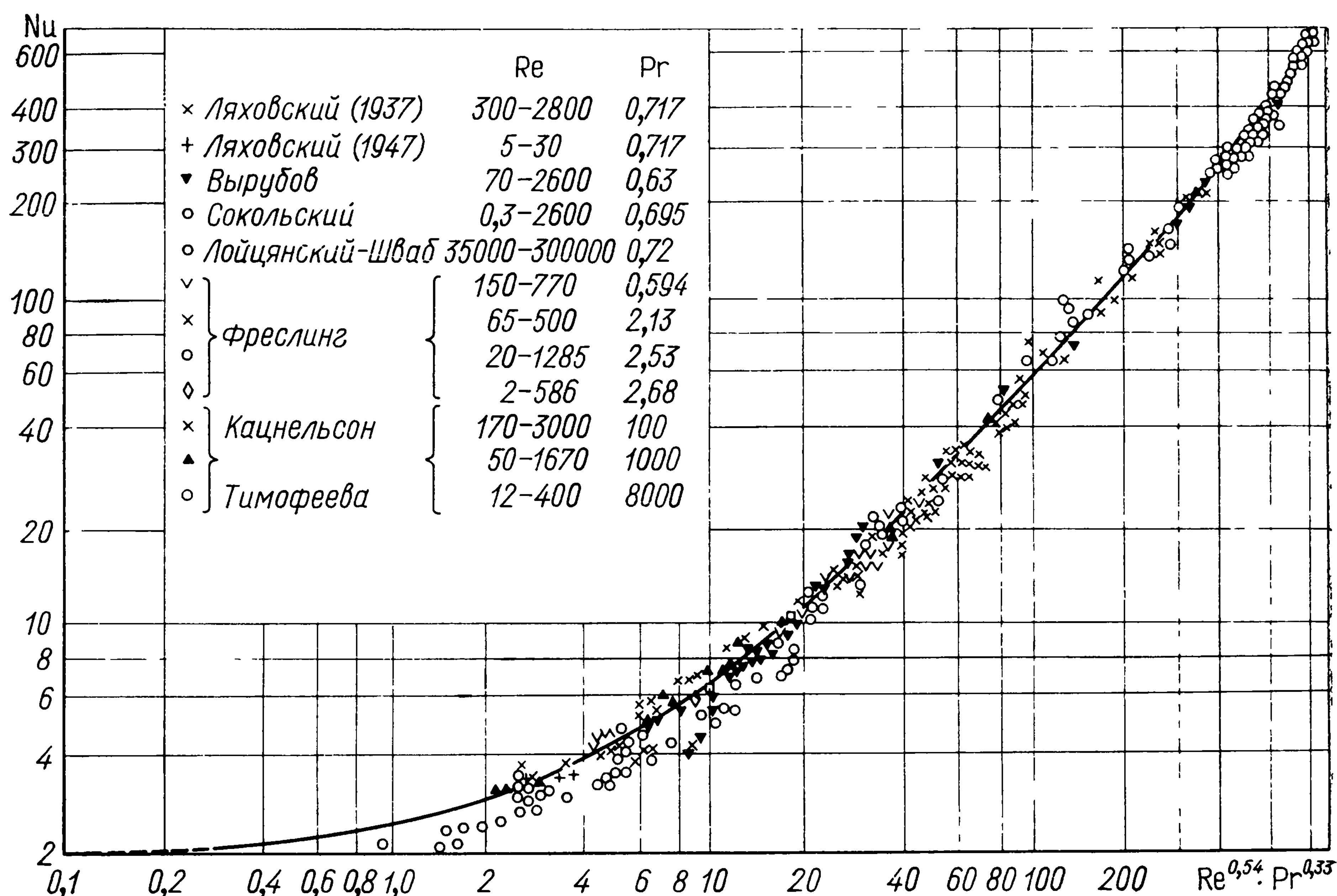



Рис. 10.10. Опытные данные о теплоотдаче шара

среду. По формуле (7.4.2) при $R_1 = D/2$, где $D = 2R_0$ — диаметр сферы, и $R_2 \to \infty$

$$Q = 2\pi\lambda D\Delta T = \alpha\pi D^2\,\Delta T. \tag{10.13.4}$$

Отсюда формально определенное минимальное значение коэффициента теплоотдачи находят по формуле

$$\alpha \underset{w_0 \to 0}{\to} \lambda/R_0; \quad \mathrm{Nu}_{\text{мин}} = \alpha_{\text{мин}} D/\lambda = 2. \tag{10.13.5}$$

Сводка опытных данных по теплоотдаче при квазиизотермическом стационарном обтекании сфер, выполненная Б. Д. Кацнельсоном и Ф. А. Тимофеевой-Агафоновой, представлена на рис. 10.10. Эта зависимость описывается эмпирической формулой

$$\mathrm{Nu} = 2 + 0{,}03\mathrm{Pr}^{0,33}\,\mathrm{Re}^{0,54} + 0{,}35\mathrm{Pr}^{0,35}\,\mathrm{Re}^{0,58}. \tag{10.13.6}$$

При помещении сферы по оси свободно набегающей струи наблюдается улучшение обтекания при соизмеримости диаметров струи и сферы. Экспериментальные данные С. И. Исатаева и З. Ж. Жанабаева, приведенные на рис. 10.11, показывают снижение сопротивления более чем на порядок при диаметре струи, равном половине диаметра обтекаемой сферы.

Исследование влияния температурного фактора при обтекании сферы газом было выполнено З. С. Леонтьевой, И. П. Басиной, И. А. Максимовым для умеренных чисел Рейнольдса и А. В. Лебедевым для больших чисел Рейнольдса. На рис. 10.12 приведены зависимости коэффициента сопротивления сферы от температурного фактора $\psi$, числа Рейнольдса и относительного диаметра струи. Как видно, при небольших числах Рейнольдса и практически неограниченном потоке влияние температурного фактора при $T_{\text{ст}} > T_0$ весьма значительно и противоположно тому, которое имеет место при безотрывном обтекании тел. Это влияние существенно снижается с ростом числа Рейнольдса и особенно с уменьшением относительного диаметра струи.

Выход на автомодельность относительно диаметра струи от температурного фактора практически не зависит и имеет место при $D_{\text{стр}} > 1{,}5\ D$. Рассмот-

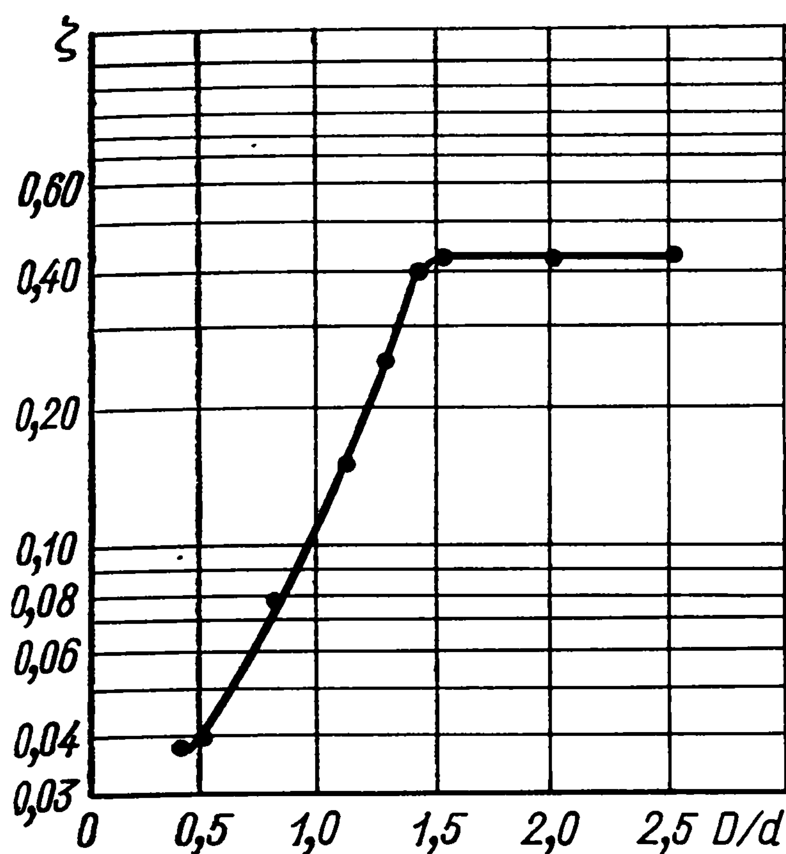



**Рис. 10.11. Влияние относительного диаметра струи на коэффициент сопротивления шара при Re = (0,5÷÷1)·10^5**

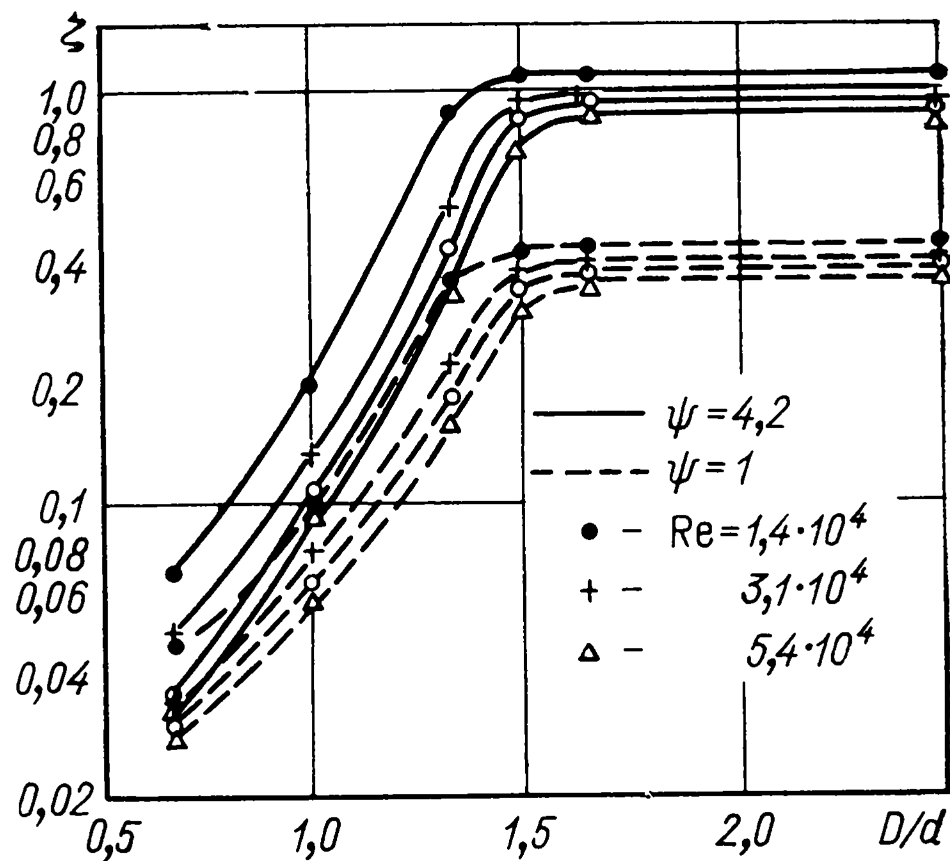



Рис. 10.12. Зависимость коэффициента сопротивления шара от относительного диаметра струи при различных значениях температурного фактора и чисел Рейнольдса

ренный эффект связан главным образом со смещением точки отрыва и частично с изменением плотности среды в кормовой области течения.

На коэффициент теплоотдачи температурный фактор влияет у плохо обтекаемых тел меньше, чем на гидравлическое сопротивление. Объясняется это тем, что теплообмен в основном определяется развитием нормального пограничного слоя на лобовой части тела и вторичного пограничного слоя в вихревой зоне за точкой отрыва.

## 10.14. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ОБТЕКАНИИ ОДИНОЧНОГО ЦИЛИНДРА

Зависимость коэффициента гидравлического сопротивления имеет вид, показанный на рис. 10.13. Там же нанесено сопротивление трения в пограничном слое на лобовой части цилиндра. Качественно картина та же, что и для сферы. На рис. 10.14 показано изменение картины поперечного обтекания цилиндра с ростом числа Рейнольдса. Отчетливо виден процесс возникновения отрыва пограничного слоя и формирования кормовой вихревой зоны. На рис. 10.13 видно, что первая автомодельная зона лежит в области чисел $5 \cdot 10^2 < Re <$

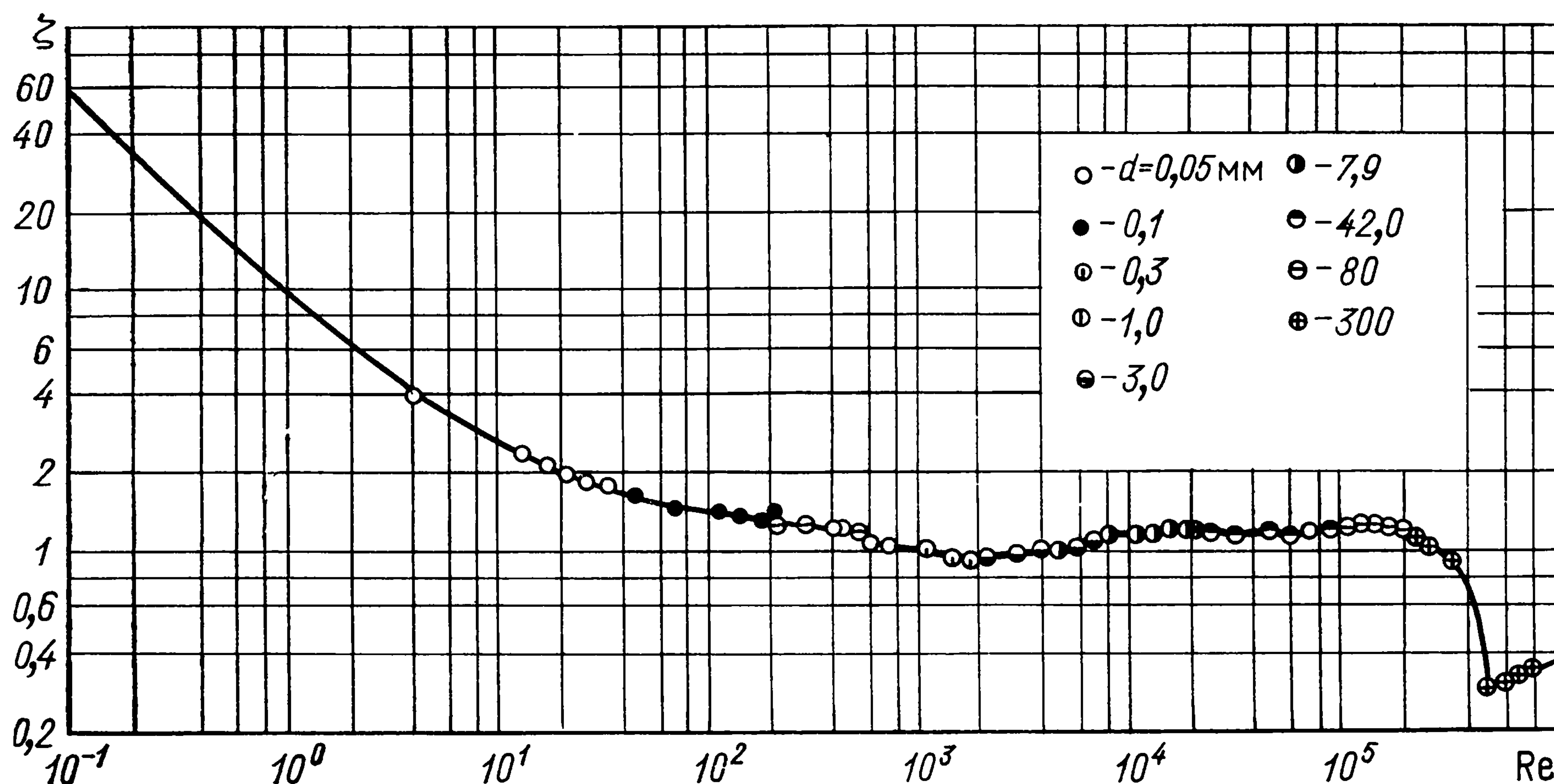



Рис. 10.13. Зависимость коэффициента сопротивления круглых цилиндров различных диаметров $d$ от числа Рейнольдса (измерения Визельсберга)

$< 2 \cdot 10^5$ и характеризуется значением $\zeta \approx 1{,}2$. Вторая автомодельная область имеет место при $\mathrm{Re} > 5 \cdot 10^5$ и характеризуется значением $\zeta \approx 0{,}3$. Для цилиндра конечной длины $\zeta$ уменьшается.

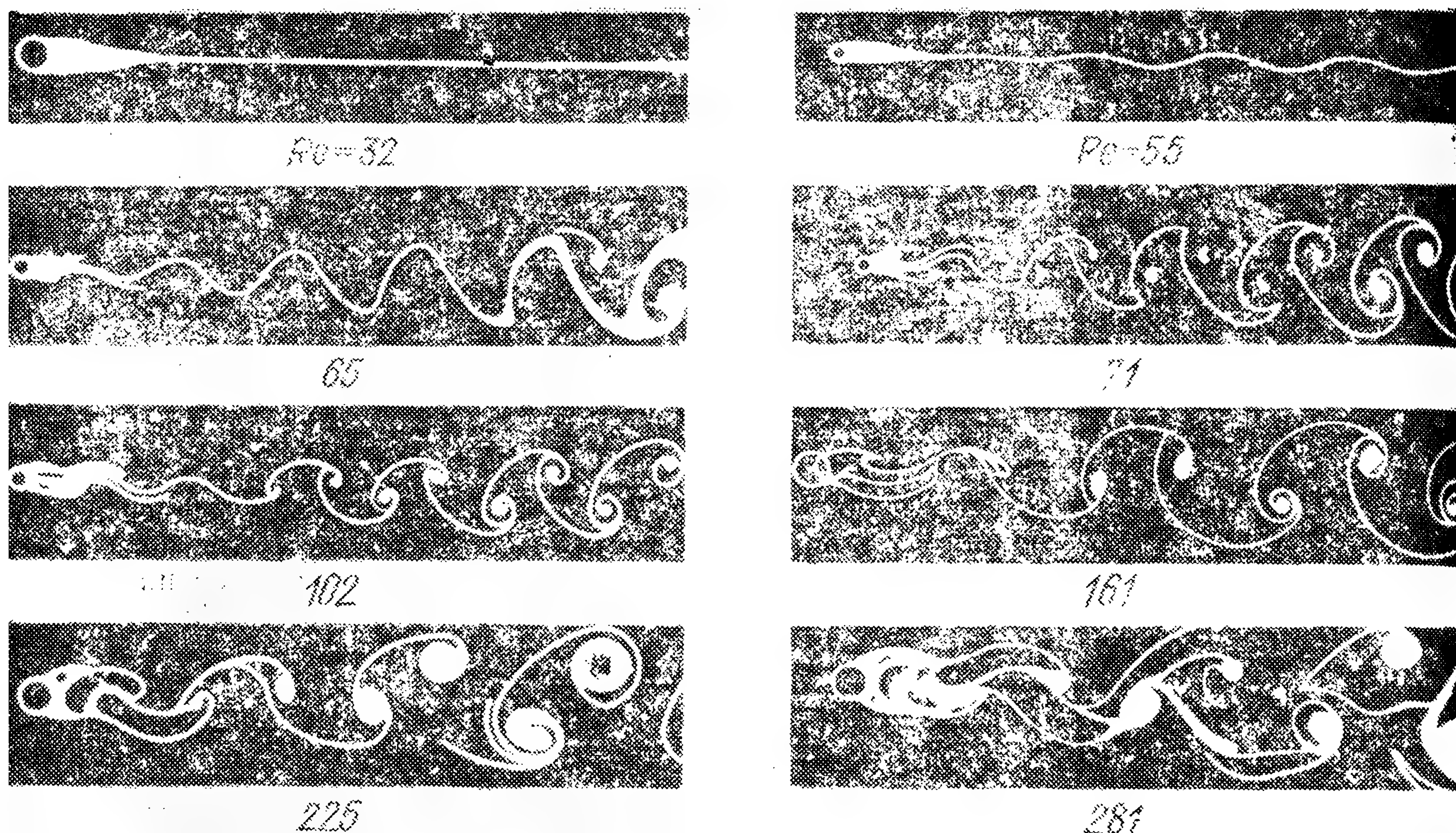



Рис. 10.14. Влияние числа Рейнольдса на течение жидкости за круглым цилиндром

На рис. 10.15 кривая *1* представляет изменение относительного коэффициента теплоотдачи по окружности поперечно обтекаемого цилиндра при $\mathrm{Pr} \approx 1$. Кривая *2* показывает распределение относительного коэффициента теплоотдачи при поперечном обтекании цилиндра жидким натрием, т. е. при $\mathrm{Pr} \ll 1$. Уменьшение коэффициента теплоотдачи от лба цилиндра к его середине (относительно направления потока) связано с нарастанием в этой области пограничного слоя. В точке минимума начинается возрастание коэффициента теплоотдачи, связанное с развитием вихреобразования в кормовой области цилиндра. Отчетливо видно вырождение зон влияния отрыва пограничного слоя ($\beta > 80°$) для среды с $\mathrm{Pr} \ll 1$.

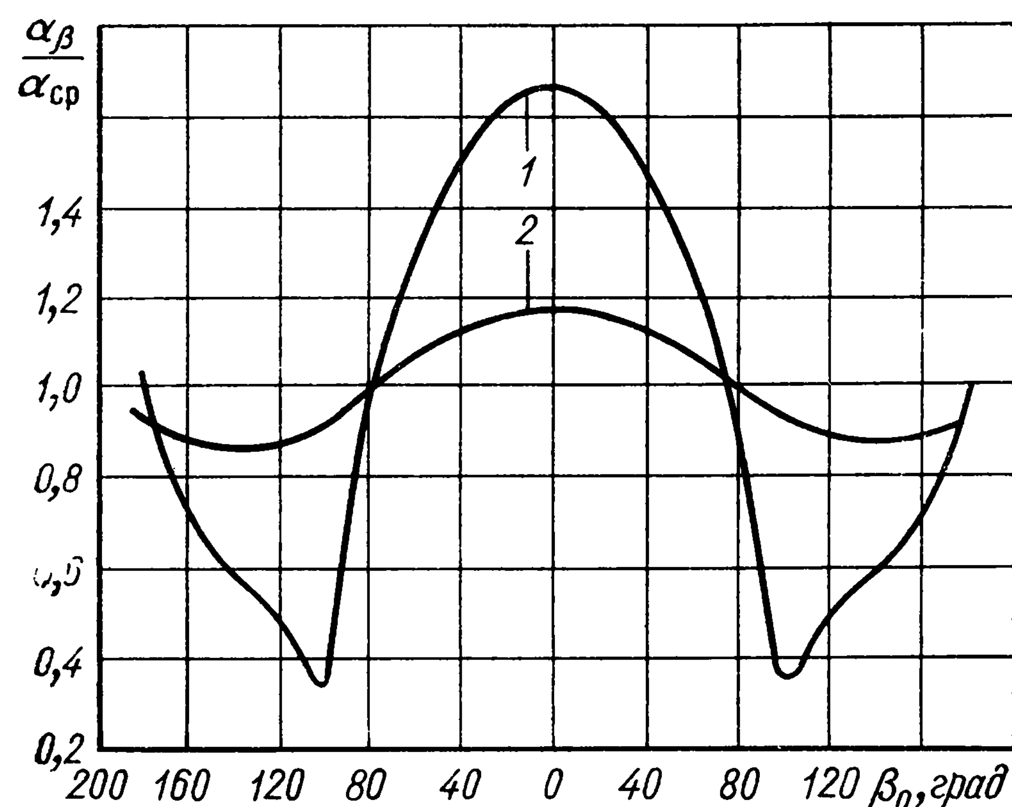



Рис. 10.15. Распределение теплоотдачи по окружности цилиндра, обтекаемого воздухом (*1*) и жидким металлом (*2*)

По опытам с потоком воздуха естественной турбулентности найдены значения коэффициентов $C$ и $m$ (табл. 10.7) в степенной формуле:

$$\mathrm{Nu} = C\,\mathrm{Re}^m. \qquad (10.14.1)$$

Как в случае обтекания пластины, так и здесь при больших числах Re закон теплоотдачи оказывается почти точно совпадающим с законом для турбулентного течения в трубе. Физические свойства относятся к средней температуре потока. Пересчет на жидкость с $\mathrm{Pr} \neq 0{,}72$ может быть произведен по формуле

$$\mathrm{Nu} \approx 1{,}14C\,\mathrm{Pr}^{0,4}\,\mathrm{Re}^m. \qquad (10.14.2)$$

Таблица 10.7

**Значения коэффициентов $C$ и $m$ в формуле (10.14.1) по ряду экспериментальных данных при $Pr=0,72$**

| Re | 5—80 | $80 \div 5\ 10^3$ | $(0,5 \div 5) \cdot 10^4$ | $>5 \cdot 10^4$ |
|---|---|---|---|---|
| $C$ | 0,81 | 0,695 | 0,197 | 0,023 |
| $m$ | 0,40 | 0,46 | 0,60 | 0,80 |

Опыты Ульзамера, В. И. Гомелаури, А. А. Жукаускаса и др. подтверждают возможность использования формулы (10.14.2) для практических расчетов.

По Гильперту влияние температурного фактора при поперечном обтекании газом бесконечного цилиндра определяется эмпирической формулой

$$\alpha/\alpha_0 = \psi^{m/4}, \tag{10.14.3}$$

т. е. влияние температурного фактора для теплоотдачи плохо обтекаемого тела обратно его влиянию в безотрывном течении.

Угол между направлением потока и осью цилиндра называется углом атаки. Приведенные выше формулы справедливы для угла атаки $\beta = 90°$. На рис. 10.16 представлены результаты опытов по влиянию угла атаки на относительное изменение теплоотдачи цилиндра. В области углов 90—70° теплоотдача остается практически на одном и том же уровне. При $\beta < 70°$ коэффициент теплоотдачи существенно снижается. Для тел призматической формы данные о теплоотдаче получены Л. Д. Берманом и др.

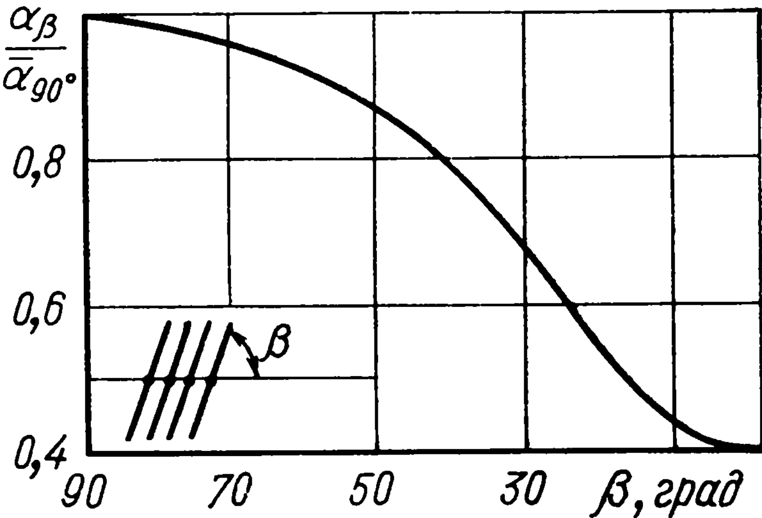



Рис. 10 16. Влияние угла атаки на теплоотдачу цилиндра

На теплоотдачу одиночной трубы заметно влияет также степень турбулентности набегающего потока жидкости. Степень возрастания теплоотдачи при увеличении степени турбулентности набегающего потока видна из табл. 10.8, составленной М. А. Михеевым.

При $Pr \ll 1$ меняется как характер распределения коэффициента теплоотдачи по окружности трубы, так и его зависимость от скорости набегающего потока.

Таблица 10.8

**Степень изменения коэффициента теплопередачи одиночного цилиндра в потоках с неодинаковой турбулентностью**

| Автор | $\alpha/\alpha_1$ | Условия приведения опыта |
|---|---|---|
| Гильперт | 1,00 | Свободная струя на выходе из сопла |
| Михеев | 1,08 | Замкнутая труба с успокоительной решеткой |
| Рейнер и Форнем | 1,18 | Замкнутая труба с успокоительной решеткой после вентилятора |
| Мак-Интайр | 1,50 | Замкнутая труба без успокоительной решетки сразу после вентилятора |
| Эйгенсон | 1 60 | Разомкнутая труба, но при наличии турбулизирующей решетки |

При $Pr \to 0$ поток можно считать потенциальным. Для этих вырожденных условий обтекание цилиндра было изучено Перси и Уинни, а также Грошем и Цессом. Это решение имеет вид

$$Pr \to 0 \left\{ \begin{array}{ll} q_{ст} = \text{const}, & Nu \to 1{,}34\sqrt{Pe}; \\ T_{ст} = \text{const}, & Nu \to 1{,}23\sqrt{Pe}. \end{array} \right\} \qquad (10.14.4)$$

Эти формулы могут быть обобщены на числа $0 < Pr \ll 1$ поправкой типа формулы (10.5.5), т. е. представлены в виде

$$Pr \ll 1, \quad Nu = C\sqrt{(1 - Pr^{1/3})\, Pe}. \qquad (10.14.5)$$

Здесь число Пекле

$$Pe = w_0 D/a. \qquad (10.14.6)$$

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*


1. **Басина И. П., Максимов И. А.** Исследование аэродинамического сопротивления сферической частицы при теплообмене и горении.— «Теплоэнергетика», 1969, № 1, с. 75.
2. **Жидкометаллические** теплоносители. Изд. 3-е, перераб. и доп. М., Атомиздат, 1976. Авт.: В. М. Боришанский, С. С. Кутателадзе, И. И. Новиков, О. С. Федынский.
3. **Зысина-Моложен Л. М., Зысин Л. В., Поляк М. П.** Теплообмен в турбомашинах. Л., «Машиностроение», 1974.
4. **Исатаев С. И., Жанабаев З. Ж.** Теплоотдача шара при струйном обтекании.— «Инж.-физ. журн.», 1968, т. 14, № 4, с. 586.
5. **Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И.** Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М., «Энергия», 1972.
6. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. Изд. 3-е, перераб. и доп. М., «Наука», 1970.
7. **Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В.** Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л., «Судостроение», 1973.
8. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. Пер. с нем. М., «Наука», 1969.
9. **Hilpert R.** Wärmeabgabe von geheizten Drahten und Rohren im Luftstrom. — «Forschung. Ing.-Wes.», 1933, Bd 4, N 4, S. 215.
10. **Ulsamer J.** Die Wärmeabgabe eines Drahtes oder Rohres an einen senkrecht zur Achse Strömenden Gas-oder Flussigkeitsstrom.—«Forschung. Ing.-Wes.», 1932, Bd 3, N 2, S. 94.

# Глава 11

# ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ТЕЧЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

## 11.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРИ ИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ

При установившемся прямолинейном, симметричном, изотермическом ламинарном течении ускорение потока $Dw/dt = 0$, и уравнение движения в цилиндрических координатах примет вид

$$-\frac{dp}{dx}+\mu\left(\frac{d^2 w}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dw}{dR}\right)=0 \qquad (11.1.1)$$

или

$$\frac{d}{dR}\left(2\pi R\mu\frac{dw}{dR}\right)=2\pi R\frac{dp}{dx}. \qquad (11.1.2)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой изменение по радиусу касательных напряжений в симметричном цилиндрическом ламинарном потоке, а правая — силы давления, действующей на столб жидкости единичной длины с сечением $\pi R^2$.

Интегрируя это уравнение и принимая во внимание условия

$$\{R=0,\quad dw/dR=0;\quad R=R_0,\quad w=0\}, \qquad (11.1.3)$$

получаем параболический закон распределения скоростей:

$$w=-\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}(R_0^2-R^2), \qquad (11.1.4)$$

где $R_0$ — внутренний радиус трубы. Средняя расходная скорость

$$\bar{w}=\frac{1}{\pi R_0^2}\int\limits_0^{R_0}2\pi R w dR=-\frac{R_0^2}{8\mu}\frac{dp}{dx}. \qquad (11.1.5)$$

Совмещая две последние формулы, находим

$$w=2\bar{w}[1-(R/R_0)^2]. \qquad (11.1.6)$$

Таким образом, при ламинарном течении скорость на оси трубы в два раза больше средней скорости. В гидравлических расчетах падение давления на единицу длины изотермического потока выражается формулой Дерси

$$-dp/dx=\zeta\rho\bar{w}^2/2D. \qquad (11.1.7)$$

Подставляя сюда значение $\bar{w}$ из уравнения (11.1.5), находим, что при ламинарном течении в круглой трубе

$$\zeta=64/\mathrm{Re}, \qquad (11.1.8)$$

где $\mathrm{Re}=\bar{w}D/\nu$.

Рассмотренные закономерности впервые были установлены в работах Гагена и Пуазейля. Для каналов некруглого сечения зависимость $\zeta(\mathrm{Re})$ имеет тот же характер, но меняется численное значение множителя пропорциональности (табл. 11.1).

При развитом турбулентном течении распределение скоростей в основной части потока хорошо описывается формулой (9.11.9). Сопоставление профилей скоростей в ламинарном и турбулентном потоках показано на рис. 11.1.

Таблица 11.1

**Значение $\zeta Re$ при ламинарном течении в каналах различного поперечного сечения (в качестве определяющего размера принят эквивалентный гидравлический диаметр $D_э = 4\Omega/p$)**

| Форма поперечного сечения канала | $h/b$ | $D_э$ | $\zeta Re$ |
|---|---|---|---|
| Круг ($h=b=D$) | 1 | $D$ | 64 |
| Эллипс ($b$ — большая ось; $h$ — малая ось) | 0,7 | 1,17$h$ | 65 |
| | 0,5 | 1,30$h$ | 68 |
| | 0,3 | 1,44$h$ | 73 |
| | 0,2 | 1,50$h$ | 76 |
| | 0,1 | 1,55$h$ | 78 |
| Прямоугольник ($b$ — большая сторона; $h$ — меньшая сторона) | 0 | 2$h$ | 96 |
| | 0,1 | 1,82$h$ | 85 |
| | 0,2 | 1,67$h$ | 76 |
| | 0,25 | 1,60$h$ | 73 |
| | 0,333 | 1,50$h$ | 69 |
| | 0,5 | 1,33$h$ | 62 |
| Квадрат ($h$ — длина стороны) | 1 | $h$ | 57 |
| Равносторонний треугольник ($h$ — длина стороны) | 1 | 0,58$h$ | 53 |
| Круглое кольцо ($h$ — ширина кольца) | | 2$h$ | 96 |

С большой степенью точности среднюю скорость турбулентного течения можно описать уравнением

$$\bar{w} = \frac{v^*}{\pi R_0^2} \int\limits_0^{R_0 - y_0} 2\pi R \left[ C_* + \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{v^*}{\nu} (R_0 - R) \right] dR =$$

$$= \frac{2v^*}{R_0^2} \int\limits_{y_0}^{R_0} (R_0 - y) \left( C_* + \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{v^* y}{\nu} \right) dy. \qquad (11.1.9)$$

Вычисляя этот интеграл и отбрасывая малые члены, получаем

$$\bar{w} = v^* \left( C_* + \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{v^* R_0}{\nu} - \frac{3}{2\varkappa} \right). \qquad (11.1.10)$$

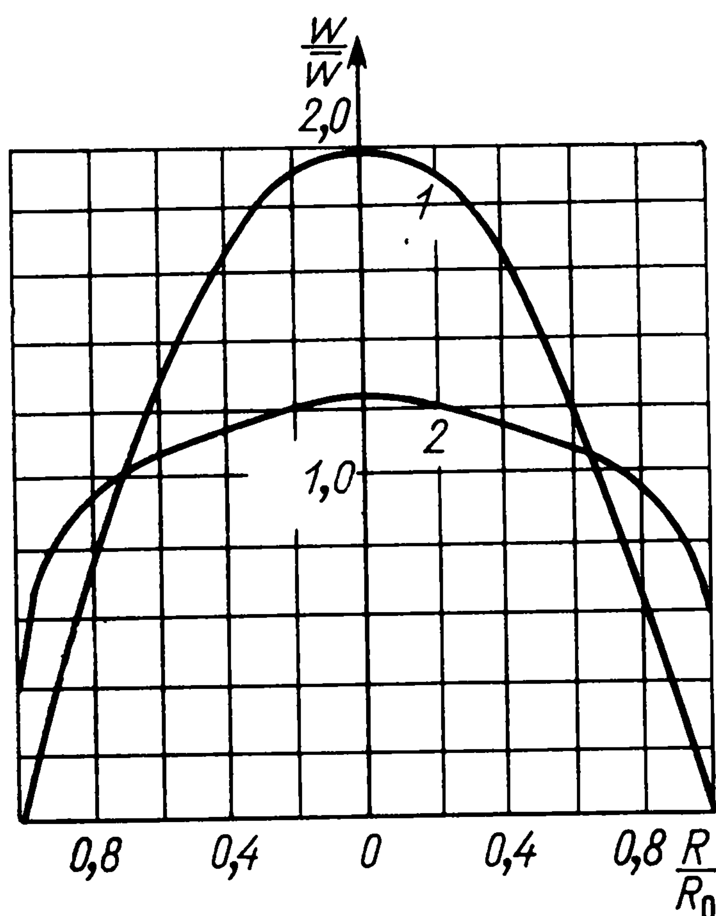



Рис. 11.1. Профили скоростей в трубе:

*1* — ламинарное течение; *2* — трубулентное течение

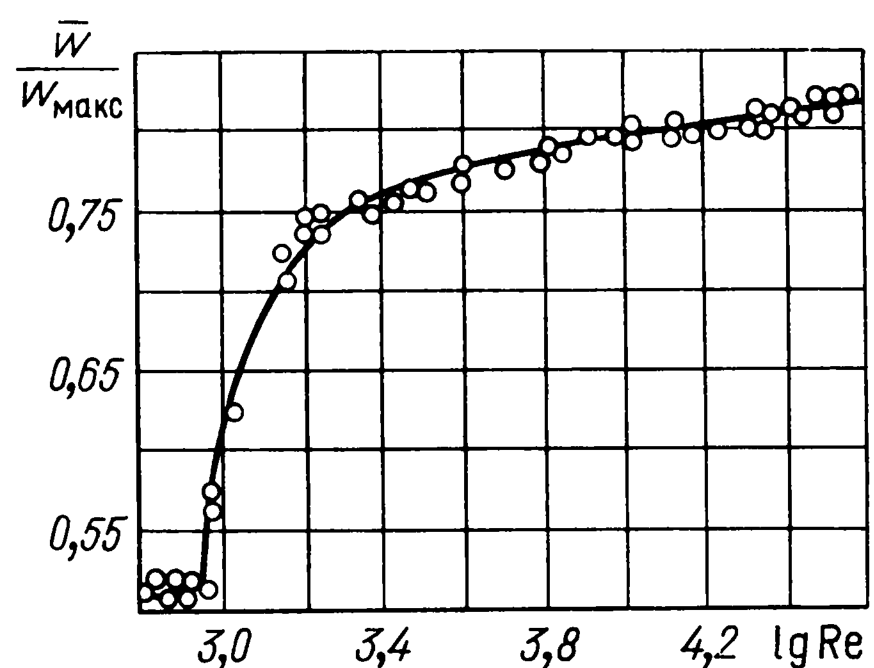



Рис. 11.2 Зависимость $\bar{w}/w_{макс}$ от Re

Сила давления, действующая на жидкость в установившемся прямолинейном потоке, уравновешивается касательными напряжениями, т. е.

$$-\pi R^2 \, dp/dx = 2\pi R \tau. \qquad (11.1.11)$$

Отсюда касательные напряжения на стенке трубы

$$\tau_{c1} = -\frac{R_0}{2} \frac{dp}{dx} = \zeta \frac{\bar{w}^2 \rho}{8} \qquad (11.1.12)$$

и соответственно

$$v^* = \sqrt{\tau_{ст}/\rho} = \bar{w}\sqrt{\zeta/8}. \qquad (11.1.13)$$

Подставляя это значение $v^*$ в уравнение (11.1.10) и вводя численные значения $C_* = 5{,}5$ и $\varkappa = 0{,}4$, получаем связь между коэффициентом сопротивления и числом Re для развитого турбулентного течения в гладкой трубе:

$$1/\sqrt{\zeta} = 0{,}88 \ln (\mathrm{Re}\sqrt{\zeta}) - 0{,}9. \qquad (11.1.14)$$

Полученное выражение не разрешается алгебраически относительно $\zeta$, но хорошо аппроксимируется в области $10^4 < \mathrm{Re} < 10^5$ эмпирической формулой Блазиуса:

$$\zeta = 0{,}316/\mathrm{Re}^{0,25}, \qquad (11.1.15)$$

а в области $\mathrm{Re} > 10^5$ — эмпирической формулой Никурадзе:

$$\zeta = 0{,}0032 + 0{,}221/\mathrm{Re}^{0,237}. \qquad (11.1.16)$$

В области $2000 < \mathrm{Re} < 5000$ имеет место весьма неустойчивая форма течения — переходная между ламинарным и развитым турбулентным режимами.

В области турбулентного течения значение величины $\bar{w}/w_{макс}$ близко к 0,8—0,9 (рис. 11.2).

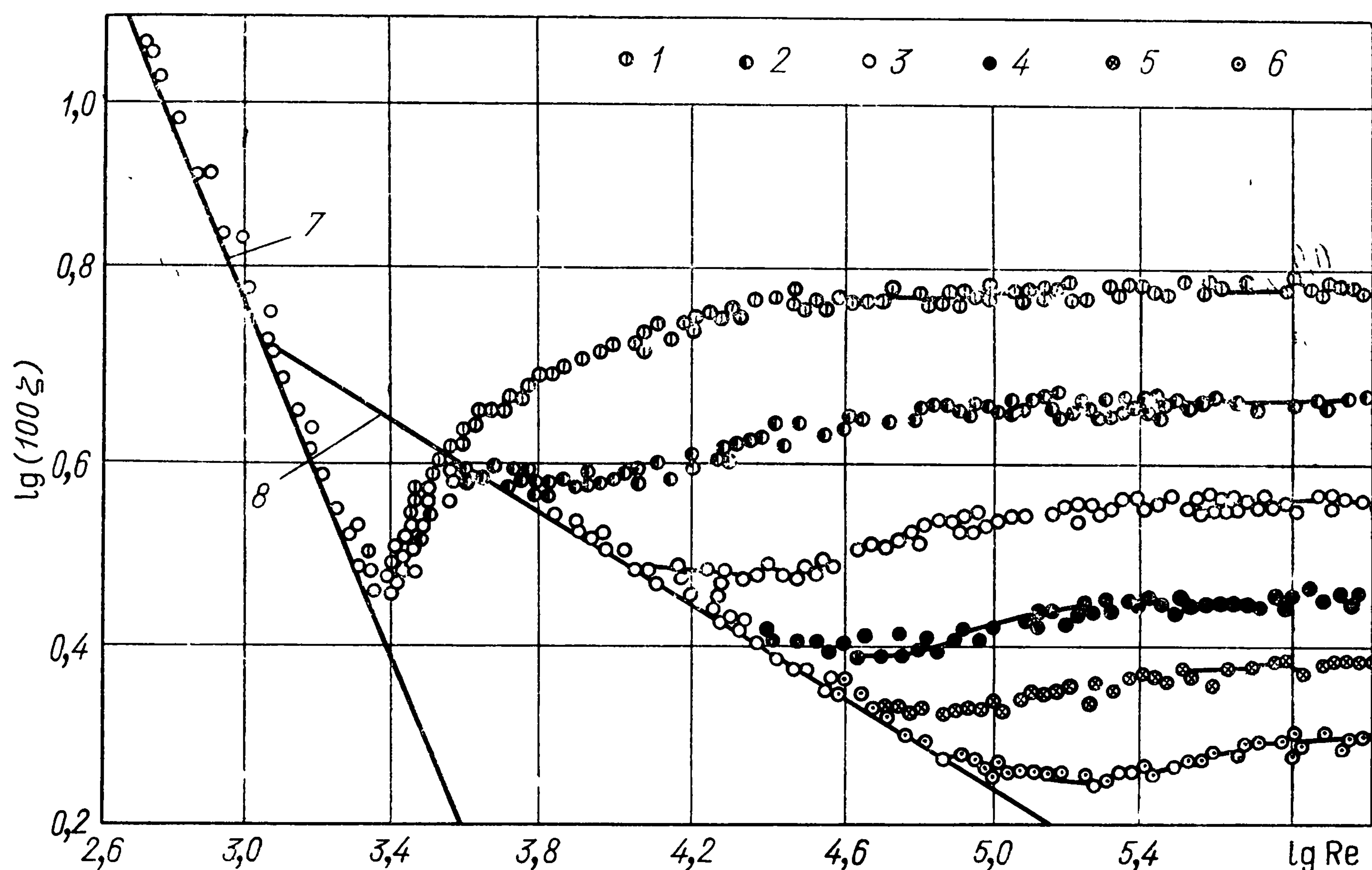



Рис. 11.3. Коэффициент сопротивления труб с однородной зернистой шероховатостью

1 — $D/k = 30$; 2 — $D/k = 61{,}2$; 3 — $D/k = 120$; 4 — $D/k = 252$; 5 — $D/k = 504$; 6 — $D/k = 1014$; 7 — кривая соответствует закону сопротивления при ламинарном течении $\zeta = 64/\mathrm{Re}$; 8 — закону сопротивления при турбулентном течении $\zeta = 0{,}316/\mathrm{Re}^{0,25}$ в гладкой трубе

Гидравлическое сопротивление шероховатых труб оказывается таким же, как и у гладких труб, до тех пор, пока толщина вязкого подслоя больше высоты выступов шероховатости $k$. После того как выступы шероховатости попадают в турбулентную область потока, около них начинается вихреобразование, и вязкое трение перестает заметно влиять на профиль скоростей течения в основной массе жидкости. Как видно из рис. 11.3, при достаточно значительных числах Re в шероховатых трубах имеет место независимость (автомодельность) коэффициента сопротивления от этого критерия.

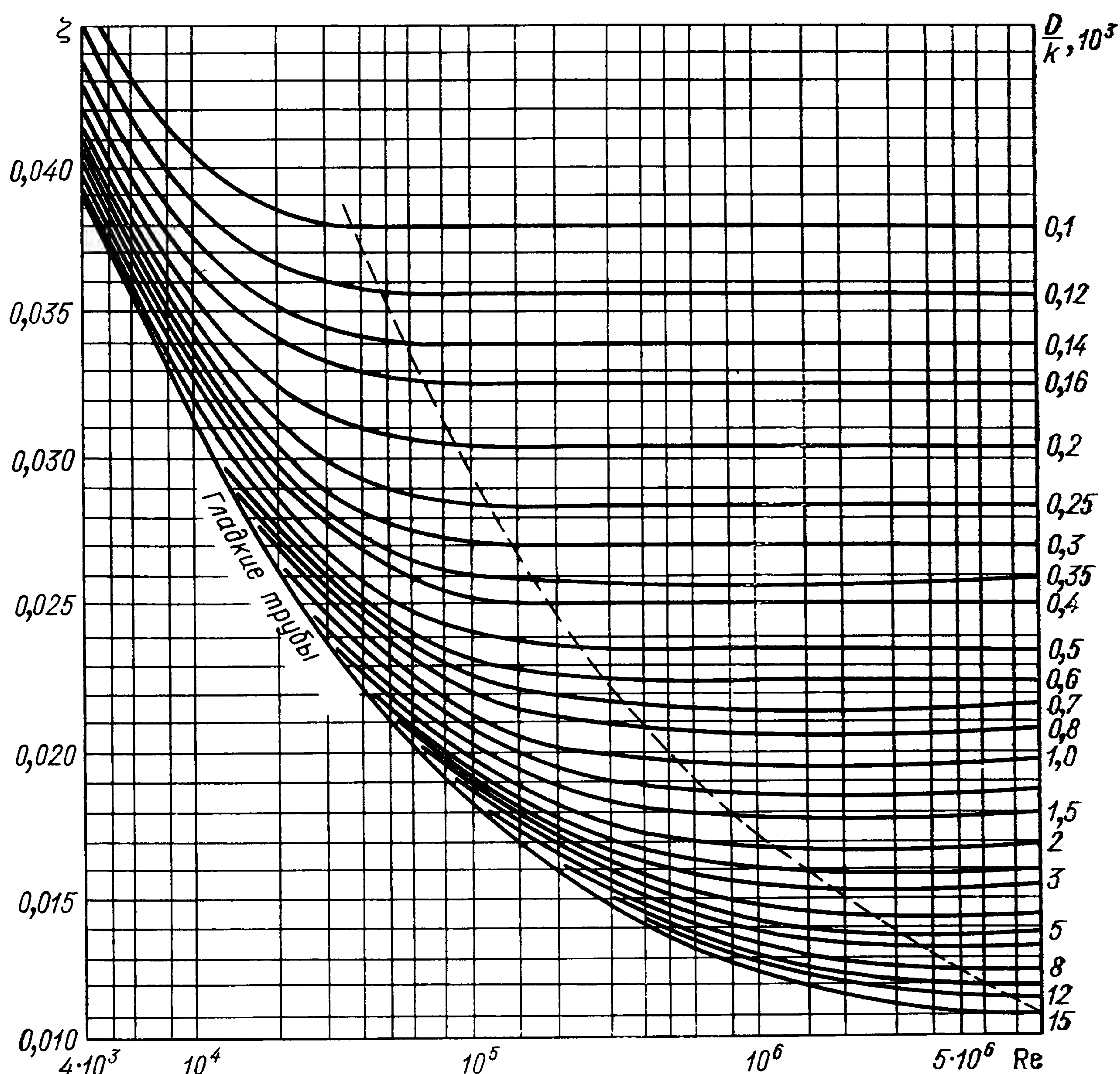


Рис. 11.4. Коэффициент сопротивления технических стальных труб

Эти результаты получены в лабораторных условиях с достаточно однородной зернистой шероховатостью. В эксплуатационных условиях шероховатость труб весьма неоднородна, вследствие чего переход к автомодельной области осуществляется постепенно. Закон сопротивления технических стальных труб показан на рис. 11.4 по данным Мурина.

## 11.2. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ

Записав уравнение теплопереноса в цилиндрических координатах

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial T}{\partial R}+\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)=c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+w_R\frac{\partial T}{\partial R}+w_x\frac{\partial T}{\partial x}\right), \qquad (11.2.1)$$

положив в нем для установившегося осесимметричного прямолинейного ламинарного потока

$$\{\partial T/\partial t=0; \quad w_R=0\} \qquad (11.2.2)$$

и подставив значения $w$ из уравнения (11.1.6), получим

$$\frac{\partial^2 T}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial T}{\partial R}=\frac{2\bar{w}}{a}\left[1-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right]\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \qquad (11.2.3)$$

Введем следующие безразмерные координаты, полагая температуру стенки трубы постоянной:

$$\{\vartheta=(T_{ст}-T)/(T_{ст}-T_1); \quad \xi=R/R_0; \; X=x/R_0\}, \qquad (11.2.4)$$

где $T_1$ — температура жидкости при входе в трубу.

Уравнение (11.2.3) примет вид

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}=\mathrm{Pe}\,(1-\xi^2)\frac{\partial \vartheta}{\partial X}-\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial X^2}, \qquad (11.2.5)$$

где $\mathrm{Pe}=\overline{w}D/a$ — критерий Пекле.

Расчеты показывают, что уже при $\mathrm{Pe}>10$ величину $\partial^2\vartheta/\partial X^2$ можно считать пренебрежимо малой по сравнению с первым членом правой части уравнения (11.2.5), т. е. полагать, что

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}=\mathrm{Pe}\,(1-\xi^2)\frac{\partial \vartheta}{\partial X}. \qquad (11.2.6)$$

Как при нагревании, так и при охлаждении жидкости безразмерная температура $\vartheta$ убывает вдоль течения. В связи с этим разыскиваем частное решение уравнения (11.2.6) в виде произведения двух функций, аналогично тому как это делалось при исследовании тела, стремящегося к тепловому равновесию.

Полагая

$$\vartheta=\psi(\xi)\exp(-\beta^2 X/\mathrm{Pe}) \qquad (11.2.7)$$

и дифференцируя (11.2.7), получаем

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \vartheta}{\partial X}&=-\frac{\beta^2}{\mathrm{Pe}}\psi(\xi)\exp\left(-\beta^2\frac{X}{\mathrm{Pe}}\right);\\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}&=\frac{d\psi(\xi)}{d(\xi)}\exp\left(-\beta^2\frac{X}{\mathrm{Pe}}\right);\\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2}&=\frac{d^2\psi(\xi)}{\partial \xi^2}\exp\left(-\beta^2\frac{X}{\mathrm{Pe}}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (11.2.8)$$

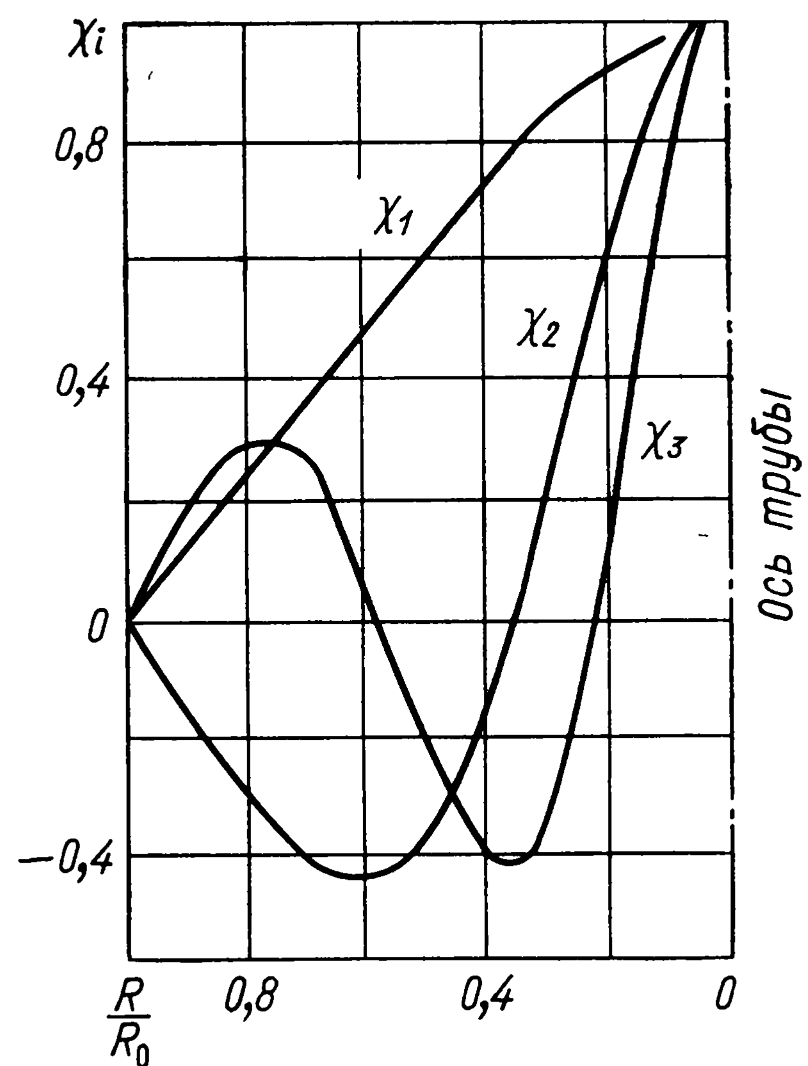



Рис. 11.5. Функции $\chi_i$ в формуле (11.2.12)

Подставляя эти значения производных в уравнение (11.2.6), после сокращения на $\exp(-\beta^2 X/\mathrm{Pe})$ приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{d\psi}{d\xi}+\beta^2(1-\xi^2)\psi=0, \qquad (11.2.9)$$

общее решение которого имеет вид ($1\leqslant i\leqslant\infty$)

$$\vartheta=\Sigma\psi_i(\xi)\exp(-\beta_i^2 X/\mathrm{Pe}). \qquad (11.2.10)$$

Краевые условия:

$$\left.\begin{aligned}&\xi=1,\quad \vartheta=0,\quad \psi(1)=0;\\ &X=0,\quad \vartheta=1,\quad \sum_{i=1}^{i=\infty}\psi_i(\xi)=1.\end{aligned}\right\} \qquad (11.2.11)$$

По вычислениям Нуссельта

$$\psi_i(\xi)=A_i\,\chi_i(\xi). \qquad (11.2.12)$$

Коэффициенты $\beta_i$ и $A_i$ приведены в табл. 11.2, а функция $\chi_i$ изображена на рис. 11.5.

Средняя по сечению трубы температура определяется формулой

$$\overline{T}_x=\frac{2}{\overline{w}R_0^2}\int_0^{R_0} wTRdR. \qquad (11.2.13)$$

Таблица 11.2

**Значения коэффициентов в формулах (11.2.10) и (11.2.12)**

| $i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\beta_i$ | 2,705 | 6,66 | 10,3 |
| $A_i$ | +1,477 | −0,810 | +0,385 |

Подставляя сюда значение $T$ из уравнения (11.2.10), получаем

$$\bar{\vartheta}_x = 0{,}819 \exp(-14{,}62ax/\bar{w}D^2) + 0{,}0976 \exp(-88{,}2ax/\bar{w}D^2) + \\ + 0{,}0189 \exp(-212ax/\bar{w}D^2) + \dots . \quad (11.2.14)$$

Дифференцируя последнее уравнение, находим

$$-(\partial\vartheta/\partial\xi)_{\xi=1} = 1{,}498 \exp(-14{,}62ax/\bar{w}D^2) + 1{,}114 \exp(-88{,}2ax/\bar{w}D^2) + \\ + 0{,}503 \exp(-212ax/\bar{w}D^2) + \dots \quad (11.2.15)$$

Граничное условие на стенке трубы имеет вид

$$\alpha_x (T_{\text{ст}} - \bar{T}_x) = -\lambda (\partial T/\partial y)_{\text{ст}}, \quad (11.2.16)$$

Принимая во внимание, что $y = R_0 - R$, можем записать:

$$\alpha_x (T_{\text{ст}} - \bar{T}_x) = \lambda (\partial T/\partial R)_{R_0}. \quad (11.2.17)$$

Из выведенных формул видно, что теплоотдача при ламинарном течении жидкости в трубе определяется комплексом $ax/\bar{w}D^2$. На рис. 11.6 изображено изменение критерия

$$\text{Nu}_x = D\alpha_x/\lambda \quad (11.2.18)$$

с ростом значения указанного ранее комплекса для нескольких типов каналов. Для круглой трубы предельное (наименьшее) значение критерия Нуссельта равно 3,66.

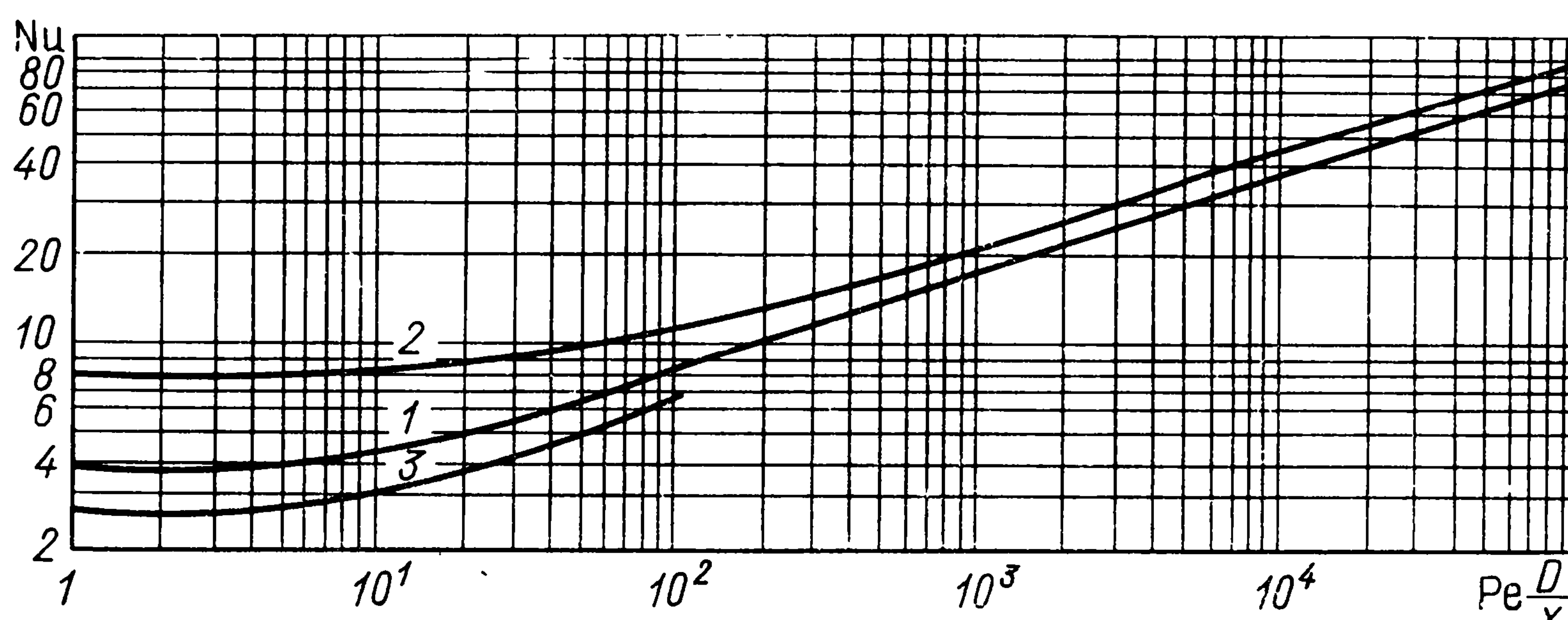



Рис. 11.6. Зависимость критерия Nu от комплекса Pe $D/x$ при ламинарном течении ($\alpha$ отнесено к среднелогарифмической разности температур):

1 — круглая труба; 2 — плоская щель; 3 — равносторонний треугольник

Повышенное значение коэффициента теплоотдачи во входном участке объясняется тем, что температурное поле формируется постепенно на некотором расстоянии от места начала обогрева. При этом градиент температуры вблизи стенки трубы меняется от бесконечности в начальном сечении, где теоретически температура по всему сечению постоянна и на стенке имеет место скачок температуры от $T_{\text{ст}}$ до $T_1$, до значения, соответствующего уже стабилизированному температурному полю.

При задании условия постоянства плотности теплового потока на стенке трубы ($q$ = const) значения среднего коэффициента теплоотдачи оказываются несколько более высокими, чем при условии $T_{ст}$ = const. Стабилизированное значение числа Nu при $q$ = const для круглой трубы равно 4,36.

Решения, изображенные на рис. 11.6, могут быть аппроксимированы с достаточной для практических целей точностью двумя линиями: а) при значениях определяющего комплекса Pe$D/L$, меньших некоторого числа (см. табл. 11.3) Nu = const; б) при других значениях этого комплекса Nu $\sim$ (Pe$D/L)^{1/3}$.

Для расчета теплоотдачи при ламинарном течении жидкости (без учета свободной конвекции) в каналах сложной геометрии с постоянной температурой стенки могут быть использованы формулы, приведенные в табл. 11.3.

Таблица 11.3

**Формулы для расчета теплопередачи при ламинарном течении в каналах с различной формой сечения**

| Профиль канала | Эквивалентный диаметр | Область чисел Pe $D_э/L$ | Число $\overline{Nu}$ |
|---|---|---|---|
| Круглая труба диаметром $D$ | $D_э = D$ | >12<br><12 | $\overline{Nu} = 1,61\,(\mathrm{Pe}\,D/L)^{1/3}$<br>$\overline{Nu} = 3,66$ |
| Плоская щель шириной $\delta$ | $D_э = 2\delta$ | >70<br><70 | $\overline{Nu} = 1,85\,(\mathrm{Pe}\,D_э/L)^{1/3}$<br>$\overline{Nu} = 7,50$ |
| Равносторонний треугольник, длина стороны $h$ | $D_э = 0,58h$ | >7<br><7 | $\overline{Nu} = 1,50\,(\mathrm{Pe}\,D_э/L)^{1/3}$<br>$\overline{Nu} = 2,70$ |

Таблица 11.4

**Значение чисел $\overline{Nu}$ при ламинарном течении в области стабилизованной теплоотдачи**

| Профиль канала | Закон изменения температуры стенки | Значения числа $\overline{Nu}$ | Автор расчета |
|---|---|---|---|
| Круглая труба диаметром $D$ | Постоянная<br>Меняется линейно | 3,66<br>4,36 | Грэц, Нуссельт<br>Игл и Фергюссон |
| Плоская щель, обогреваемая с обеих сторон ($D_э = 2\,\delta$) | Постоянная<br>Меняется линейно | 7,5<br>8,24 | Хапеман и Эрет<br>Янсен |
| Плоская щель, обогреваемая с одной стороны ($D_э = 2\,\delta$) | Постоянная<br>Меняется линейно | 4,86<br>5,40 | Эльзер<br>Янсен |
| Равносторонний треугольник ($D_э = 0,58\,h$) | Постоянная | 3,1 | В. К. Мигай |
| Равнобедренный треугольник $\left(D_э = \dfrac{2h}{1 + \sqrt{(2h/L)^2 + 1}}\right)$ угол $\beta$ при вершине:<br>20°<br>40°<br>80°<br>90°<br>100° | <br><br>Постоянная<br>»<br>»<br>»<br>» | <br><br>2,7<br>3,0<br>3,5<br>3,7<br>3,8 | <br><br>В. К. Мигай<br>»<br>»<br>»<br>» |

В табл. 11.4 приведены значения числа Нуссельта $\bar{\mathrm{Nu}} = \bar{\alpha} D_э/\lambda$ при ламинарном течении для каналов с различной формой сечения и для различных законов изменения температуры стенки канала. На теплоотдаче при ламинарном течении существенно сказывается свободная конвекция. Подробно проблема теплообмена при ламинарном течении в трубах рассмотрена в монографии Б. С. Петухова.

### 11.3. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Рассматривая установившийся осесимметричный поток и полагая, что теплопроводность в радиальном направлении много больше, чем в осевом, можем написать осредненное уравнение теплопереноса в следующем виде:

$$a\left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial \bar{T}}{\partial R}\right)+\frac{\partial}{\partial R}\left(-\overline{V_R \theta}\right)=\bar{w}_x\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}, \qquad (11.3.1)$$

или иначе:

$$\frac{\partial}{\partial R}\left[R(\lambda+\lambda_T)\frac{\partial \bar{T}}{\partial R}\right]=c\rho \bar{w} R\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}. \qquad (11.3.2)$$

Поскольку при рассмотрении турбулентных течений мы будем оперировать только величинами, осредненными за период пульсации, то в дальнейшем их локальные значения будем писать без знака осреднения.

Подстановка в уравнение (11.3.2) значения $\lambda_T$ из уравнения (9.9.4) дает основное уравнение для определения температурного поля при турбулентном течении в трубе:

$$\frac{\partial}{\partial R}\left[\left(1+\varepsilon\frac{\nu}{a}\frac{\mu_T}{\mu}\right)R\frac{\partial T}{\partial R}\right]=\frac{wR}{a}\frac{\partial T}{\partial x}. \qquad (11.3.3)$$

Введя безразмерные переменные

$$\left.\begin{aligned}&\xi=R/R_0;\quad X=x/R_0;\quad \vartheta=(T_{\text{ст}}-T)/(T_{\text{ст}}-T_x);\\&\omega=w/\bar{w};\quad \Pr=\nu/a;\quad \mathrm{Pe}=\bar{w}D/a,\end{aligned}\right\} \qquad (11.3.4)$$

получим уравнение

$$2\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\left(1+\varepsilon\Pr\frac{\mu_T}{\mu}\right)\xi\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right]=\mathrm{Pe}\,\xi\omega\frac{\partial \vartheta}{\partial X}. \qquad (11.3.5)$$

Сопоставление этого уравнения с уравнением (11.2.4) показывает, что в отличие от ламинарного потока в турбулентном теплообмен зависит не только от критерия Pe, но и от критерия Pr.

Коэффициент теплоотдачи связан с температурным полем уравнением (11.2.17), которое при принятом в этом разделе определении имеет вид

$$\mathrm{Nu}_x=2\left(\partial\vartheta/\partial\xi\right)_{\text{ст}}. \qquad (11.3.6)$$

Средняя по сечению трубы температура

$$\frac{2}{\bar{w}R_0^2}\int_0^{R_0} wR\vartheta dR=2\int_0^1 w\xi\vartheta d\xi=\bar{\vartheta}_x=1. \qquad (11.3.7)$$

По тем же причинам, что и в ламинарном потоке, коэффициент теплоотдачи $\alpha$ при турбулентном течении имеет повышенные значения в начальном участке трубы и постепенно снижается до некоторого постоянного значения, определяемого только физическими свойствами жидкости, ее скоростью течения и диаметром трубы. В связи с этим общее решение уравнения (11.3.5) также может разыскиваться в виде произведения двух функций типа (11.2.7).

При этом уравнение (11.3.5) приводится к уравнению в обыкновенных дифференциалах

$$\frac{d}{d\xi}\left[f_1(\xi)\frac{d\psi(\xi)}{d\xi}\right]+\beta^2 f_2(\xi)\,\psi(\xi)=0, \qquad (11.3.8)$$

где

$$\left\{f_1(\xi)=\left(1+\varepsilon \Pr\frac{\mu_T}{\mu}\right)\xi;\quad f_2(\xi)=\omega\xi\right\}. \qquad (11.3.9)$$

Решение этого уравнения зависит от выбора вида функций $\frac{\mu_T}{\mu}(\xi)$ и $\omega(\xi)$.

## 11.4. СВЯЗЬ МЕЖДУ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ТЕПЛООТДАЧИ И ТРЕНИЯ

При турбулентном течении в трубе с числом $\Pr = 1$ имеет место приближенное подобие полей температур и скоростей. Следовательно, в этом случае можно воспользоваться для стабилизированного течения формулой (9.2.10). При этом следует иметь в виду, что в данном случае $c_f = \zeta/4$. Последнее непосредственно видно из сопоставления формул (9.2.7) и (11.1.12). Следовательно, при турбулентном течении и $\Pr = 1$

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Re}\,\zeta/8. \qquad (11.4.1)$$

Здесь $\mathrm{Nu} = \alpha D/\lambda$ и $\mathrm{Re} = \bar{w}D/\nu$, где $D$ — внутренний диаметр трубы.

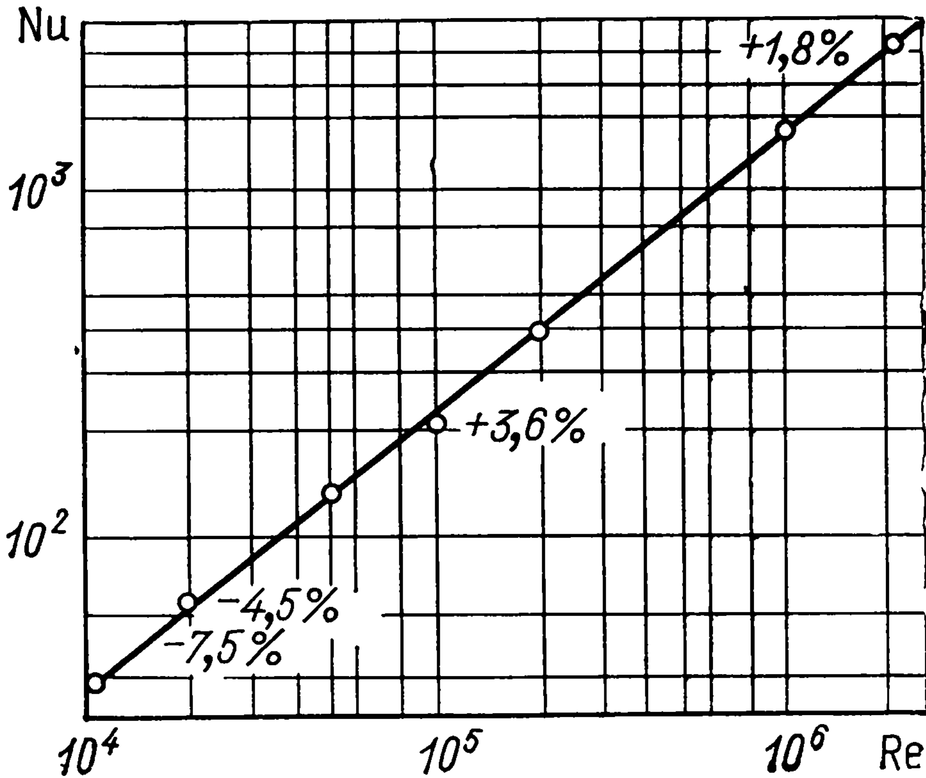



Рис. 11.7. Зависимость Nu от Re при Pr=1:

——— по формуле (11.4.1); ○ — интерполяция по формуле (11.4.2)

В табл. 11.5 приведены результаты расчетов по формуле (11.4.1) при значениях коэффициента трения $\zeta$, взятых по результатам опытов с гладкими трубами. На рис. 11.7 приведенные в табл. 11.5 данные представлены в логарифмической анаморфозе. Обнаруживается весьма важное с практической точки зрения обстоятельство, а именно: через все расчетные точки можно провести одну логарифмическую прямую, отклоняющуюся от точных данных на $\pm$ 3% в широком интервале значений Re — от $2\cdot 10^4$ до $2\cdot 10^6$. Уравнение этой логарифмической прямой:

$$\mathrm{Nu} = 0{,}023\mathrm{Re}^{0,8}, \qquad (11.4.2)$$

или в другой форме

$$\mathrm{St} = \alpha/(c\rho\bar{w}) = 0{,}023\mathrm{Re}^{-0,2}. \qquad (11.4.3)$$

Таблица 11.5

**Значения критерия $\mathrm{Nu} = D\alpha/\lambda$, рассчитанные по формуле (11.4.1) по данным $\zeta$ для гладких труб при изотермическом течении (расчет справедлив для сред с Pr = 1)**

| Re | $1\cdot10^4$ | $2\cdot10^4$ | $5\cdot10^4$ | $1\cdot10^5$ | $2\cdot10^5$ | $5\cdot10^5$ | $1\cdot10^6$ | $2\cdot10^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta$ | 0,0316 | 0,0266 | 0,0211 | 0,0177 | 0,0155 | 0,0126 | 0,0115 | 0,0105 |
| Nu | 39,5 | 66,5 | 132 | 221 | 388 | 789 | 1440 | 2620 |

Этот результат соответствует подстановке в формулу (11.4.1) значения

$$\zeta = 0{,}184\,\mathrm{Re}^{-0{,}2}. \qquad (11.4.4)$$

Последнее уравнение показывает, что критерий St менее чувствителен к изменению числа Re, чем критерий Nu. В табл. 11.6 приведено сопоставление значений, полученных по формуле (11.4.2), с данными табл. 11.5, показывающее их хорошее соответствие.

Таблица 11.6

**Сопоставление расчетов по интерполяционной формуле (11.4.2) с расчетами по формуле (11.4.1) (расчет справедлив для сред с Pr = 1)**

| Re | $1\cdot10^4$ | $2\cdot10^4$ | $5\cdot10^4$ | $1\cdot10^5$ | $2\cdot10^5$ | $5\cdot10^5$ | $1\cdot10^6$ | $2\cdot10^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| По формуле (11.4.1) | 39,5 | 66,5 | 132 | 221 | 388 | 789 | 1440 | 2620 |
| По формуле (11.4.2) | 36.5 | 63.5 | 132 | 230 | 400 | 816 | 1450 | 2520 |
| Расхождение по отношению к формуле (11.4.1), % | —7,6 | —4,4 | 0,0 | +4,0 | +3,0 | +3,5 | +0,7 | +3,8 |

Для случая $\mathrm{Pr} \neq 1$ необходимо рассмотреть общее решение уравнения (11.3.6), которое, очевидно, имеет вид

$$\mathrm{Nu} = \Phi(\mathrm{Pr};\ \mathrm{Re};\ X). \qquad (11.4.5)$$

## 11.5. РЕШЕНИЕ ПРИ ЛИНЕЙНОМ ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ СТЕНКИ

Тепловой поток, проходящий через контрольную поверхность единичной длины

$$Q_R = -2\pi R(\lambda + \lambda_T)\,\partial T/\partial R, \qquad (11.5.1)$$

и соответственно уравнение (11.3.2) можно переписать в виде

$$-\partial Q_R/\partial R = 2\pi R c\rho w\,\partial T/\partial x. \qquad (11.5.2)$$

Частный интеграл

$$-\int_0^R \frac{\partial Q_R}{\partial R}\,dR = Q_R \qquad (11.5.3)$$

выражает собой количество тепла, втекающее в объем потока, ограниченный рассматриваемой контрольной поверхностью радиуса $R$. Взяв частные интегралы по радиусу от обеих частей уравнения (11.3.3), получим

$$-\frac{Q_R}{2\pi\lambda} = \left(1 + \varepsilon\,\mathrm{Pr}\,\frac{\mu_T}{\mu}\right) R\,\frac{\partial T}{\partial R} = \frac{1}{a}\int_0^R wR\,\frac{\partial T}{\partial x}\,dR. \qquad (11.5.4)$$

Далее, вычисляя частный интеграл

$$\int_R^{R_0} \frac{\partial T}{\partial R}\,dR = T_{\text{ст}} - T, \qquad (11.5.5)$$

получаем температуру потока на рассматриваемой контрольной поверхности радиуса $R$ в сечении $x$.

Совмещение уравнений (11.5.4) и (11.5.5) дает

$$T_{\text{ст}} - T = \frac{1}{a} \int\limits_{R}^{R_0} \frac{\int\limits_0^R wR\,(\partial T/\partial x)\,dR}{(1 + \varepsilon\,\Pr\,\mu_T/\mu)\,R}\,dR. \tag{11.5.6}$$

Приводя последнее уравнение к безразмерному виду, получаем

$$\vartheta = -\frac{\mathrm{Pe}}{2} \int\limits_{\xi}^{1} \frac{\int\limits_0^{\xi} \omega\xi\,(\partial\vartheta/\partial X)\,d\xi}{(1 + \varepsilon\,\Pr\,\mu_T/\mu)\,\xi}\,d\xi. \tag{11.5.7}$$

При линейном изменении температуры стенки вдоль трубы температурное поле можно представить, как это сделали Игл и Фергюссон, в виде двучлена

$$T\,(x;\; R) = \mathrm{A}x + f\,(R). \tag{11.5.8}$$

При постоянной плотности теплового потока вдоль всей трубы ($dq_{\text{ст}}/dx = 0$) из выражения (11.5.8) непосредственно следует, что

$$\mathrm{A} = \partial T/\partial x = 2q_{\text{ст}}/(c\rho\bar{w}R_0), \tag{11.5.9}$$

или в безразмерных величинах

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial X} \approx \frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial X} = -\frac{R_0}{T_{\text{ст}} - T}\,\frac{\partial\bar{T}}{\partial x} = -\frac{2\alpha}{c\rho\bar{w}} = -2\,\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}. \tag{11.5.10}$$

В результате такой подстановки безразмерная температура оказывается прямо пропорциональной числу Нуссельта:

$$\vartheta = \mathrm{Nu} \int\limits_{\xi}^{1} \frac{\int\limits_0^{\xi} \omega\xi d\xi}{(1 + \varepsilon\,\Pr\,\mu_T/\mu)\,\xi}\,d\xi. \tag{11.5.11}$$

Вводя это выражение $\vartheta$ в уравнение (11.3.8), находим, что для рассматриваемых условий

$$\mathrm{Nu}^{-1} = 2 \int\limits_0^1 \omega\xi \left( \int\limits_{\xi}^{1} \frac{\int\limits_0^{\xi} \omega\xi d\xi}{(1 + \varepsilon\,\Pr\,\mu_T/\mu)\,\xi}\,d\xi \right) d\xi, \tag{11.5.12}$$

или

$$\mathrm{Nu}^{-1} = 2 \int\limits_0^1 \frac{\left( \int\limits_0^{\xi} \omega\xi d\xi \right)^2}{(1 + \varepsilon\,\Pr\,\mu_T/\mu)\,\xi}\,d\xi. \tag{11.5.13}$$

Это удобное интегральное соотношение было получено Лайном.

В основной области турбулентного потока профиль скоростей весьма пологий, и скорости в данной точке мало отличаются от средней скорости по сечению, т. е. в ядре потока $\omega \approx 1$. Если принять $\omega = 1$, то такое приближение соответствует линейному распределению плотности теплового потока по радиусу трубы.

Действительно, подставляя в выражение (11.3.9) значение $\partial T/\partial x$ из уравнения (11.5.9) и полагая $w = \bar{w}$, получаем

$$\frac{dQ_R}{dR} = \frac{d}{dR}\,(2\pi R q_R) = -4\pi q\,\frac{R}{R_0}. \tag{11.5.14}$$

Интегрирование этого уравнения в пределах от $R$ до 0 дает

$$q_R = qR/R_0 = q(1 - y/R_0), \qquad (11.5.15)$$

где $q$ — плотность теплового потока на внутренней поверхности трубы; $y$ — расстояние от внутренней поверхности трубы в глубь потока.

Положив в формуле (11.5.13) $\omega = 1$, получаем для безразмерного коэффициента теплоотдачи следующее простое выражение:

$$\mathrm{Nu} \approx 2 \left( \int\limits_0^1 \frac{\xi^3 \, d\xi}{1 + \varepsilon \Pr \mu_T/\mu} \right)^{-1}. \qquad (11.5.16)$$

Таким образом, стабилизированное значение коэффициента теплоотдачи при турбулентном течении зависит не только от коэффициента теплопроводности среды и диаметра трубы, как это имеет место при ламинарном течении, но и от отношения $\nu/a$ и скорости течения жидкости (через величину $\mu_T/\mu$)*.

## 11.6. ТЕПЛООТДАЧА К ТУРБУЛЕНТНОМУ ПОТОКУ ПРИ $\Pr > 1$

Для сред с числом $\Pr \geqslant 1$ в основной части потока значение $\varepsilon$ близко к 1. Так, по опытам Людвига, вблизи стенки $\varepsilon \approx 1{,}08$, достигая на оси трубы значения 1,48.

Для развития процесса теплообмена при числах $\Pr > 1$ существенна именно пристенная область, в которой имеет место наиболее сильное изменение температуры текущей среды. Поэтому в той же мере, как и приближение (11.5.14), в уравнении (11.5.16) можно положить $\varepsilon = 1$. Это обстоятельство существенно облегчает вычисление интеграла в последней формуле.

Обращаясь к профилю скоростей в плоском турбулентном потоке, замечаем, что такой поток можно разделить на три области: 1) турбулентное ядро, распределение скоростей в котором с высокой степенью точности выражается формулой (9.11.9); в этой области трение практически полностью определяется турбулентным перемешиванием; 2) промежуточный слой, распределение скоростей в котором определяется в первом приближении формулой (9.11.12); в этой области молекулярное и турбулентное трения соизмеримы, причем роль молекулярного трения увеличивается по мере уменьшения расстояния от твердой стенки; 3) вязкий слой, в котором решающее значение имеет молекулярное трение, и распределение скоростей с большой степенью точности выражается формулой (9.11.5).

Как видно из формулы (9.11.12) и рис. 9.2, распределение скоростей в промежуточном слое имеет сложный характер. Однако оно достаточно хорошо аппроксимируется полулогарифмической прямой аналогично профилю скоростей в турбулентном ядре. При этом, конечно, константы $C_*$ и $\varkappa$ имеют другие значения, чем в формуле (9.11.9), являясь чисто эмпирическими коэффициентами. Такая аппроксимация существенно упрощает вычисление интеграла в формуле (11.5.16).

Входящая в формулы для распределения скоростей величина $\eta$ связана с относительным радиусом $\xi$ следующим отношением:

$$\eta = \frac{v^* y}{\nu} = \frac{v^*}{\nu}(R_0 - R) = \mathrm{Re} \sqrt{\frac{\zeta}{32}} (1 - \xi). \qquad (11.6.1)$$

Как видно из табл. 11.7, толщина вязкого слоя настолько мала, что в его пределах можно считать $\xi^3 = 1$. Толщина промежуточного слоя несколько больше толщины вязкого слоя, и при малых числах Re значение $\xi^3$ в этом слое может отличаться на 10—30% от единицы.

---

* Полагая в выражении (11.5.16) $\mu_T = 0$ и подставляя в него $w$ из формулы (11.1.6), находим, что стабилизированное значение $\alpha$ при ламинарном течении и $q = \mathrm{const}$ определяется условием $\mathrm{Nu} \approx 4{,}36$. Это значение несколько больше полученного в разд. 11.3 значения $\mathrm{Nu} = 3{,}66$ для случая $T_{ст} = \mathrm{const}$.

Таблица 11.7

**Значения относительного радиуса границы вязкого слоя $\xi_0$, относительной толщины этого слоя $1-\xi_0$, относительного расстояния промежуточного слоя от стенки трубы $\xi_2$, относительной величины этого слоя $1-\xi_2$ и комплекса $Re\sqrt{\zeta/32}$ (принято: $\eta_0=6,8$; $\eta_2=30$; $\zeta$—по табл. 11.5)**

| Re | $1\cdot10^4$ | $5\cdot10^4$ | $5\cdot10^5$ | $1\cdot10^6$ | $5\cdot10^6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\xi_0$ | 0,9784 | 0,9947 | 0,9971 | 0,99932 | 0,99964 |
| $1-\xi_0$ | 0,0216 | 0,0055 | 0,0029 | 0,00068 | 0,00036 |
| $\xi_2$ | 0,9050 | 0,9758 | 0,9872 | 0,9970 | 0,99841 |
| $1-\xi_2$ | 0,0950 | 0,0242 | 0,0128 | 0,0030 | 0,00159 |
| $Re\sqrt{\zeta/32}$ | 314 | 1280 | 2310 | 9900 | 18 900 |

Изложенное позволяет для случая $Pr \geqslant 1$ представить формулу (11.5.16) в следующем виде*:

$$Nu \approx 2\left(\int_0^{\xi_2}\frac{\xi^3\,d\xi}{Pr\,\mu_T/\mu}+\int_{\xi_2}^{\xi_1}\frac{\xi^3\,d\xi}{1+Pr\,\mu_T/\mu}+\int_{\xi_1}^{1}\frac{d\xi}{1+Pr\,\mu_T/\mu}\right)^{-1}. \qquad (11.6.2)$$

Первый из интегралов (11.6.2) характеризует термическое сопротивление ядра потока, обусловленное полностью турбулентным перемешиванием. Второй — промежуточного слоя, в котором молекулярный и турбулентный переносы тепла соизмеримы. Третий—вязкого слоя, в котором интенсивность турбулентных пульсаций весьма мала, вследствие чего они сказываются на теплообмене только при больших значениях Pr.

Координата $\xi = 0$ соответствует оси трубы, $\xi_2$ — условной границе промежуточного слоя, $\xi_1$ — условной толщине вязкого слоя, которая может в известной мере отклоняться от истинного значения $\xi_0$ в зависимости от способа аппроксимации профиля скоростей в промежуточном слое.

Для каждой из рассмотренных трех областей потока существуют следующие расчетные соотношения:

турбулентное ядро:

$$0\leqslant\xi\leqslant\xi_2;\quad \mu_T\gg\mu;\quad w=v^*\left(C_*+\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{v^*y}{\nu}\right);$$

$$\tau=\tau_T=\tau_{ст}\left(1-\frac{y}{R_0}\right)=\tau_{ст}\,\xi;$$

$$\mu_T=\frac{\tau_T}{dw/dy}=\rho\varkappa v^*\,y\xi;$$

$$\mu_T/\mu=\lambda\eta\xi=\varkappa\,Re\sqrt{\zeta/32}\,(1-\xi)\,\xi;$$

$$\lambda_T/\lambda=Pr\,\mu_T/\mu;$$

* Здесь следует иметь в виду, что применение интеграла (11.5.16) при одновременном введении в рассмотрение переменной интенсивности турбулентного переноса по радиусу трубы объясняется тем, что, положив в выражении (11.5.13) значение $\omega = 1$, отнюдь нельзя при этом считать постоянным и отношение $\mu_T/\mu$. Иначе говоря, неравномерность поля скоростей, локализованная в узком пристенном слое, существенно сказывается на термическом сопротивлении потока, но мало влияет на полный расход жидкости.

промежуточный слой*:

$$\xi_2 \leqslant \xi \leqslant \xi_1;$$
$$w = v^*\left(C'_* + \frac{1}{\varkappa'} \ln \frac{v^* y}{\nu}\right);$$
$$\tau = \tau_T + \mu dw/dy = \tau_{\text{ст}}\, \xi \approx \tau_{\text{ст}};$$
$$\mu_T = \frac{\tau}{dw/dy} - \mu \approx \rho\varkappa' v^* y - \mu;$$
$$\mu_T/\mu \approx \varkappa' \operatorname{Re} \sqrt{\zeta/32}\, (1-\xi) - 1;$$
$$\lambda_T/\lambda = \Pr \mu_T/\mu;$$

вязкий слой:

$$\xi_1 \leqslant \xi \leqslant 1;$$
$$\mu_T \ll \mu;$$
$$w = v^{*2} y/\nu.$$

Воспользовавшись этими соотношениями, вычислим каждый из трех интегралов уравнения (11.6.2):

$$\int_0^{\xi_2} \frac{\xi^3 d\xi}{\Pr \mu_T/\mu} = \int_0^{\xi_2} \frac{\xi^2 d\xi}{\Pr \varkappa \operatorname{Re} \sqrt{\zeta/32}\, (1-\xi)} =$$
$$= \frac{1}{\Pr \varkappa \operatorname{Re} \sqrt{\zeta/32}} \left[\ln \frac{\operatorname{Re}}{\eta_2} \sqrt{\frac{\zeta}{32}} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\eta}{\operatorname{Re}} \sqrt{\frac{32}{\zeta}}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - 1 + \frac{\eta_2}{\operatorname{Re}} \sqrt{\frac{32}{\zeta}}\right].$$

При $\operatorname{Re} > 10^4$ с погрешностью $\leqslant 2\%$

$$\int_0^{\xi_2} \frac{\xi^3 d\xi}{\Pr \mu_T/\mu} = \frac{1}{\Pr \varkappa \operatorname{Re} \sqrt{\zeta/32}} \left(\ln \frac{\operatorname{Re}}{\eta_2} \sqrt{\frac{\zeta}{32}} - \frac{3}{2}\right). \qquad (11.6.3)$$

Далее

$$\int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\xi^3 d\xi}{1 + \Pr \mu_T/\mu} = \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\xi^3 d\xi}{\Pr \varkappa' \operatorname{Re} \sqrt{\zeta/32}\, (1-\xi) - (\Pr - 1)} =$$
$$= \frac{1}{\Pr \varkappa' \operatorname{Re} \sqrt{\zeta/32}} \left[Z^3 \ln \frac{1 + \Pr(\varkappa' \eta_2 - 1)}{1 + \Pr(\varkappa' \eta_1 - 1)} + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\operatorname{Re}\sqrt{\zeta/32}} (1 - Z + Z^2)\right],$$

где

$$Z = 1 - \frac{\Pr - 1}{\Pr \varkappa' \operatorname{Re} \sqrt{\zeta/32}}.$$

При $\operatorname{Re} > 10^4$ с погрешностью $\leqslant 1\%$

$$\int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\xi^3 d\xi}{1 + \Pr \mu_T/\mu} = \frac{1}{\Pr \varkappa' \operatorname{Re} \sqrt{\zeta/32}} \ln \frac{1 + \Pr(\varkappa' \eta_2 - 1)}{1 + \Pr(\varkappa' \eta_1 - 1)}. \qquad (11.6.4)$$

* Это выражение хорошо аппроксимирует опытные данные о распределении скоростей в промежуточном слое. Впервые такая аппроксимация была сделана Т. Карманом и В. А. Швабом. Ими же были выведены впервые формулы теплоотдачи по «трехслойной» схеме турбулентного потока. Однако в этих формулах не учитывался турбулентный перенос в вязком подслое

Полагая по графику рис. 9.6 $\eta_2 = 30$ и $\eta_1 = 6$, находим, что $\varkappa' = 0,2$. Подставляя значения интегралов из уравнений (11.6.3) и (11.6.4) в выражение (11.6.2), получаем

$$\mathrm{Nu} = \frac{\zeta}{8} \mathrm{Re} f(\mathrm{Pr};\ \mathrm{Re}), \tag{11.6.5}$$

где

$$f(\mathrm{Pr};\ \mathrm{Re}) = \left(\varkappa \sqrt{\frac{8}{\zeta}} \mathrm{Pr}\right) \left[\ln \frac{\mathrm{Re}}{4,5\eta_2} \sqrt{\frac{\zeta}{32}} + \frac{\varkappa}{\varkappa'} \ln \frac{1 + \mathrm{Pr}(\varkappa' \eta_2 - 1)}{1 + \mathrm{Pr}(\varkappa' \eta_1 - 1)} + \right.$$
$$\left. + \varkappa \mathrm{Pr}\, \mathrm{Re} \sqrt{\frac{\zeta}{32}} \int\limits_{\xi_1}^{1} \frac{d\xi}{1 + \mathrm{Pr}\, \mu_T/\mu}\right]^{-1}. \tag{11.6.6}$$

При значениях Pr порядка единицы величина Pr $\mu_T/\mu$ в вязком слое имеет порядок $\mu_T/\mu$, т. е. много меньше единицы. Следовательно, при $\mathrm{Pr} \simeq 1$

$$\int\limits_{\xi_1}^{1} \frac{d\xi}{1 + \mathrm{Pr}\, \mu_T/\mu} \approx 1 - \xi_1 - \frac{\eta_1}{\mathrm{Re}} \sqrt{\frac{32}{\zeta}},$$

и соответственно после подстановки численных значений $\varkappa$, $\varkappa'$, $\eta_1$, $\eta_2$ получаем

$$f(\mathrm{Pr};\ \mathrm{Re}) = \left(0,4\, \mathrm{Pr} \sqrt{\frac{8}{\zeta}}\right) \left[\ln \frac{\mathrm{Re}}{270} \sqrt{\frac{\zeta}{8}} + 2 \ln \frac{1 + 5\,\mathrm{Pr}}{1 + 0,2\,\mathrm{Pr}} + 2,4\, \mathrm{Pr}\right]^{-1}. \tag{11.6.7}$$

Сопоставление формулы (11.6.5) с формулой (11.4.1), выведенной из весьма общих соображений для сред с Pr = 1, приводит к условию

$$f(1;\ \mathrm{Re}) = 1. \tag{11.6.8}$$

Некоторые значения функции $f$ (Pr; Re), вычисленные по формуле (11.6.7) приведены ниже:

| Re | Pr = 1 | Pr = 2 | Pr = 5 | Pr = 10 |
|---|---|---|---|---|
| $10^4$ | 0,990 | 1,33 | 1,78 | 2,1 |
| $10^6$ | 0,995 | 1,63 | 2,30 | 3,1 |

Полученное решение с большой степенью точности удовлетворяет общему условию (11.6.8).

Как видно из этого расчета, интенсивность теплоотдачи в турбулентном потоке возрастает с увеличением числа Pr жидкости, причем степень его влияния несколько повышается в области больших числе Re. Такой характер функции $f$ (Pr; Re) вполне соответствует физической сущности рассматриваемого явления, ибо с увеличением числа Re возрастает роль термического сопротивления турбулентного ядра потока.

При числах $\mathrm{Pr} \gg 1$ перенос тепла за счет турбулентных возмущений, проникающих в вязкий слой из турбулентной области потока, становится соизмеримым с молекулярной теплопроводностью. В этом случае в третьем интеграле уравнения (11.6.2) уже нельзя пренебрегать значением величины Pr $\mu_T/\mu$ по сравнению с единицей. Качественное различие турбулентных пульсаций в вязком слое и в ядре потока заключается в том, что возмущения в вязком слое не могут возникать и развиваться самопроизвольно, а проникают из турбулентного ядра, затухая по мере приближения к твердой стенке. В связи с этим изменение интенсивности турбулентного переноса с расстоянием от стенки в вязком подслое существенно больше, чем в ядре потока. По формуле (9.10.8) коэффициент турбулентной теплопроводности в вязком подслое можно записать в форме ($\mathrm{Pr} \gg 1$)

$$\lambda_T \approx \beta_T \eta^4, \tag{11.6.9}$$

где $\beta$ — множитель пропорциональности. Значение этого коэффициента может быть найдено из данных по теплоотдаче или диффузии при больших числах Pr, когда значение величины $\lambda_T/\lambda$ оказывается порядка единицы и более. Подставляя выражение $\lambda_T$ из (11.6.9) в третий интеграл уравнения (11.6.2), получаем

$$\int_{\xi_1}^{1} \frac{d\xi}{1+\lambda_T/\lambda} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\sqrt{\frac{32}{\zeta}}\int_0^{\eta_1} \frac{d\eta}{1+\mathrm{Pr}\,\beta_T\,\eta^4} =$$

$$= \frac{\alpha}{\mathrm{Re}\sqrt{\zeta}}\left(\ln\frac{\eta_1^2+\alpha\eta_1\sqrt{2}+\alpha^2}{\eta_1^2-\alpha\eta_1\sqrt{2}+\alpha^2} + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha\eta_1\sqrt{2}}{\alpha^2-\eta_1^2}\right),$$

где

$$\alpha = \sqrt[4]{\eta_1^3/(\beta\,\mathrm{Pr})}.$$

Подставив это выражение в уравнение (11.6.6), получим

$$f(\mathrm{Pr};\ \mathrm{Re}) = \left(\varkappa\mathrm{Pr}\sqrt{\frac{8}{\zeta}}\right)\left[\ln\frac{\mathrm{Re}}{4{,}5\eta_2}\sqrt{\frac{\zeta}{32}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varkappa}{\varkappa'}\ln\frac{1+\mathrm{Pr}\,(\varkappa'\,\eta_2-1)}{1+\mathrm{Pr}\,(\varkappa'\,\eta_1-1)} + \varkappa\eta_1\,\mathrm{Pr}\,\varphi(\mathrm{Pr})\right]^{-1} \qquad (11.6.10)$$

или, после подстановки численных значений $\varkappa$, $\varkappa'$, $\eta_1$ и $\eta_2$,

$$\mathrm{Nu} = \frac{0{,}14\sqrt{\xi}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}{\ln\frac{\mathrm{Re}\sqrt{\zeta}}{760} + 2\ln\frac{1+5\mathrm{Pr}}{1+0{,}2\mathrm{Pr}} + 2{,}4\,\mathrm{Pr}\,\varphi(\mathrm{Pr})}. \qquad (11.6.11)$$

Здесь

$$\varphi(\mathrm{Pr}) = \frac{4}{\eta_1\sqrt[4]{1024\beta_T\,\mathrm{Pr}}}\left(\ln\frac{\eta_1^2+\alpha\eta_1\sqrt{2}+\alpha^2}{\eta_1^2-\alpha\eta_1\sqrt{2}+\alpha^2} + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha\eta_1\sqrt{2}}{\alpha^2-\eta_1^2}\right). \qquad (11.6.12)$$

Анализ опытных данных по массообмену в трубах при больших диффузионных числах Pr показывает, что коэффициент $\beta_T \approx 1{,}4\cdot 10^{-4}$. Графически зависимость $\varphi$ (Pr) изображена на рис. 11.8.

При малых и умеренных значениях Pr турбулентная теплопроводность в промежуточном слое сравнительно невелика. Поэтому в этом случае оказывается возможным ограничиться так называемой двухслойной схемой турбулентного потока. По этой схеме поток разбивается на две части — ламинарный подслой и турбулентное ядро. Условная граница между ними находится как точка пересечения прямолинейного профиля скоростей в ламинарном подслое с логарифмическим профилем в турбулентном ядре. Соответствующее значение $\eta_1$ равно 11,6.

Полагая в уравнении (11.6.10) $\eta_2 = \eta_1 = 11{,}6$ и $\varphi$ (Pr) $= 1$, получаем теоретическую формулу для двухслойной схемы потока:

$$\mathrm{Nu} = \frac{0{,}14\sqrt{\zeta}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}{\ln(\mathrm{Re}\sqrt{\zeta}/290) + 4{,}6\,\mathrm{Pr}}. \qquad (11.6.13)$$

Эта упрощенная формула пригодна для газов и неметаллических жидкостей при $\mathrm{Pr} < 5$.

При $\mathrm{Pr} \to \infty$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Nu} \to \frac{\mathrm{Re}}{\eta_1\,\varphi(\mathrm{Pr})}\sqrt{\frac{\zeta}{8}};\\ &\alpha \to 0;\\ &\varphi(\mathrm{Pr}) \to \frac{2\pi}{\eta_1}(1024\beta_T\,\mathrm{Pr})^{-1/4}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.6.14)$$

Таким образом, при больших числах Прандтля, $\beta_T = 1{,}4 \cdot 10^{-4}$ и $\eta_1 = 6$

$$\mathrm{Nu} = 0{,}035\,\mathrm{Pr}^{1/4}\,\mathrm{Re}\sqrt{\zeta}. \tag{11.6.15}$$

На рис. 11.9 дано сопоставление формулы (11.6.11) и предельной формулы (11.6.15) с рядом экспериментальных данных*, систематизированных Сполдингом и Джайятиллаком в координатах $Y$ — Pr, где $Y = \mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}\sqrt{\zeta/8}/\mathrm{Nu}$. Практически формулой (11.6.15) можно пользоваться при значениях $\mathrm{Pr} > 100$ с отклонением от расчета по общей формуле (11.6.11) менее 5%.

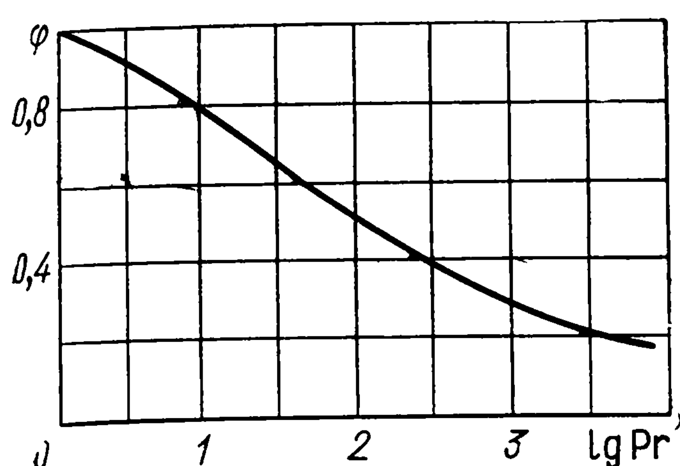



Рис. 11.8. Значения $\varphi(\mathrm{Pr})$ по формуле (11.6.12) при $\beta = 0{,}03$

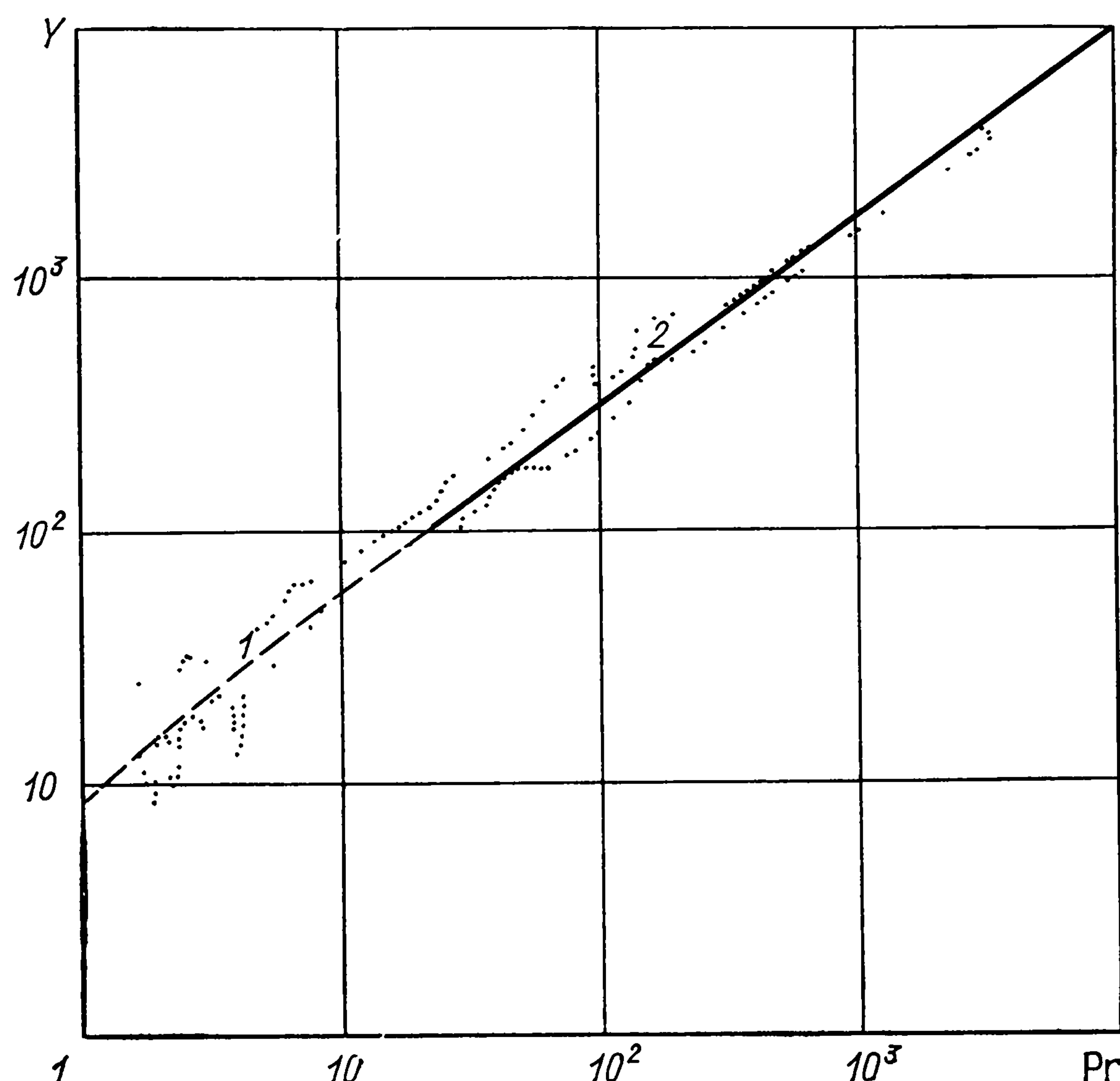



Рис. 11.9. Сопоставление формулы (11.6.11) (*1*) и предельной формулы (11.6.15) (*2*) с экспериментальными данными

По формуле (11.1.14)

$$\ln(\mathrm{Re}\sqrt{\zeta}) = 1{,}13/\sqrt{\zeta} + 1,$$

и формула (11.6.10) может быть представлена в виде

$$\mathrm{Nu} = \frac{\zeta\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}{40\sqrt{\zeta}\,[f(\mathrm{Pr}) - 1] + 8}. \tag{11.6.16}$$

Здесь

$$f(\mathrm{Pr}) = 0{,}356 \ln\frac{1 + 5\,\mathrm{Pr}}{1 + 0{,}2\,\mathrm{Pr}} + 0{,}426\,\mathrm{Pr}\,\varphi(\mathrm{Pr}), \tag{11.6.17}$$

причем численные коэффициенты скорректированы в пределах 1—2% так, чтобы при $\mathrm{Pr} = 1$ и $f(1) = 1$ осуществлялся точный переход к формуле (11.4.1).

Как видно из табл. 11.8, функция $f(\mathrm{Pr})$ в этой формуле при $\mathrm{Pr} < 100$ удовлетворительно аппроксимируется простой степенной зависимостью, введенной ранее из других соображений Рибо.

Введя в выражение (11.6.16) аппроксимацию $f(\mathrm{Pr})$ из табл. 11.8 и значение $\zeta = 0{,}184\mathrm{Re}^{-0{,}2}$, получим достаточно простую и надежную расчетную формулу для области чисел $0{,}5 < \mathrm{Pr} < 200$:

$$\mathrm{Nu} = \frac{0{,}023\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{0{,}8}}{1 + 2{,}14\,\mathrm{Re}^{-0{,}1}(\mathrm{Pr}^{2/3} - 1)}. \tag{11.6.18}$$

* Использованы опытные данные В. И. Барнета и А. Коубак, Е. Бернадо и С. Айанас, Т. Н. Чилтона и А. П. Колберна, А. Ж. Эди, Е. Р. Жиланда и Т. К. Шервуда, М. Д. Грила и Л. Гидеона, М. Л. Джексона и Н. Х. Сиглска, С. Ж. Кауфмана и Ф. Д. Иселси, С. С. Лина, Е. В. Дентона, Х. С. Гэскилла и Ж. Л. Путнема, В. Ж. Морриса и Ф. Х. Уитмена.

Таблица 11.8

**Значения функции $f$ (Pr) в формуле (11.6.16)**

| Pr | 0,7 | 1 | 5 | 10 | 25 | 100 | 200 | 1000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ (Pr) | 0,70 | 1 | 2,83 | 4,47 | 8,28 | 22,4 | 37,1 | 129 |
| $Pr^{2/3}$ | 0,79 | 1 | 2,93 | 4,65 | 8,56 | 21,6 | 34,2 | 100 |

В области $0,5 < Pr < 25$ удовлетворительные результаты дает степенная формула, структура которой была впервые предложена Нуссельтом:

$$Nu = 0,023\, Pr^{0,4}\, Re^{0,8}. \qquad (11.6.19)$$

В табл. 11.9 дано сопоставление расчетов по формуле (11.6.16) и ее частным аппроксимациям. Для практических расчетов теплоотдачи неметаллических жидкостей можно рекомендовать формулу (11.6.18) при числах $Pr < 200$ и формулу (11.6.15) при $Pr > 200$. При расчете теплоотдачи газов и других сред с числами Pr, близкими к 1, можно пользоваться формулой (11.6.19).

Таблица 11.9

**Сопоставления чисел Nu, вычисленных по различным формулам для стабилизированного течения в прямой гладкой трубе в области чисел $Pr \gtrless 1$**

| Формула | Pr = 1 | | Pr = 10 | | Pr = 100 | | Pr = 200 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Re | $10^4$ | $10^6$ | $10^4$ | $10^6$ | $10^4$ | $10^6$ | $10^4$ | $10^6$ |
| (11.6.16)* | 39,5 | 1440 | 96,5 | 5020 | 198 | 11 500 | 238 | 14 100 |
| (11.6.18) | 36,5 | 1450 | 89 | 4890 | 196 | 12 000 | 248 | 15 300 |
| (11.6.19) | 36,5 | 1450 | 91,5 | 3640 | 230 | 9 150 | 304 | 12 000 |

* Значения $\zeta$ взяты из табл. 11.5.

Более детальное представление о температурном поле и поле тепловых потоков можно получить, решая уравнение (11.3.2) путем последовательных приближений.

Замечая, что

$$\left(\frac{q}{\tau}\right)_R \frac{\mu\bar{w}}{\lambda (T_{ст}-T)} = \frac{\alpha\bar{w}\mu q_R/q_{ст}}{\tau_{ст}\lambda\tau_R/\tau_{ст}},$$

можем написать:

$$\vartheta = \int_0^\omega \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} \Big/ \frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right) d\omega = \frac{\alpha\bar{w}\mu}{\tau_{ст}\lambda} \int_0^\omega \frac{1+\mu_T/\mu}{1+\lambda_T/\lambda} \left(\frac{q_R/q_{ст}}{\tau_R/\tau_{ст}}\right) d\omega. \qquad (11.6.20)$$

При этом в соответствии с выражением (11.1.11) $\tau_R/\tau_{ст} = R/R_0$. Имея заданный профиль скорости, вычисляем интеграл (11.6.20) при $\frac{q_R/q_{ст}}{\tau_R/\tau_{ст}} = 1$. Из полученного распределения температур корректируем отношение $q_R/q_{ст}$ путем балансирования количества теплоты, переносимого в осевом и радиальном направлениях. При скорректированном значении этой величины вновь производится интегрирование (11.6.20). Результаты таких расчетов, произведенных Рейхардтом, а также Б. С. Петуховым и В. Н. Поповым, показали, что для сред с числами $Pr > 1$ функция $q_R/q_{ст} = f(\xi)$ мало отличается от линейной.

Рассмотренные в этом разделе формулы применимы для расчетов теплоотдачи при турбулентном течении в трубах газов, воды, масел и других неметаллических жидкостей.

## 11.7. ТЕПЛООТДАЧА К ТУРБУЛЕНТНОМУ ПОТОКУ ПРИ $\Pr \ll 1$

Расплавленные металлы имеют числа Pr порядка $10^{-2}$ и менее. В связи с этим металлические жидкости образуют особый класс теплоносителей, характеризуемый с точки зрения теории теплообмена тем, что у них $a \gg \nu$.

Числами Pr, существенно меньшими единицы, обладает также сильно ионизованный газ. При таких малых числах Pr молекулярная теплопроводность становится соизмеримой с турбулентной теплопроводностью не только в вязком и промежуточных слоях, но и в турбулентном ядре потока. При этих условиях интеграл (11.5.16) необходимо брать с учетом соизмеримости $\lambda$ и $\lambda_T$ по всему сечению турбулентного потока. С другой стороны, в этом случае как в вязком, так и в промежуточных слоях безусловно преобладает молекулярная теплопроводность. Так, например, при $\Pr = 0{,}01$ и $\eta = 30$ ($\xi \approx 1$)

$$\lambda_T/\lambda \approx \Pr \varkappa \eta \xi = 0{,}01 \cdot 0{,}4 \cdot 30 = 0{,}12.$$

Для этих же условий на расчетной границе вязкого подслоя в двухслойной схеме турбулентного потока

$$\lambda_T/\lambda \approx 0{,}01 \cdot 0{,}4 \cdot 11{,}6 = 0{,}046.$$

Таким образом, даже на внешней границе переходного слоя интенсивность турбулентного переноса тепла в металлических жидкостях существенно меньше молекулярной теплопроводности.

Ограничиваясь в связи с этим двухслойной схемой турбулентного потока, запишем уравнение (11.5.16) следующим образом:

$$\mathrm{Nu} \approx 2\left(\int_0^{\xi_1} \frac{\xi^3\, d\xi}{1+P(1-\xi)\,\xi} + \int_{\xi_1}^{1} \xi^3\, d\xi\right)^{-1}, \qquad (11.7.1)$$

где

$$P = \varepsilon \varkappa \,\mathrm{Pe} \sqrt{\zeta/32}. \qquad (11.7.2)$$

В предельном случае, при $\Pr = 0$ и $q = \mathrm{const}$

$$\mathrm{Nu} = 2\left(\int_0^1 \xi^3\, d\xi\right)^{-1} = 8. \qquad (11.7.3)$$

Поскольку $\omega \to 1$ при $\mathrm{Re} \to \infty$, то это решение следует рассматривать как предельное при $\Pr \to 0$ и $\mathrm{Re} \to \infty$.

По более общей формуле (11.5.13) при подстановке в нее закона распределения скоростей по закону степени $n = 1/7$

$$\mathrm{Nu} = \left[2\int_0^1 \frac{1}{\xi}\left(1{,}22\int_0^{\xi} \xi^{8/7}\, d\xi\right)^2 d\xi\right]^{-1} = 6{,}8. \qquad (11.7.4)$$

Расчеты для случая $T_{\text{ст}} = \mathrm{const}$ дают значение числа Nu порядка 5,2—5,5.

Таким образом, в стабилизированном турбулентном потоке при $\Pr \to 0$ число Nu стремится к некоторому постоянному значению. Однако это значение больше того, которое имеет место при ламинарном течении с параболическим распределением скоростей.

Высокая теплопроводность жидкостей, обладающих электронной проводимостью, может привести к тому, что теплосодержание объемов, перемещающихся в результате турбулентных пульсаций, может рассеиваться быстрее, чем количество движения. Соответственно коэффициент $\varepsilon$ будет меньше единицы.

Вычисляя интегралы в выражении (11.7.1) при $\varepsilon = 1$ и принимая во внимание, что $\eta_1\sqrt{32/\zeta} \ll \mathrm{Re}$, находим:

$$\mathrm{Nu} \approx 2P\left[\frac{P+3}{2\sqrt{P^2+4P}}\ln\frac{(\sqrt{P^2+4P}+P+2\varkappa\,\mathrm{Pr})(\sqrt{P^2+4P}+P)}{(\sqrt{P^2+4P}-P+2\varkappa\,\mathrm{Pr})(\sqrt{P^2+4P}-P)} - \right.$$

$$\left. -\frac{P+1}{2P}\ln(1+\varkappa\eta_1\,\mathrm{Pr}) - \frac{3}{2} + \varkappa\eta_1\,\mathrm{Pr}\right]^{-1}. \qquad (11.7.5)$$

При $\mathrm{Pr} \to 0$

$$\mathrm{Nu} \to 2P\left(\frac{P+3}{\sqrt{P^2+4P}}\ln\frac{\sqrt{P^2+4P}+P}{\sqrt{P^2+4P}-P} - \frac{3}{2}\right)^{-1}. \qquad (11.7.6)$$

На рис. 11.10 приведены результаты расчетов по формуле (11.7.5) при числах Pr, характерных для жидкометаллических теплоносителей. Как видно, в координатах Nu—Re обнаруживается чрезвычайно сильное влияние числа

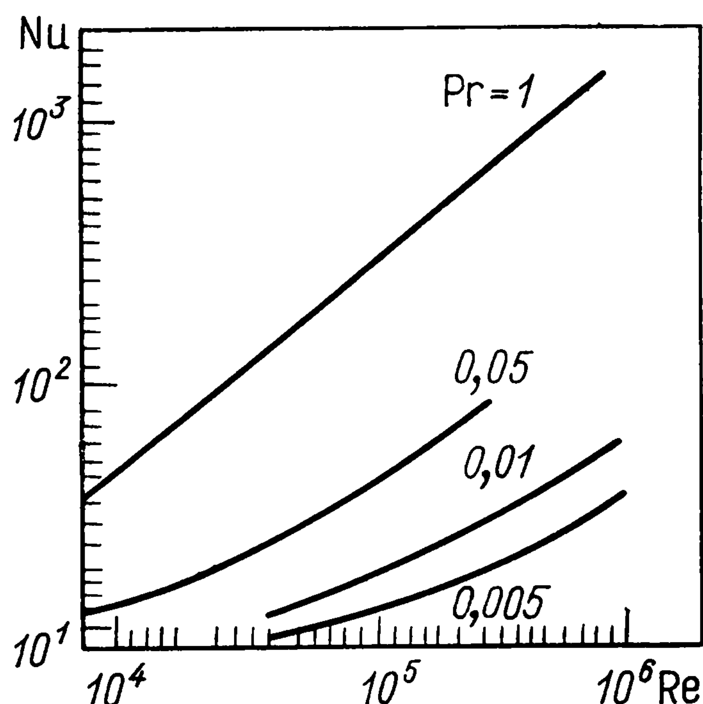



Рис. 11.10. Зависимость Nu от Re и Pr по формуле (11.7.5)

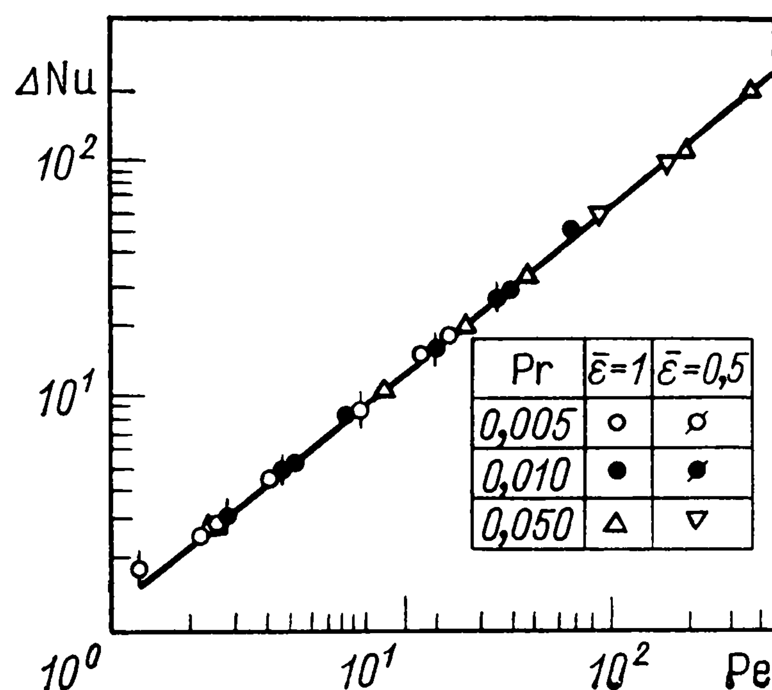



Рис. 11.11. Данные рис. 11.10 в системе координат ΔNu—Pe

Pr. На рис. 11.11 те же данные приведены в системе координат, более соответствующей физическим закономерностям, определяющим теплоотдачу при малых числах Pr. На этом графике величина $\Delta\mathrm{Nu} = \mathrm{Nu} - 8$ характеризует вклад турбулентного переноса в общую интенсивность теплообмена. Отчетливо

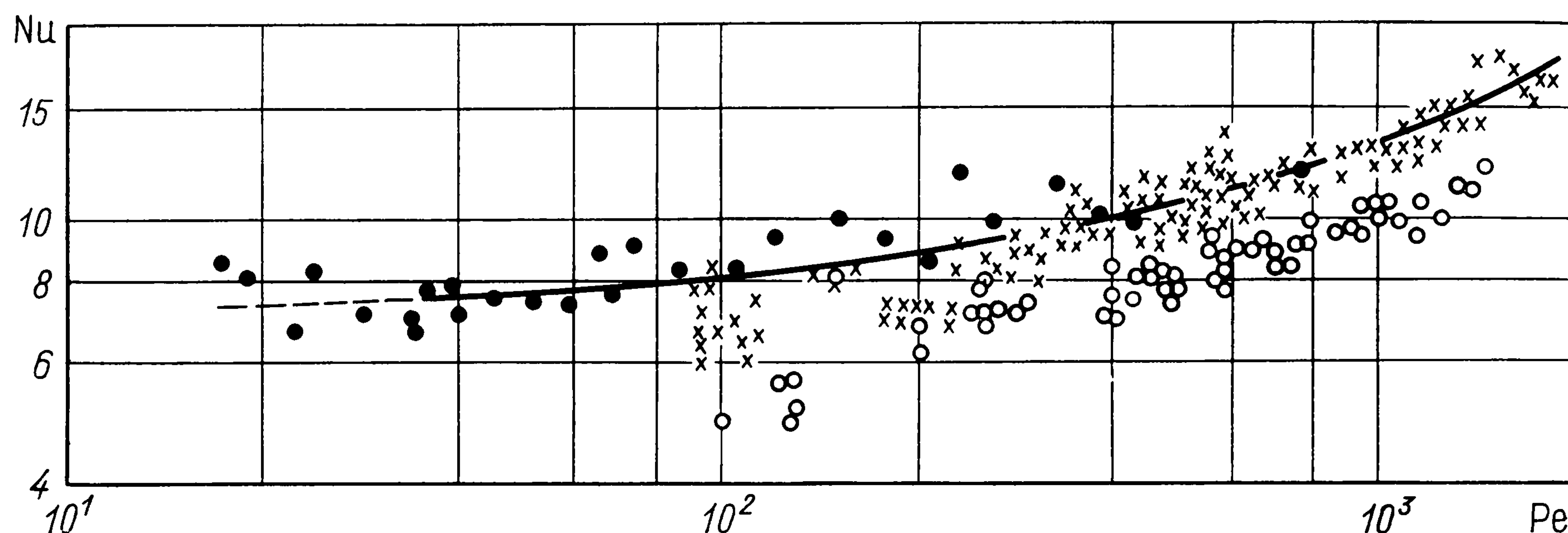



Рис. 11.12. Сопоставление расчетов по формуле (11.7.7) с опытными данными по теплоотдаче хорошо очищенного Na:
×—данные Кириллова, Субботина, Суворова, Троянова; ○—Хабахпашевой; ●—Пирогова

видно, что практически имеет место однозначная зависимость ΔNu от критерия Pe, которая может быть аппроксимирована логарифмической прямой

$$\mathrm{Nu} \approx \mathrm{Nu}_{\text{мин}} + 0{,}044\,\mathrm{Pe}^{0{,}75}. \qquad (11.7.7)$$

При $q = \mathrm{const}$ и $\mathrm{Re} < 10^6$ $\mathrm{Nu}_{\text{мин}} \approx 6{,}8$, а при $T_{\text{ст}} = \mathrm{const}$ $\mathrm{Nu}_{\text{мин}} \approx 5{,}2$.

Первые опыты по теплоотдаче при вынужденном течении жидкого металла были проведены М. А. Стыриковичем, А. Р. Сориным и И. Е. Семеновкером. Высокие температуры, интенсивный теплообмен, окисляемость, высокая теплопроводность, агрессивное воздействие на металл труб и датчиков измерительных приборов создают исключительные трудности при изучении жидкометаллических теплоносителей. Подробное изложение этой проблемы дано в работах автора, М. А. Михеева, В. И. Субботина, В. М. Боришанского и др. Особенно подробно влияние чистоты металла на теплообмен изучено в работах В. И. Субботина и его сотрудников.

На рис. 11.12 приведено сопоставление расчетов по формуле (11.7.7) с рядом экспериментальных данных, полученных при наиболее тщательной очистке металла от окислов и других примесей. На рис. 11.13 дано сопоставление

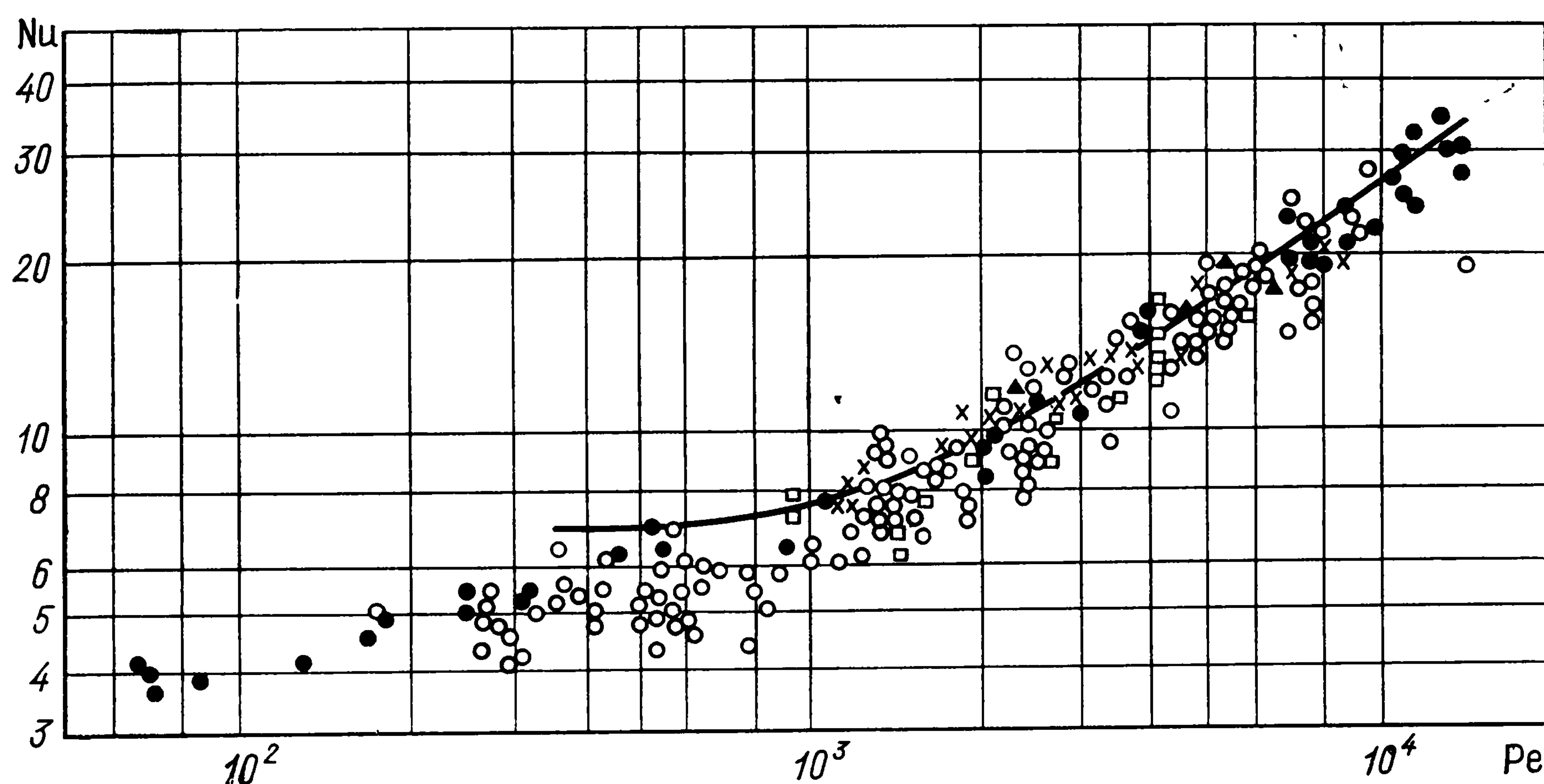



Рис. 11.13. Сопоставление расчетов по схеме с утолщенным подслоем с опытными данными по теплоотдаче свинца, висмута:
● — данные М. А. Михеева, В. А. Баума; ▲ — К. Д. Воскресенского; □ — О. С. Федынского; ○ — В. М. Боришанского, С. С. Кутателадзе, Л. Л. Шнейдермана, Л. И. Иващенко; x — М. Х. Ибрагимова, В. И. Субботина; —— расчетная кривая

расчетов по схеме с утолщенным тепловым подслоем с рядом других экспериментов. Можно констатировать, что имеющиеся в настоящее время достаточно надежные экспериментальные результаты лежат в области, ограниченной указанными предельными расчетами.

Для вычисления теплоотдачи к жидким металлам, не подвергающимся специальной систематической очистке, можно рекомендовать эмпирическую формулу М. А. Михеева, В. А. Баума, К. Д. Воскресенского и О. С. Федынского:

$$\mathrm{Nu} \approx 3{,}4 + 0{,}014\,\mathrm{Pe}^{0{,}8}. \qquad (11.7.8)$$

Эта формула пригодна для стабилизированной теплоотдачи, практически имеющей место у труб с $L > 30D$.

В области $5 < L/D < 30$ по опытам П. С. Кондратьева следует вводить поправочный коэффициент

$$\varepsilon_L = 1{,}7\,(D/L)^{0{,}16}. \qquad (11.7.9)$$

## 11.8. ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ФАКТОР

При рассмотрении в предыдущих разделах задач о конвективном теплообмене в трубе физические свойства принимались постоянными, не меняющимися с температурой, т. е. не учитывалось влияние температурного поля на физические свойства потока, и полученные решения, строго говоря, справедливы только для весьма малых температурных напоров $\Delta T = T_{\text{ст}} - \overline{T}$. В действительности физические свойства жидкости меняются под влиянием температур-

ного поля, устанавливающегося в результате процесса теплообмена между поверхностью нагрева (охлаждения) и потоком. В результате этого отклоняются от изотермического профиля как профиль скоростей, так и профиль температур (говоря об «изотермическом» профиле температур, мы имеем в виду безразмерный профиль при $\Delta T \to 0$). Соответственно меняются и значения коэффициентов теплоотдачи.

Суть задачи сводится к тому, что дифференциальные уравнения теплообмена и движения необходимо записывать в форме, учитывающей переменность входящих в них физических свойств, и присоединять к ним функции, определяющие зависимости этих свойств от температуры. При этом в основных дифференциальных уравнениях процесса «физические константы» попадают также под знак дифференциального оператора. В этой связи уравнения теплопереноса и движения, написанные в предположении постоянства физических свойств, должны быть заменены следующей, более сложной системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = c\rho DT/dt;\\&2\operatorname{div}(\mu\dot{S}) - \operatorname{grad}\left(P + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\mathbf{w}\right) = \rho\frac{D\mathbf{w}}{dt};\\&\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{w}) = 0;\\&\lambda = \lambda(T);\ \mu = \mu(T);\ c = c(T);\ \rho = \rho(T).\end{aligned}\right\} \qquad (11.8.1)$$

Для того чтобы привести к безразмерному виду такую систему уравнений, необходимо ввести масштабы не только линейных размеров, температур и скоростей, но и соответствующих физических свойств. В качестве последних можно принять значения, отнесенные к температуре стенки ($\lambda_{ст}$, $\mu_{ст}$, $c_{ст}$, $\rho_{ст}$) или к средней температуре потока ($\lambda_0$, $\mu_0$, $c_0$, $\rho_0$), или к какой-либо другой масштабной точке. Выбрав в качестве масштабной температуры среднюю температуру потока, получим из системы (11.8.1):

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{div}\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\operatorname{grad}\vartheta\right) = \frac{c\rho}{c_0\rho_0}\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Pe}(\omega, \operatorname{grad}\vartheta)\right];\\&\frac{1}{\mathrm{Re}}\operatorname{div}\left[\frac{\mu}{\mu_0}\dot{S}(\omega)\right] - \operatorname{grad}\left(\mathrm{Eu} - \frac{2}{3\,\mathrm{Re}}\operatorname{div}\omega\right) =\\&= \frac{\rho}{\rho_0}\left[\frac{\partial\omega}{\partial \mathrm{Ho}} + (\omega, \operatorname{grad})\,\omega\right];\\&\partial\frac{\rho}{\rho_0}\Big/\partial \mathrm{Ho} + \operatorname{div}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\omega\right) = 0;\\&\lambda/\lambda_0 = f_1(\vartheta);\ \mu/\mu_0 = f_2(\vartheta);\ c/c_0 = f_3(\vartheta);\ \rho/\rho_0 = f_4(\vartheta).\end{aligned}\right\} \qquad (11.8.2)$$

Здесь физические свойства в критериях отнесены к средней по теплосодержанию температуре потока, т. е.

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Nu} = \alpha l_0/\lambda_0;\ \mathrm{Pr} = \nu_0/a_0;\ \mathrm{Re} = w_0 l_0/\nu_0;\\&\mathrm{Eu} = \Delta P/(\rho_0 w_0^2);\ \mathrm{Fo} = a_0 t/l_0^2;\ \mathrm{Ho} = w_0 t/l_0.\end{aligned}\right\} \qquad (11.8.3)$$

У капельных жидкостей температурные функции физических свойств имеют разнообразный характер, и нет практической возможности учесть их влияние строго единообразным способом. Иначе дело обстоит с газами, относительное изменение физических свойств которых достаточно однозначно следует за относительным изменением абсолютных температур.

Плотность газов практически меняется обратно пропорционально температуре, т. е. в каждом поперечном сечении потока

$$\rho/\rho_0 = T_0/T. \qquad (11.8.4)$$

Вязкость газов хорошо подчиняется формуле Сезерленда

$$\frac{\mu}{\mu_0}=\frac{1+C/T_0}{1+C/T}\sqrt{\frac{T}{T_0}}. \qquad (11.8.5)$$

где $C$ — постоянная, характеризующая свойства данного газа.

В силу условия $Pr = \text{const}$ и относительно слабой зависимости удельной теплоемкости от температуры $\lambda/\lambda_0 \approx \mu/\mu_0$.

В свою очередь,

$$T/T_0 = \psi-(\psi-1)\vartheta, \qquad (11.8.6)$$

где $\psi = T_{ст}/T_0$ — так называемый температурный фактор.

Отсюда следует, что для сильно неизотермического потока газа*

$$Nu = \Phi\,(Pr;\ Re;\ X;\ \psi;\ \psi_c), \qquad (11.8.7)$$

где $\psi_c = T_0/C$ — второй температурный фактор.

В первом приближении

$$Nu \approx \Phi_1\,(Pr;\ Re;\ X;\ \psi). \qquad (11.8.8)$$

Когда интервал температур $T_{ст} - T_0$ таков, что температурные функции физических свойств можно достаточно точно аппроксимировать линейной зависимостью, то

$$\lambda/\lambda_0 \approx \lambda_{ст}/\lambda_0-(\lambda_{ст}/\lambda_0-1)\,\vartheta. \qquad (11.8.9)$$

Здесь под $\lambda$ следует понимать любое из существенных для процесса физических свойств. Как видно, в этом случае переменность физических свойств с температурой для любых сред может быть учтена введением под знак функции в выражении (11.4.5) отношений

$$\{\lambda_{ст}/\lambda_0;\ \mu_{ст}/\mu_0;\ c_{ст}/c_0;\ \rho_{ст}/\rho_0\}, \qquad (11.8.10)$$

т. е. можно написать

$$Nu \approx \Phi\,(Pr;\ Re;\ \lambda_{ст}/\lambda_0;\ \mu_{ст}/\mu_0;\ \rho_{ст}/\rho_0;\ c_{ст}/c_0;\ X). \qquad (11.8.11)$$

Этот результат справедлив и при экспоненциальной зависимости физических свойств среды от температуры, которая для ряда свойств жидких сред значительно универсальнее линейной.

Действительно, если в определенном интервале температур

$$\mu=\mu_0\exp\,[n\,(T-T_0)], \qquad (11.8.12)$$

то

$$\mu/\mu_0=(\mu_{ст}/\mu_0)^{\vartheta} \qquad (11.8.13)$$

и в выражении (11.8.11) новые параметры не появляются.

Отсюда видно, что в принципе невозможно учесть влияние на теплоотдачу переменности «физических констант» с температурой путем введения только одного комплексного фактора $Pr_{ст}/Pr_0$, как это часто делается при эмпирическом представлении опытных данных.

У многих капельных жидкостей значения $c$, $\rho$ и $\lambda$ меняются с температурой относительно меньше, чем вязкость $\mu$ (табл. 11.10). Для таких сред с удовлетворительным приближением можно ограничиться зависимостью

$$Nu \approx \Phi\,(Pr;\ Re;\ \psi_\mu;\ X), \qquad (11.8.14)$$

где

$$\psi_\mu=\mu_{ст}/\mu_0.$$

---

* Аналогичная зависимость должна иметь место и для коэффициента аэродинамического сопротивления.

Таблица 11.10

**Относительное изменение физических свойств некоторых жидкостей в интервале температур 10—100 °С**

| Жидкость | $\rho_{10}/\rho_{100}$ | $c_{10}/c_{100}$ | $\lambda_{10}/\lambda_{100}$ | $\mu_{10}/\mu_{100}$ | Жидкость | $\rho_{10}/\rho_{100}$ | $c_{10}/c_{100}$ | $\lambda_{10}/\lambda_{100}$ | $\mu_{10}/\mu_{100}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Вода | 1,04 | 1,0 | 0,84 | 4,6 | Бензол | 1,12 | 0,90 | 1,12 | 2,9 |
| Трансформаторное масло | 1,09 | 0,88 | 1,10 | 15,3 | Глицерин | 1,11 | 1,3 | 0,96 | 300 |
| Масло МК | 1,08 | 0,80 | 1,17 | 175 | Дифенил | 1,07 | 0,83 | 1,11 | 4,9 |

Еще раз подчеркнем, что этот результат справедлив и при экспоненциальной зависимости вязкости от температуры, являющейся более универсальной для жидкостей, чем линейная.

## 11.9. ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ФАКТОРА НА ТРЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ ГАЗА

При заметном изменении физических свойств под действием температуры динамическая задача (задача об определении потерь давления и сил трения в потоке) не может быть отделена от тепловой задачи, что непосредственно следует из системы уравнений (11.8.1).

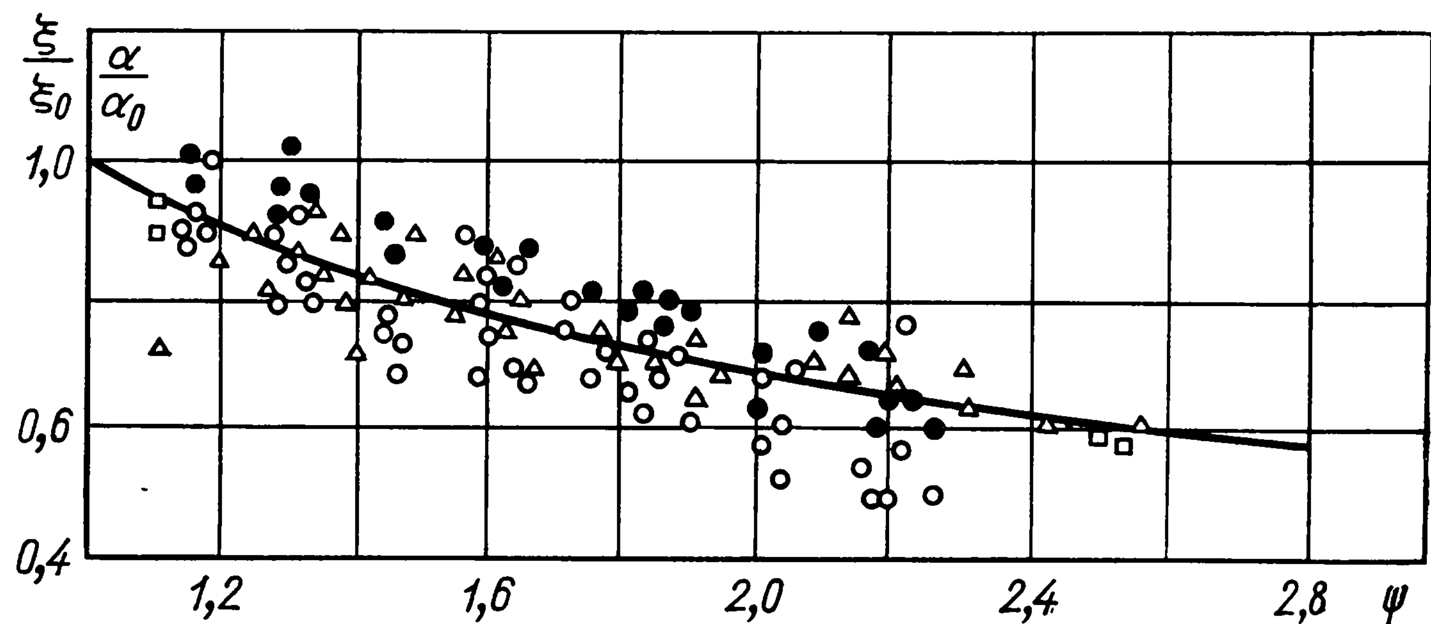



Рис. 11.14. Сопоставление расчета по формуле (10.9.6) с экспериментальными данными:

● — данные Л. Н. Ильина; □ — NACA; △ — Л. И. Иващенко; ○ — Л. Н. Ильина

Соответственно необходимо изменить и расчетное уравнение для потерь давления при течении жидкости в трубе. Вместо формулы (11.1.7) для неизотермического течения пишут обобщенное уравнение Бернулли

$$-\frac{dp}{dx}=\overline{\rho w}\,\frac{d\overline{w}}{dx}+\frac{\zeta}{2D}\,\overline{\rho w}\,\overline{w}. \qquad (11.9.1)$$

Здесь осреднение произведено по сечению трубы. Формулы (10.9.5) и (10.9.6) применимы и в данном случае. При этом в них следует подставлять значение $c_{f_0}=\zeta_0/4$. Практически в области $1<\psi<4$ можно пользоваться формулой (10.9.3).

При $T_{ст}=\text{const}$ или $q_{ст}=\text{const}$ возможно прямое сопоставление этих формул с экспериментальными данными (рис. 11.14). Однако при произвольном задании теплового потока ситуация существенно усложняется и непосредственно использование зависимостей типа (11.8.14) не приводит к достаточно общим результатам.

Рассмотрим течение газа в круглой трубе на таком удалении от входа, где возникшие при входе пограничные слои слились на оси трубы. Отождествляя радиус трубы с толщиной пограничного слоя при внешнем обтекании, принимаем обычный степенной закон теплообмена

$$\mathrm{St} = \frac{q_{\text{ст}}}{c_p\,\rho_0\,w_0\,T_0\,(\psi - 1)} = \frac{A}{\mathrm{Re}^{**m}\,\mathrm{Pr}^n}\,\Psi_S, \tag{11.9.2}$$

где $\Psi_S \approx (\mathrm{St}/\mathrm{St}_0)_{\mathrm{Re}_T^{**}} = \psi^{-0,5}$ — относительный закон теплообмена. Из уравнения неразрывности следует, что

$$\rho_{0_1}\,w_{0_1} = 2\rho_0\,w_0\,f_1(\psi), \tag{11.9.3}$$

где

$$f_1(\psi) = \int\limits_0^1 \frac{\rho w}{\rho_0 w_0}\left(1 - \frac{y}{R_0}\right) d\left(\frac{y}{R_0}\right). \tag{11.9.4}$$

Здесь индексом 0 обозначены параметры по оси трубы, а индексом 1 — параметры на входе. Нетрудно показать, что при $\mu_0/\mu_{01} = (T_0/T_{01})^{n_1}$

$$\mathrm{Re}_T^{**} = \frac{\mathrm{Re}_{D_1}\,f_2(\psi)}{4\,(T_0/T_{01})^{n_1}\,f_1(\psi)}, \tag{11.9.5}$$

где

$$f_2(\psi) = \int\limits_0^1 \frac{\rho w}{\rho_0 w_0}\left(1 - \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}}\right)\left(1 - \frac{y}{R_0}\right) d\left(\frac{y}{R_0}\right). \tag{11.9.6}$$

С учетом этих зависимостей из выражения (11.9.2) следует:

$$\frac{\psi^{0,5}}{\psi - 1} = \frac{A\cdot 4^m\,\mathrm{Pr}_{01}^{1-n}\,\mathrm{Re}_{D_1}^{1-m}}{2f_1^{1-m}\,f_2^m\,\mathrm{Nu}_1}\left(\frac{T_0}{T_{01}}\right)^{1+n_1 m}. \tag{11.9.7}$$

Из уравнения баланса тепла следует:

$$\frac{T_0}{T_{01}} = \frac{f_1}{f_3}\left(1 + \frac{4\int\limits_0^x q_{\text{ст}}\,dx}{\mathrm{Re}_{D_1}\,\mathrm{Pr}_{01}\,\lambda_{01}\,T_{01}}\right), \tag{11.9.8}$$

где

$$f_3(\psi) = \int\limits_0^1 \frac{w}{w_0}\left(1 - \frac{y}{R_0}\right) d\left(\frac{y}{R_0}\right). \tag{11.9.9}$$

Подставив в уравнение (11.9.7) это соотношение, получим

$$\frac{\psi^{0,5}}{\psi - 1} = \frac{A\cdot 4^m\,\mathrm{Pr}_{01}^{1-n}\,\mathrm{Re}_{D_1}^{1-m}\,f_1^{m(1+n_1)}}{2f_2^m\,f_3^{1+n_1 m}\,\mathrm{Nu}_1}\left(1 + \frac{4\int\limits_0^x q_{\text{ст}}\,dx}{\mathrm{Re}_{D_1}\,\mathrm{Pr}_{01}\,\lambda_{01}\,T_{01}}\right)^{1+n_1 m}. \tag{11.9.10}$$

Функции $f_1$, $f_2$ и $f_3$ в общем случае зависят от неизотермичности потока. Допустим, что неизотермичность не оказывает заметного влияния на степенное распределение скоростей и температур по сечению канала. Как показано в работах Б. С. Петухова, В. Н. Попова и Дейслера, это допущение можно считать вполне приемлемым. Полагая в области стабилизированного течения

$$w/w_0 = (T - T_{\text{ст}})/(T_0 - T_{\text{ст}}) = (y/R_0)^{1/7} \tag{11.9.11}$$

и учитывая, что для газов имеет место соотношение (11.8.4), получаем:

$$f_1 = 0{,}408\psi^{-0{,}163};\quad f_2 = 0{,}068\psi^{-0{,}318};\quad f_3 = 0{,}408. \tag{11.9.12}$$

Тогда при $m = 0{,}2$ и $n_1 = 0{,}75$

$$(f_1^{1+n_1}/f_2)^m \sim \psi^{0{,}0086}, \qquad (11.9.13)$$

т. е. практически этот параметр не зависит от температурного фактора. Разрешая уравнение (11.9.10) относительно $\psi$, получаем

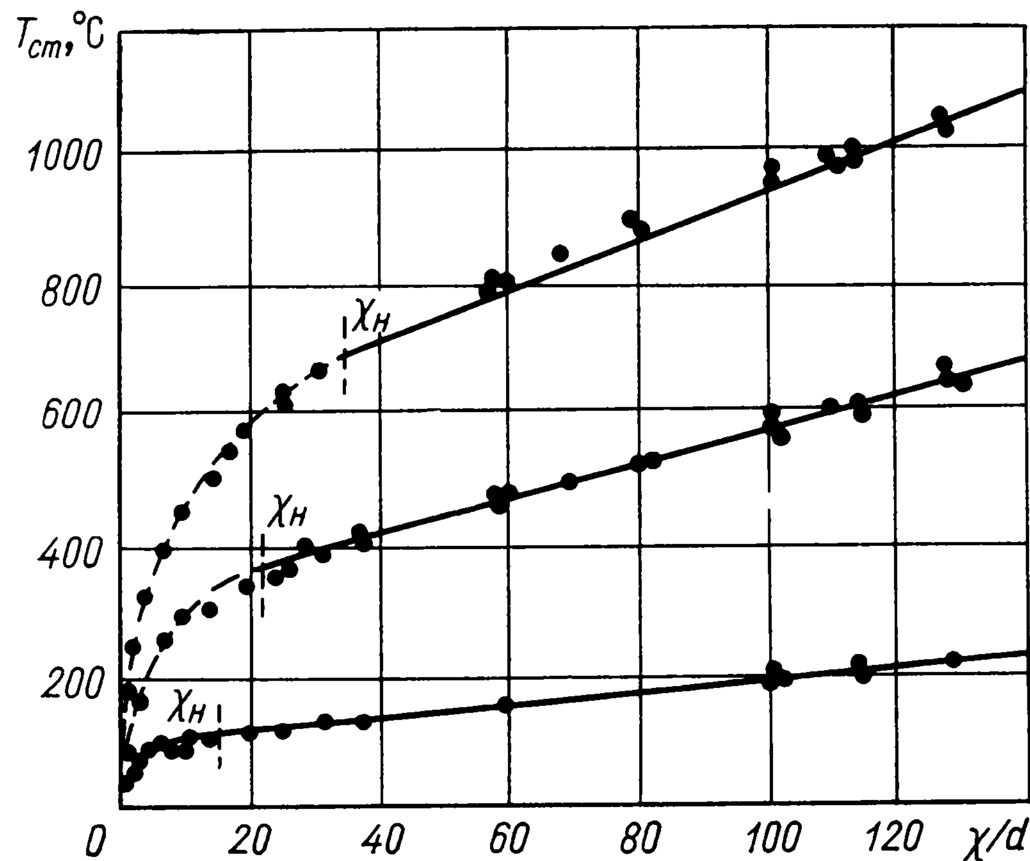



Рис. 11.15. Сопоставление результатов расчета температуры стенки (——— по формуле (11.9.17); — — — — по методике С. С. Кутателадзе и А. И. Леонтьева) с опытами В. И. Лельчука и Б. В. Дядякина (....); $\chi_н$ — длина начального участка для $\mathrm{Re}_T = 10^4$

$$\psi = 1 + \frac{1}{2J^2}\left(1 + \sqrt{1 + 4J^2}\right), \qquad (11.9.14)$$

где

$$J = \frac{4^m}{2} A \,\mathrm{Pr}_{01}^{1-n} \mathrm{Re}_{D_1}^{1-m} \times \left[\left(\frac{f_1}{f_3}\right)^{1+n_1}\frac{1}{f_2}\right]^m \times \left[1 + \frac{4\int\limits_0^x q_{\text{ст}}\,dx}{\mathrm{Re}_{D_1}\mathrm{Pr}_{01}\lambda_{01}T_{01}}\right]^{1+n_1 m} \mathrm{Nu}_1^{-1}. \qquad (11.9.15)$$

С учетом уравнения (11.9.8) можно записать:

$$\frac{T_{\text{ст}}}{T_{01}} = \frac{f_1}{f_3}\left[1 + \frac{1}{2J^2}\left(1 + \sqrt{1+4J^2}\right)\right]\left(1 + \frac{4\int\limits_0^x q_{\text{ст}}\,dx}{\mathrm{Re}_{D_1}\mathrm{Pr}_{01}\lambda_{01}T_{01}}\right). \qquad (11.9.16)$$

Эта формула выведена автором совместно с А. И. Леонтьевым и А. К. Пименовым. По данным П. Н. Романенко и Н. В. Крыловой, в области стабилизированного течения $A = 0{,}0069$ и $m = 0{,}2$. Принимая $n_1 \approx n = 0{,}75$, получаем

$$T_{\text{ст}} = T_{01}\left\{1 + \frac{1970 q_{\text{ст}}^2 D_0^2}{\mathrm{Pr}_{01}^{0,5}\mathrm{Re}_{D_1}^{1,6}\lambda_{01}^2 T_{01}^2\left(1 + \frac{4\int\limits_0^x q_{\text{ст}}\,dx}{\mathrm{Pr}_{01}\mathrm{Re}_{D_1}\lambda_{01}T_{01}}\right)^{2,3}} \times \right.$$

$$\left.\times\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\mathrm{Pr}_{01}^{0,5}}{985}\frac{\mathrm{Re}_{D_1}^{1,6}\lambda_{01}^2T_{01}^2}{q_{\text{ст}}^2D_0^2}\left(1 + \frac{4\int\limits_0^x q_{\text{ст}}\,dx}{\mathrm{Re}_{D_1}\mathrm{Pr}_{01}\lambda_{01}T_{01}}\right)^{2,3}}\right]\right\}^{0,84} \times$$

$$\times\left(1 + \frac{4\int\limits_0^x q_{\text{ст}}\,dx}{\mathrm{Re}_{D_1}\mathrm{Pr}_{01}\lambda_{01}T_{01}}\right). \qquad (11.9.17)$$

Как видно из рис. 11.15, теоретический расчет по формуле (11.9.17) находится в удовлетворительном соответствии с опытом на участке стабилизированного течения. Штрихами представлены результаты расчета начального участка по методике автора и А. И. Леонтьева. Пересечение расчетных кривых определяет длину участка стабилизации.

Из работы П. Н. Романенко и Н. В. Крыловой следует, что значение критерия $\mathrm{Re}_T^{**}$, при котором уже не сказывается влияние условий на входе, при-

мерно равно $10^4$. На рис. 11.15 показаны длины начальных участков, подсчитанные на основании этого значения критерия $\mathrm{Re}_T^{**}$. Как видно, результаты такого расчета находятся в хорошем соответствии с указанной выше методикой определения длины начального участка.

## 11.10. ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА НА ТЕПЛООТДАЧУ ПРИ ТЕЧЕНИИ КАПЕЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Как указывалось выше, для большинства капельных жидкостей характерны существенное влияние температуры на коэффициент вязкости и относительное постоянство других физических характеристик. В связи с этим могут быть применены зависимости типа (10.8.14), в которых в качестве температурного фактора выступает величина

$$\psi_\mu = \mu_{\text{ст}}/\mu_0. \qquad (11.10.1)$$

Только в области околокритических (в термодинамическом смысле) температур начинают существенно меняться все физические свойства жидкости. Теплоотдача металлических жидкостей весьма мало зависит от вязкости, а их коэффициент теплопроводности зависит от температуры не очень сильно. В связи с этим для жидкометаллических теплоносителей поправку на температурный фактор практически можно не вводить, относя все входящие в расчетные формулы физические характеристики жидкости к средней температуре потока.

Отнесение физических свойств жидкости к средней температуре потока приводит обычно к существенному уменьшению влияния температурного фактора и является общепринятым. Для ламинарного течения неметаллических жидкостей Зидер и Тэйт нашли, что

$$\alpha/\alpha_0 \approx (\mu_0/\mu_{\text{ст}})^{0,14}, \qquad (11.10.2)$$

где $\alpha_0$ рассчитано при отнесении физических свойств среды к $T_0$. Этот результат подтверждается и обширными экспериментальными исследованиями Б. С. Петухова.

Как уже указывалось выше, вязкость жидкости в широком интервале температур можно представить экспоненциальной функцией вида

$$\mu = \mu_{\text{ст}} \exp\left[-n\left(T - T_{\text{ст}}\right)\right] \qquad (11.10.3)$$

или, после перехода к безразмерной температуре,

$$\mu/\mu_0 = \psi_\mu^{1-\vartheta}. \qquad (11.10.4)$$

Рассмотрим стабилизированное, стационарное, турбулентное течение в гладкой трубе по трехслойной схеме. Изменение вязкости будем учитывать лишь в вязком подслое (поскольку числа $\mathrm{Pr} > 1$), полагая в нем изменение температуры линейным. Для вязкого подслоя, где в данном случае $\tau \approx \tau_{\text{ст}}$, применим критерий устойчивости $(v^* y/\nu)_1 = \mathrm{const}$. Последний справедлив по крайней мере в областях $\psi_\mu$, близких к единице. Принимая для трехслойной схемы потока $v^* y/\nu|_1 = 6$, $v^* y/\nu|_2 = 30$, решая методом последовательных приближений уравнение распределения температуры (11.5.11) при этом критерии устойчивости и учитывая (11.5.16), определим границы вязкого и промежуточного слоев $y_1$ и $y_2$ и значения безразмерных температур на этих границах $\vartheta_1$ и $\vartheta_2$. Влияние теплового потока на теплоотдачу определится соотношением

$$\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Nu}_0} = \sqrt{\frac{\zeta}{\zeta_0}}\,\frac{\ln \mathrm{Re}\dfrac{\sqrt{\zeta}}{760} + \dfrac{\varkappa}{\varkappa'}\ln\dfrac{1+5\mathrm{Pr}}{1+0{,}2\mathrm{Pr}} + 6\varkappa\,\mathrm{Pr}\,\varphi(\mathrm{Pr})}{\ln\dfrac{\mathrm{Re}}{4{,}5\eta_2}\sqrt{\dfrac{\zeta}{32}} + \dfrac{\varkappa}{\varkappa'}\ln\dfrac{1+\mathrm{Pr}\left(\varkappa'\eta_2 - \mu_{\text{пр}}/\mu_0\right)}{1+\mathrm{Pr}\left(\varkappa'\eta_1 - \mu_{\text{пр}}/\mu_0\right)} + \varkappa\eta_1\,\mathrm{Pr}\,\varphi(\mathrm{Pr})}, \qquad (11.10.5)$$

где $\zeta = 8\,(v^*/\overline{w})^2$ — коэффициент гидравлического сопротивления в неизотермических условиях. Распределение скоростей в вязком подслое с учетом изменения вязкости по соотношению (11.10.3)

$$\frac{w}{v^*} = 6\,\frac{\psi_\mu^{-\vartheta}}{\vartheta_1 \ln \psi_\mu}\left(\psi_\mu^{\vartheta y_1/y} - 1\right). \qquad (11.10.6)$$

Безразмерная скорость на границе вязкого подслоя увеличивается при подводе тепла к жидкости ($\psi_\eta < 1$) и уменьшается при охлаждении ее ($\psi_\mu > 1$). Поскольку законы распределения скоростей в промежуточном слое и турбулент-

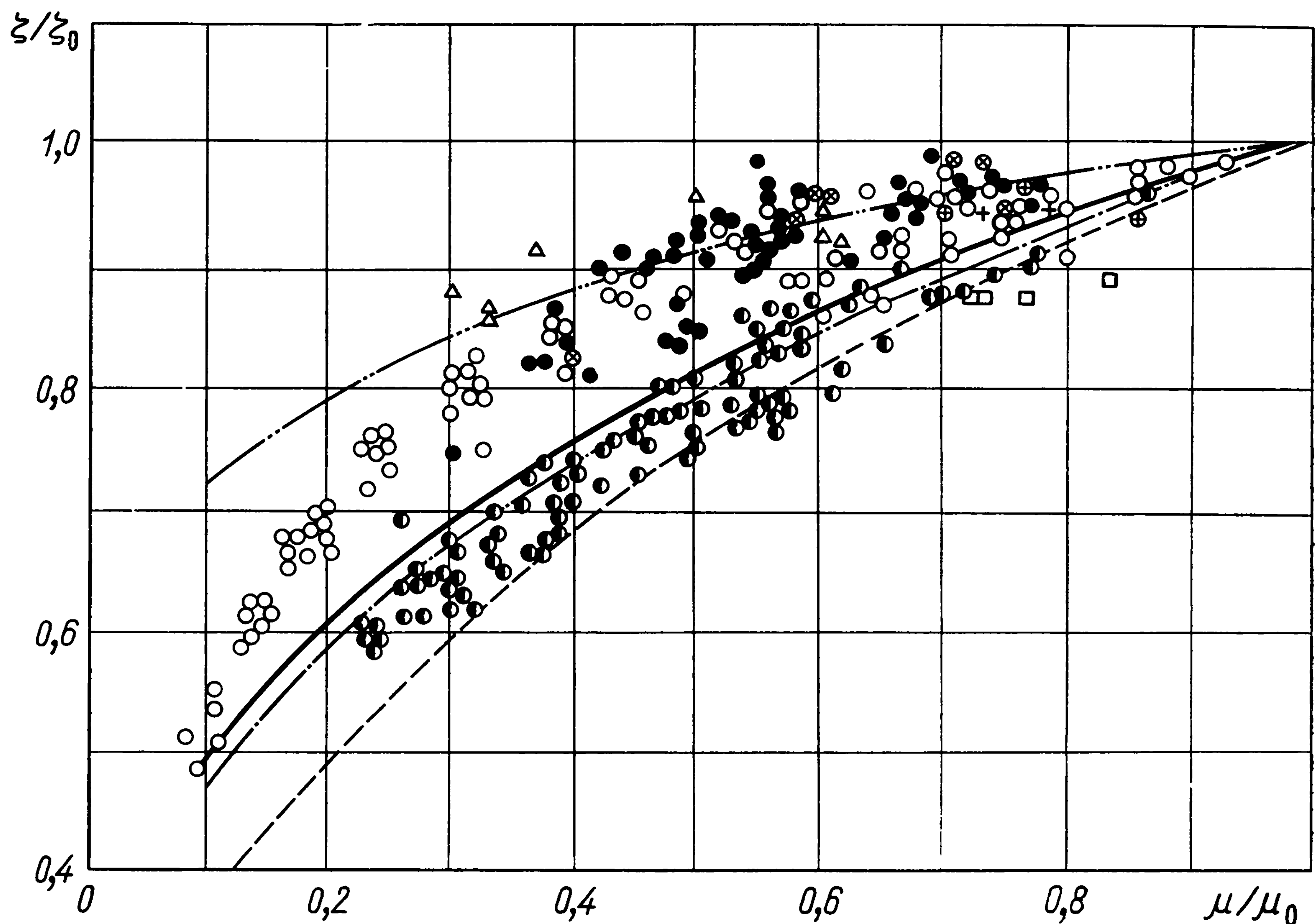



Рис. 11.16. Сравнение экспериментальных данных по коэффициентам гидравлического сопротивления (точки) с расчетом при нагреве теплоносителя (кривые):
● — Re ≈ (2,5 – 6,0) · $10^4$, Pr = 3,4 ÷ 11,0 (вода, местные значения; данные Б. С. Петухова); ⦶ — Re ≈ (0,5 – 1,2) · $10^4$, Pr ≈ 87 (трансформаторное масло, данные Б. С. Петухова); ◐ — Re = (2,6 – 10,2) · $10^4$ (вода; данные В. В. Яковлева); □ — Re = (0,4 – 2,7) $10^4$, Pr = 6,0 – 6,5 (вода; данные М. А. Михеева, С. С. Филимонова, Б. А. Хрусталева), + — Re = (7,9 – 16,3) · $10^4$ (вода; данные О. Г. Новичковой); Δ — Re = (1 – 2) · $10^5$, Pr = 3,5 (вода, данные Ф. Крайта и М. Зоммерфилда); ○ — Re = (14,0 – 7,8) · $10^4$, Pr = 23 – 30 (*n*-бутиловый спирт; данные Ф. Крайта и М. Зоммерфилда); ⊗ — Re = (1,3 – 11) · $10^4$, Pr = 7 – 8 (вода, данные Р. В. Аллена и Е. Р. Эккерта); —— расчет при Re = $10^5$ и Pr = 5; – – – – при Re = $10^4$ и Pr = 5; — · — — $\zeta/\zeta_0 = (\mu/\mu_0)^{1/3}$; — ·· — — $\zeta/\zeta_0 = (\mu/\mu_0)^{0,14}$

ном ядре потока можно считать неизменными, то при подводе тепла к жидкости коэффициент гидравлического сопротивления будет уменьшаться, а при охлаждении жидкости — увеличиваться.

Результаты расчетов по описанной схеме при Re = $10^5$, Pr = 5 и $\mu_{пр} = \mu_1$, а также экспериментальные данные ряда авторов приведены на рис. 11.16 и 11.17. Линия *9* на рис. 11.17 соответствует эмпирической формуле Б. С. Петухова

$$\alpha/\alpha_0 = \psi_\mu^{-0,11}. \qquad (11.10.7)$$

Для расчета коэффициента гидравлического сопротивления при $1 < \mathrm{Pr} < 10$ можно воспользоваться формулой

$$\zeta/\zeta_0 = \psi_\mu^{0,33}, \qquad (11.10.8)$$

предложенной М. А. Михеевым (см. рис. 11.16). С ростом числа Прандтля величина $\zeta/\zeta_0$ при нагреве жидкости будет увеличиваться.

По данным Б. С. Петухова, при $1 < \psi_\mu < 40$

$$\left.\begin{aligned} \alpha/\alpha_0 &\approx \psi_\mu^{-0,25}; \\ \zeta/\zeta_0 &\approx \psi_\mu^{0,28\,\mathrm{Pr}^{-0,25}}. \end{aligned}\right\} \tag{11.10.9}$$

В области околокритических состояний жидкости происходит сильное изменение всех физических свойств. При этом имеет место ярко выраженный максимум в зависимости теплоемкости (и соответственно числа Pr) от температуры (фазовый переход второго рода).

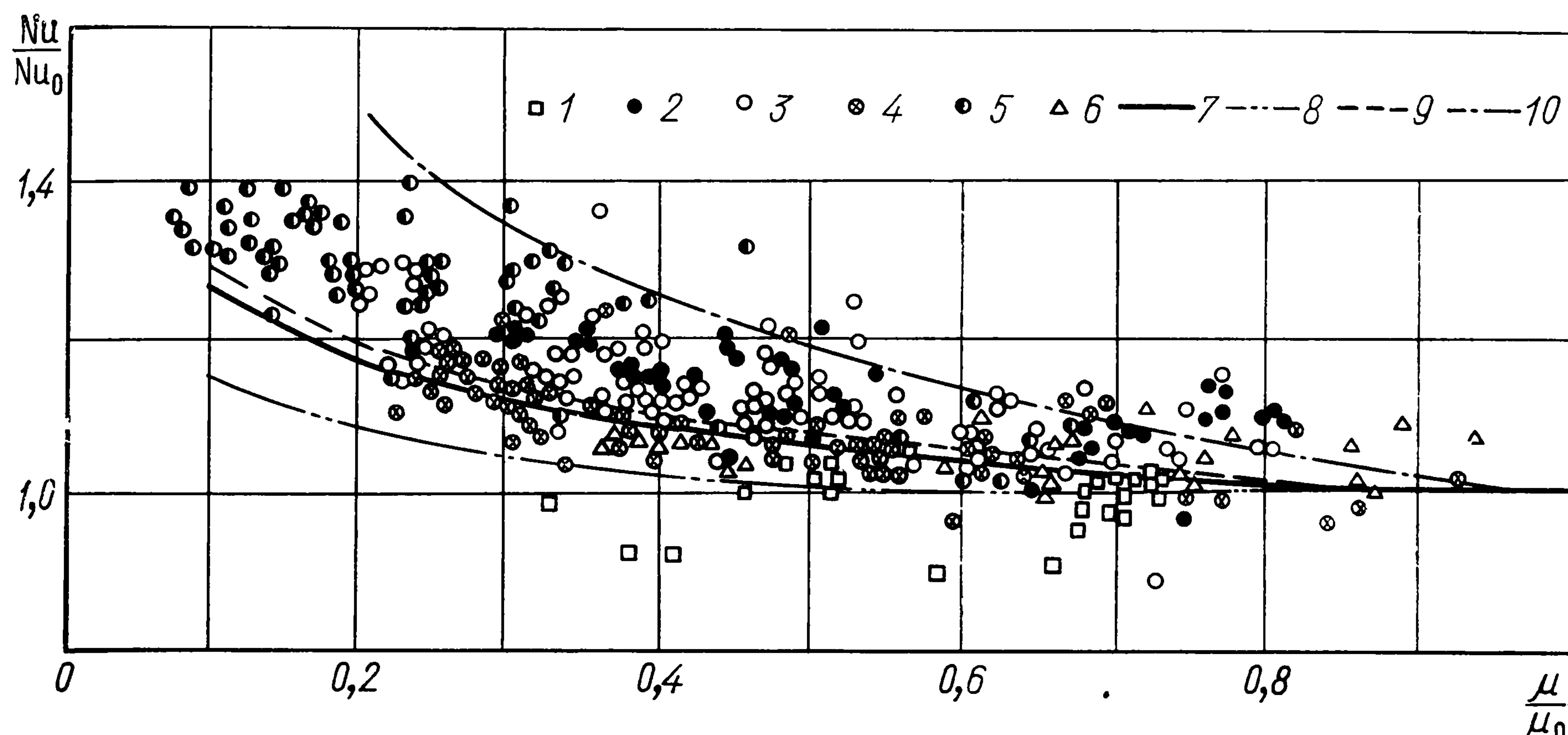



Рис. 11.17. Сравнение экспериментальных данных по теплообмену (точки) с расчетом при нагреве теплоносителя (кривые):

□—Re = $(1 \div 60)\cdot 10^4$, Pr = $3 \div 12$ (вода; данные Б. С. Петухова); ●—Re = $(2,6 \div 10,2)\cdot 10^4$, Pr = $2 \div 12$, $l/d = 60$ (вода; данные В. В. Яковлева); ○ — Re = $(2,6 \div 10,2)\cdot 10^4$, Pr = $2 \div 12$, $l/d = 30$ (вода; данные В. В. Яковлева); ⊕—средние значения Nu, Re = $(2 \div 10)\cdot 10^4$, Pr = $3 \div 11$ (вода; данные В. В. Яковлева). ◐—Re = $(4 - 7)\cdot 10^4$, Pr = 30 ($n$-бутиловый спирт; данные Ф. Крайта и М. Зоммерфилда); Δ—Re = $(1,3 - 11)\cdot 10^4$, Pr = $7 \div 8$ (вода; данные Р. В. Аллена и Е. Р. Эккерта); —— —расчет при Re = $10^5$, Pr = 5; ——·—— —при Re = $10^4$, Pr = 5; — — — — $Nu/Nu_0 = (\mu/\mu_0)^{-0,11}$; —— · —— — $Nu/Nu_0 = (\mu/\mu_0)^{-0,25}$

Если температурный напор стенка—поток весьма мал, то, как показали опыты В. Е. Дорощука, В. Л. Лельчука и В. В. Медникова, а также А. А. Арманда, Н. В. Тарасовой и А. С. Конькова, формула (11.6.20) дает вполне удовлетворительные результаты и в околокритической области. Однако при значительных тепловых потоках возникают существенные отклонения, не снимаемые поправками типа (11.10.7) или (11.10.9).

На рис. 11.18 приведена экспериментальная зависимость коэффициента теплоотдачи от температуры потока при турбулентном течении воды в трубе. Как видно, в области околокритических температур имеют место ярко выраженные максимумы, соответствующие «пикам» теплоемкости. В общем случае для области околокритических параметров следует различать три основных случая теплообмена.

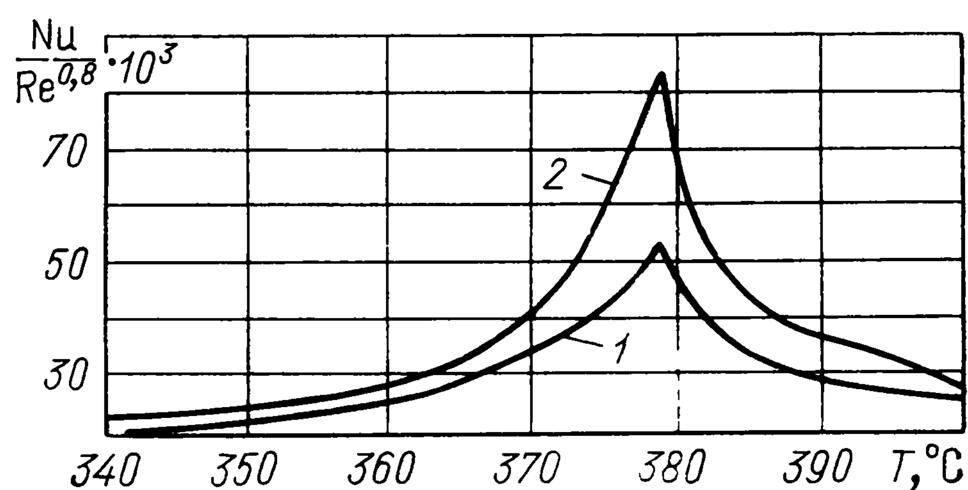



Рис. 11.18. Зависимость $Nu/Re^{0,8}$ от температуры воды при $p = 235\cdot 10^5$ Па по опытам А. А. Арманда:

1 — $q/\rho w = 30,5\cdot 10^{-2}$ Дж/кг; 2 — $q/\rho w = 52\cdot 10^{-2}$ Дж/кг

1. Температура стенки меньше температуры, при которой имеет место максимум теплоемкости для данного давления: $T_{ст} < T_m$. В этом случае имеет место монотонное изменение физических свойств от ядра потока до стенки, причем удельная теплоемкость возрастает в направлении от стенки к потоку, а $\partial c_p/\partial T > 0$.

2. Температура стенки больше температуры максимума теплоемкости $T_{ст} > T_m$. В этом случае также происходит монотонное возрастание удельной теплоемкости в направлении от стенки к потоку, но $\partial c_p/\partial T < 0$.

3. Температура стенки больше, а температура ядра потока меньше температуры максимума теплоемкости: $T_0 < T_m < T_{ст}$. В этом случае между осью потока и стенкой имеет место максимум теплоемкости.

В работе Е. А. Краснощекова и В. С. Протопопова предложена эмпирическая зависимость вида

$$\alpha/\alpha_0 = (\mu_0/\mu_{ст})^{0,11} (\lambda_{ст}/\lambda_0)^{0,33} (\bar{c}_p/c_{p_0})^{0,35}, \qquad (11.10.10)$$

где $\bar{c}_p = (i_{ст} - i_0)/(T_{ст} - T_0)$ — некоторая эффективная удельная теплоемкость, определенная по разности теплосодержаний среды при $T_{ст}$ и $T_0$.

Автором и А. И. Леонтьевым была получена теоретическая зависимость вида

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \left(\frac{2}{\sqrt{\rho_0/\rho_{ст}} + 1}\right)^2, \qquad (11.10.11)$$

которая удовлетворительно ($\pm$ 15%) согласуется с опытными данными для случая 2, т. е. когда по сечению потока $\partial c_p/\partial T < 0$.

Отсюда следует, что для теплообмена при околокритических параметрах важно в первую очередь соотношение $\rho_{ст}/\rho_0$.

## 11.11. ТЕПЛООБМЕН И ТРЕНИЕ ВО ВХОДНОМ УЧАСТКЕ ТРУБЫ

Во входном участке трубы пограничный слой развивается обычным образом до тех пор, пока противоположные точки его внешней границы не сольются. При этом, если общий расход среды по трубе постоянен, скорость течения в невозмущенном ядре меняется вследствие утолщения пограничного слоя.

В невозмущенном ядре потока в меру справедливости модели пограничного слоя конечной толщины трение отсутствует и изменение давления вдоль осредненного течения однозначно связано с изменением скорости, так же, как и во внешней задаче, т. е.

$$dp/dx = \rho_0 w_0 \, dw_0/dx. \qquad (11.11.1)$$

С другой стороны, из уравнения сплошности следует, что

$$\rho_{01} w_{01} R_0^2 = \rho_0 w_0 R_0^2 - 2 \int\limits_{R_0-\delta}^{R_0} (\rho_1 w_0 - \rho w) R dR, \qquad (11.11.2)$$

или

$$R_0^2 - 2 \int\limits_0^\delta \left(1 - \frac{\rho w}{\rho_0 w_0}\right)(R_0 - y)\, dy = (R_0 - \delta^*)^2. \qquad (11.11.3)$$

Здесь $y = R_0 - R$ — расстояние по нормали от стенки и $\delta^*$ — толщина вытеснения.

Таким образом, в цилиндрическом пограничном слое

$$\delta^* = R_0 - \left[R_0^2 - 2\int\limits_0^\delta \left(1 - \frac{\rho w}{\rho_0 w_0}\right)(R_0 - y)\, dy\right]^{1/2}. \qquad (11.11.4)$$

При $\delta^* \ll R_0$

$$\delta^* = \int\limits_0^\delta \left(1 - \frac{\rho w}{\rho_0 w_0}\right)\left(1 - \frac{y}{R_0}\right) dy. \qquad (11.11.5)$$

В области слившегося изотермического пограничного слоя ($\delta = R_0$, $\rho = \rho_0$) и при степенном распределении скорости

$$\frac{\delta^*}{R_0} = 1 - \sqrt{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}. \qquad (11.11.6)$$

При $n = 1/7$ по формуле (11.11.6) $\delta^* = 0{,}095$ вместо $\delta^* = 0{,}125$ в плоском пограничном слое.

Измеряя распределения давления и скорости течения по оси трубы в области $\delta < R_0$, можно найти экспериментальное значение толщины вытеснения по формуле

$$-dp/dw_0 = \rho_{01} w_{01} (1 - \delta^*/R_0)^2. \qquad (11.11.7)$$

Уравнения импульсов и энергии сохраняют прежнюю форму, если $\delta^{**}$ и $\delta_T^{**}$ определять соответствующим образом с учетом кривизны пограничного слоя. Когда их значения заметно меньше радиуса трубы, то поправка та же, что и в формуле (11.11.5) для толщины вытеснения.

Консервативность законов трения и теплообмена имеет место и в данном случае, т. е. функции $c_f$ ($\mathrm{Re}^{**}$) и St ($\mathrm{Re}_T^{**}$) сохраняют свой вид, несмотря на изменение формы записи толщин потери импульса и энергии вследствие кривизны пограничного слоя.

Покажем это на примере закона трения в области распределения скоростей с показателем степени $n = 1/7$. По данным, приведенным в предыдущей главе, для плоского изотермического пограничного слоя в этом случае

$$c_f = 0{,}0252\,\mathrm{Re}^{**-1/4}. \qquad (11.11.8)$$

В области слившегося пограничного слоя $\delta = R_0$ и

$$\tau_{\text{ст}} = (\zeta/8)\,\rho\bar{w}^2 = (c_f/2)\,\rho w_0^2. \qquad (11.11.9)$$

Здесь величина $c_f$ отнесена к скорости на оси трубы. Соответственно

$$\zeta = 4\,(w_0/\bar{w})^2\,c_f. \qquad (11.11.10)$$

Подставляя в это выражение значения $c_f$ из (11.11.8), находим, что

$$\zeta = 1{,}02\varphi^{-1{,}8}\,(2R_0/\delta^{**})^{0{,}25}\,\mathrm{Re}^{-0{,}25}, \qquad (11.11.11)$$

где

$$\mathrm{Re} = \bar{w}D/\nu \quad \text{и} \quad \varphi = \bar{w}/w_0.$$

В рассматриваемом случае

$$\delta^{**} = \int_0^{R_0} \left(\frac{y}{R_0}\right)^{1/7}\left[1 - \left(\frac{y}{R_0}\right)^{1/7}\right]\left(1 - \frac{y}{R_0}\right)dy = 0{,}070;$$

$$H = 0{,}095/0{,}070 = 1{,}35; \ \varphi = 0{,}02.$$

Соответственно по формуле (11.11.11) $\zeta = 0{,}33/\mathrm{Re}^{0{,}25}$, что только на 5% отличается от (11.1.15). Перепишем уравнение импульсов (10.10.1) в виде

$$\varphi d\mathrm{Re}^{**}/d\tilde{X} + \mathrm{Re}\,(1 + H)\,f = \mathrm{Re}\,c_f/2. \qquad (11.11.12)$$

Здесь $\mathrm{Re}^{**} = w_0\delta^{**}/\nu$, $\mathrm{Re} = \bar{w}D/\nu$ и $\tilde{X} = x/D$. В данном случае формпараметр может быть выражен через коэффициент сопротивления $\zeta$, а именно

$$f = \frac{\delta^{**}}{w_0}\,\frac{dw_0}{dx} = \varphi^2\,\frac{\zeta}{4}\,\frac{\delta^{**}}{R_0}. \qquad (11.11.13)$$

Полагая $\zeta/4 \approx c_f$ и зная, что при $n = 1/7$ в области $\delta < R_0$ $\delta^{**} < 0{,}07R_0$, находим, что на отрезке $0 < \delta < R_0$ в уравнении (11.11.12) второй член имеет значение $\approx 0{,}22$ ($\mathrm{Re}c_f/2$). Поэтому в первом приближении можно сохранить уравнение импульсов в форме, соответствующей обтеканию пластины. Тогда

в области закона распределения скоростей с $n = 1/7$ и при развитии турбулентного пограничного слоя с передней кромки трубы

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{X} \approx \mathrm{Re}^{-0,25};\\ &\varepsilon_x = c_f/c_{f,0} \approx (\tilde{X}_0/X)^{0,20}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.11.14)$$

Здесь индексом 0 обозначено сечение, в котором сливаются пограничные слои. При $\mathrm{Pr} \approx 1$ эти соотношения справедливы и для теплоотдачи.

Из первой формулы (11.11.14) получаем при $10^4 < \mathrm{Re} < 10^6$ относительную длину начального участка $10 < \overline{X}_0 < 21$. Эти значения $\overline{X}_0$ близки к экспериментальным. Однако переменность условий на входе в трубу и, в частности, изменение степени турбулизации входящего потока с ростом числа Re, возможность существования на переднем участке ламинарного пограничного слоя и другие обстоятельства приводят к довольно различным экспериментальным данным и о длине участка, на котором стабилизируются трение и теплообмен, и о значении $\varepsilon_x$.

Во всяком случае, из сравнения уравнений (11.11.14) с данными табл. 11.3 видно, что протяженность входного участка при турбулентном течении заметно меньше, чем при ламинарном.

## 11.12. ТЕПЛООБМЕН ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ В КАНАЛАХ НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Для замкнутых каналов, поперечное сечение которых нецилиндрично, коэффициент теплоотдачи является функцией всей совокупности геометрических характеристик рассматриваемого канала. Например, для треугольного канала дополнительной характеристикой является отношение его сторон. Некоторые решения для ламинарного режима течения были приведены в разд. 11.2.

При турбулентном течении тонкий вязкий подслой почти не меняет своих размеров при изменении формы сечения канала. Наблюдается только утолщение вязкого подслоя и возможны появления локальных токов в углах канала. В результате закономерности для средней теплоотдачи при турбулентном течении остаются близкими для каналов различной формы. Однако локальные коэффициенты теплоотдачи могут меняться весьма значительно.

В практических расчетах в качестве основной геометрической характеристики канала пользуются так называемым гидравлическим эквивалентным диаметром

$$D_э = 4\Omega/P. \qquad (11.12.1)$$

Здесь $\Omega$ — площадь свободного («живого») поперечного сечения канала; $P$ — смоченный периметр канала.

При турбулентном продольном обтекании неметаллической жидкостью пакета труб

$$\alpha/\alpha_0 \approx (D_э/D)^{0,1}, \qquad (11.12.2)$$

где $\alpha_0$ — коэффициент теплоотдачи при течении в трубе диаметром, равным наружному диаметру труб пакета $D$. При течении в кольцевых каналах с наружной теплообменной поверхностью

$$\alpha/\alpha_0 \approx 1 - 0,14\,(D_1/D_2)^{0,6}. \qquad (11.12.3)$$

Поскольку такого рода эмпирических формул предложено довольно много, в практических расчетах следует ориентироваться на те или иные нормативные материалы.

## 11.13. ТЕПЛООБМЕН ПРИ ТЕЧЕНИИ ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩИХ ГАЗОВЫХ ТЕПЛОНОСИТЕЛЕЙ

Если в рассматриваемом диапазоне температур возможны процессы диссоциации или ассоциации молекул теплоносителя, то возникает проблема, примыкающая к задачам о температурном факторе и теплообмене при фазовых пере-

ходах. При этом необходимо учитывать как изменения фактических свойств среды с изменением структуры молекул, так и теплоту реакции и время релаксации.

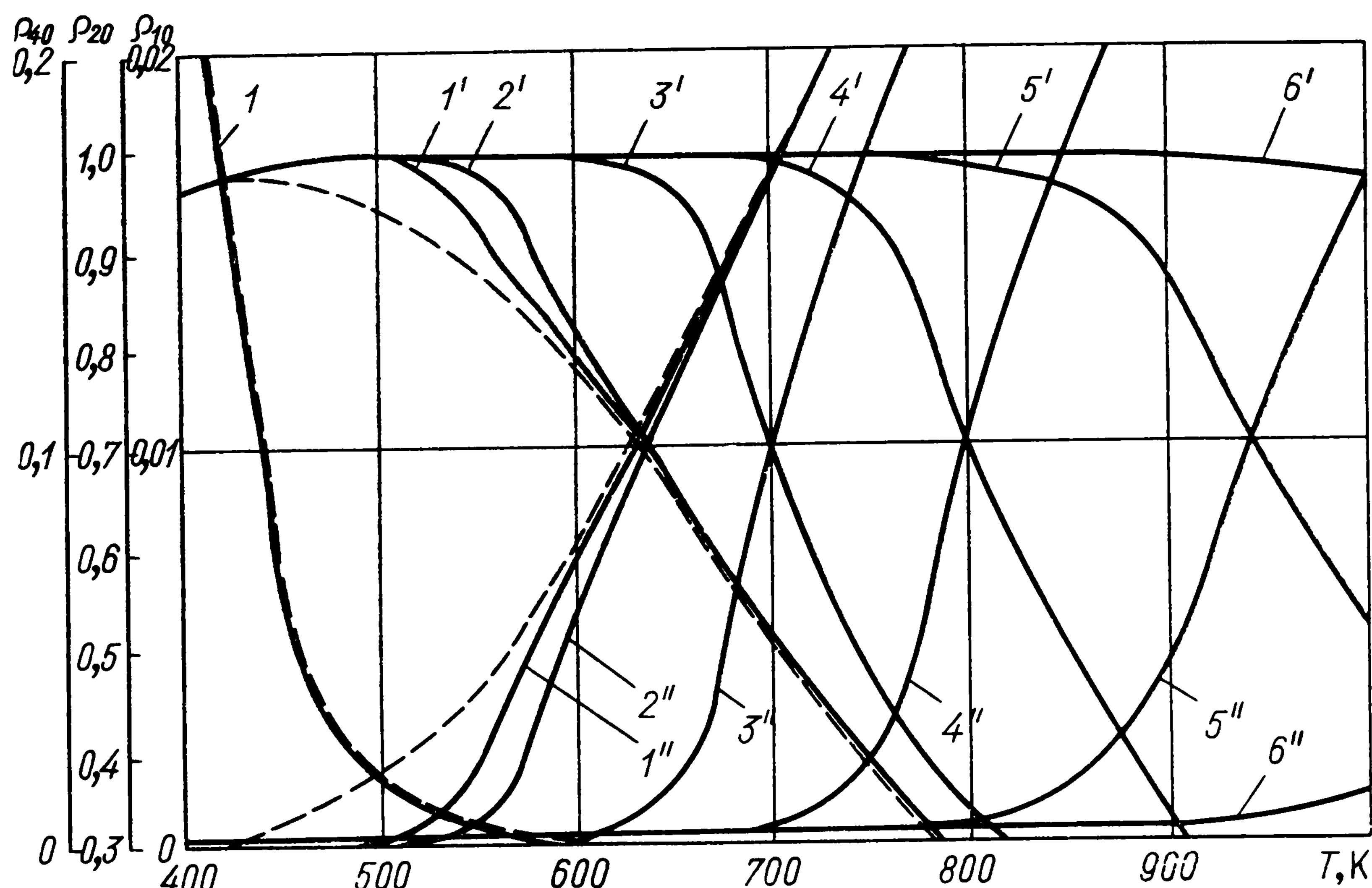



Рис. 11.19. Изменение относительных концентраций $\rho_{\text{ко}}$ компонентов смеси $N_2O_4 \rightleftarrows 2NO_2 \rightleftarrows 2NO + O_2$ в зависимости от температуры и времени пребывания газа в канале $t$, с:

*1* — $\rho_{10}$; *1'* — $\rho_{20}$ ($t=1000$); *2'* — $\rho_{20}$ (84); *3'* — $\rho_{20}$ (4); *4'* — $\rho_{20}$ (0,4); *5'* — $\rho_{20}$ (0,04); *6'* — $\rho_{20}$ (0,0035), *1''* — *6''* — $\rho_{40}$ соответственно; пунктирная линия — равновесные условия

Теплота реакции в данном случае может быть учтена введением эффективной теплоемкости системы. Насколько сложна возникающая ситуация, видно на примере расчетов состояния системы, исходным продуктом которой является четырехокись азота (рис. 11.19).

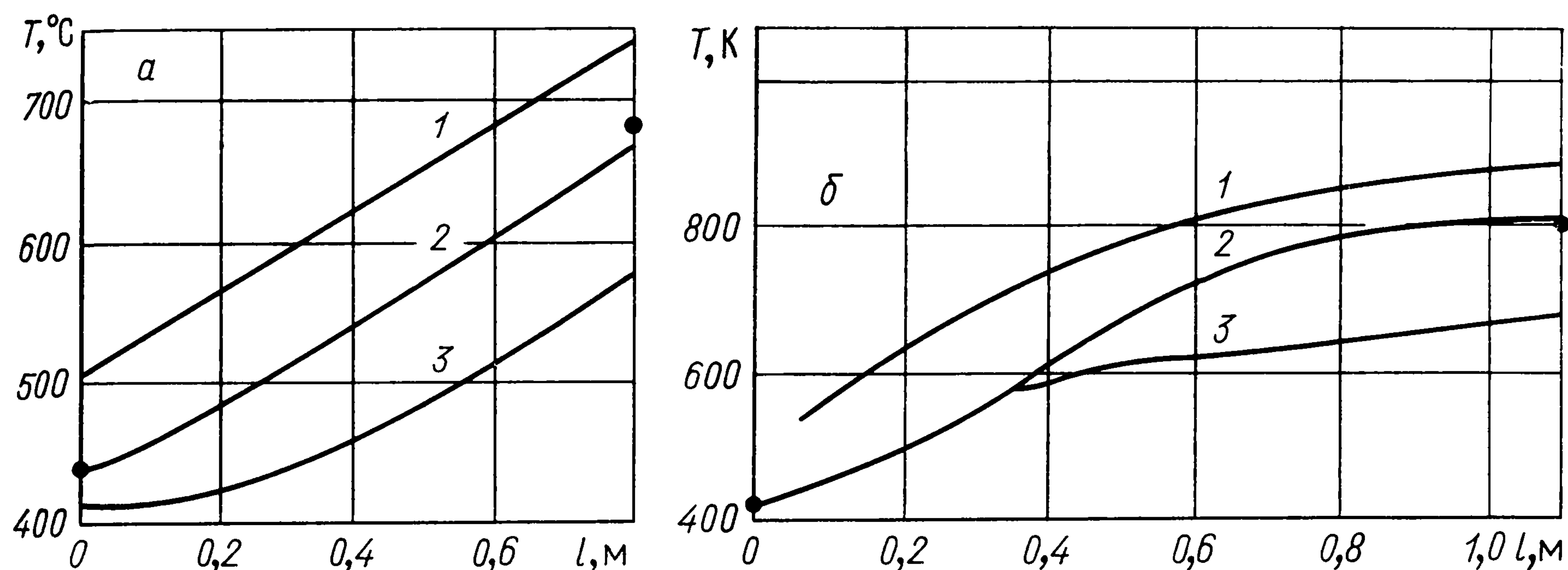



Рис. 11.20. Распределение температуры стенки и газа по длине трубы при II стадии реакции диссоциации ($2NO_2 \rightleftarrows 2NO + O_2$) при времени пребывания газа в трубе 0,017 с (*а*) и 0,03 с (*б*):

*1* — температура стенки, *2* — температура газа, рассчитанная с учетом химического неравновесия; *3* — температура газа, рассчитанная по условиям химического равновесия; ● — экспериментальные значения температуры газа на входе и выходе из трубы

При течении диссоциирующего газа без фазовых переходов система определяющих критериев может быть составлена аналогично той, которая возникает для области фазового перехода второго рода. При этом в качестве теплоемкости при параметрах стенки принимается величина

$$c^*_{p,\,\text{ст}} = (i_{\text{ст}} - i_0)/(T_{\text{ст}} - T_0). \qquad (11.13.1)$$

Общий расчет теплообмена должен учитывать время пребывания элементарного объема газа в канале и время релаксации. Как могут влиять эти параметры на изменение температуры по каналу, видно из примера, приведенного на рис. 11.20.

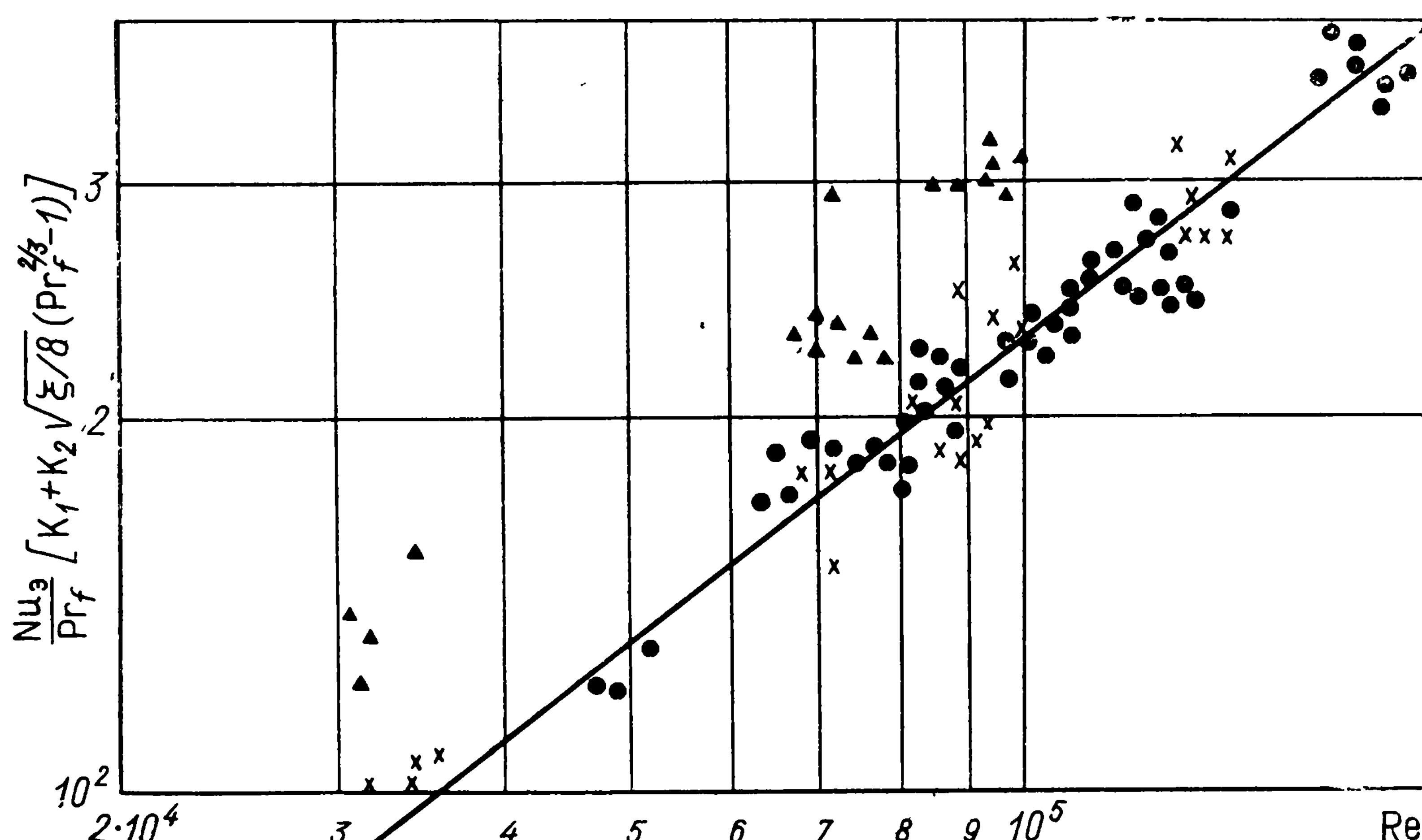



Рис. 11.21. Обработка экспериментальных данных по теплообмену при нагреве системы $N_2O_4 \rightleftarrows 2NO_2$:
● — $p$=1,0 ÷ 3,0 МПа; × — $p$=3,0 ÷ 5,5 МПа; ▲ — $p$=6,0 ÷ 8,5 МПа

Влияние неравновесности процесса на теплоотдачу диссоциирующего газа, текущего в трубе, отчетливо видно на рис. 11.21.

Детальное изложение этой проблемы имеется в работах А. К. Красина, В. Б. Нестеренко, Б. С. Петухова, А. И. Девойно и др.

## 11.14. ВЛИЯНИЕ ШЕРОХОВАТОСТИ СТЕНКИ ТРУБЫ НА ТЕПЛООТДАЧУ

При ламинарном течении, когда теплопроводность во всех точках потока одинакова, термическое сопротивление слоя, текущего между бугорками шероховатости стенки, пренебрежимо мало, по сравнению с термическим сопротивлением всей толщи потока. Не сказывается шероховатость стенки и на гидродинамических характеристиках ламинарного течения в связи с относительно слабым изменением скорости около стенки.

Иначе обстоит дело с турбулентным потоком. В последнем наиболее существенные изменения скорости и температуры (при Pr $\gg$ 1) происходят в непосредственной близости к стенке, на расстояниях, которые могут быть соизмеримы с высотой бугорков шероховатости. Как видно из рис. 11.3, при определенных значениях Re (зависящих от относительной шероховатости $k/R_0$) шероховатость стенок трубы вызывает коренное изменение в зависимости гидравлического сопротивления от скорости течения. Это изменение в автомодельной области приводит к независимости гидродинамических характеристик потока от молекулярного трения и в связи с этим от числа Re.

Однако на тепловые процессы молекулярный перенос продолжает влиять и при турбулентном течении в области квадратичного закона сопротивления. Это влияние выражается через термическое сопротивление вязкого пристенного слоя, текущего между бугорками шероховатости и отделяющего собственно стенку от турбулентного ядра потока. Таким образом, граничные условия к уравнениям движения и теплообмена при обтекании шероховатой поверхности оказываются неодинаковыми. Распределение скоростей в этом случае существенно зависит от торможения потока на бугорках шероховатости. Распределение же температур зависит как от торможения потока (через поле скоростей), так

и от теплопроводности в вязком подслое и в том случае, когда его толщина становится меньше высоты бугорков шероховатости. В связи с этим даже при условии Pr = 1 и grad $p$ = 0 в турбулентном потоке, обтекающем шероховатую поверхность, нет точного подобия полей скоростей и температур. Оценить, по крайней мере качественно, влияние шероховатости на теплоотдачу можно на основе следующих допущений: 1) теплопроводностью бугорков шероховатости и вносимым ими загромождением вязкого подслоя можно пренебречь; 2) толщина вязкого подслоя в общем случае есть функция высоты бугорков шероховатости

$$\eta_1 = f(v^* k/\nu), \qquad (11.14.1)$$

но в первом приближении $\eta_1$ имеет то же значение, что и при течении в гладкой трубе; 3) в области $y_1 < y < k$ интенсивность турбулентного обмена приближенно выражается так же, как и в ядре потока или промежуточном слое.

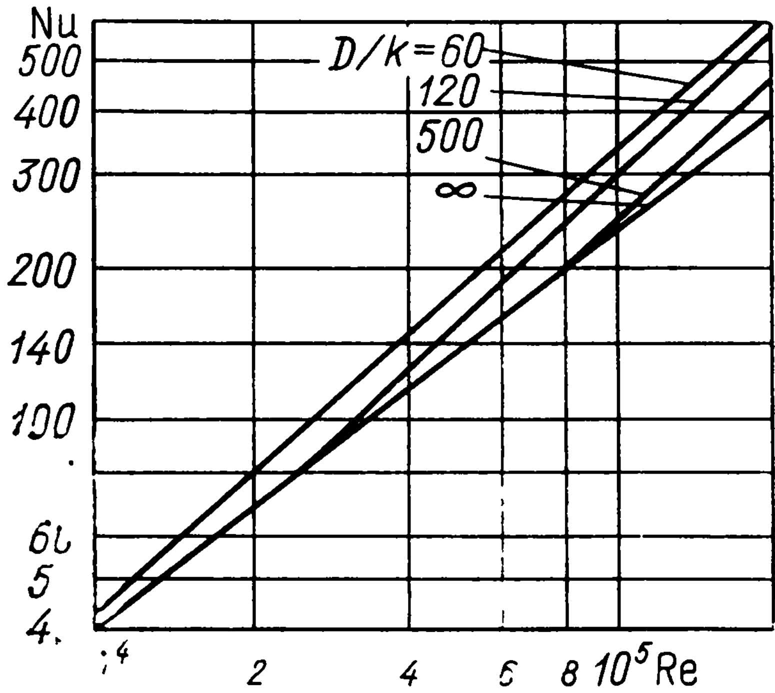



Рис. 11.22. Влияние шероховатости на теплоотдачу в трубе по табл. 11.11

При таком рассмотрении интенсивность теплоотдачи в шероховатой трубе выражается той же функцией чисел Re, Pr и $\zeta$, что и в гладкой трубе, но значения $\zeta$ в эту формулу следует подставлять с учетом влияния шероховатости. При этом следует отметить, что, согласно обстоятельным опытам, в ядре потока величина $\varkappa$ оказывается одной и той же независимо от шероховатости.

В табл. 11.11 приведены значения числа Nu, рассчитанные для газа с Pr = 1 по формуле (11.6.13) при различных $D/k$. Закон сопротивления взят в соответствии с данными рис. 11.3.

Таблица 11.11

**Сопоставление значений чисел Nu/$\zeta$ для гладких груб и труб с зернистой шероховатостью Pr = 1 (расчет по формуле (11.6.13) и рис. 11.3)**

| Re | $D/k$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | ∞ | 500 | 120 | 60 |
| $1\cdot10^4$ | 39,5/0,0316 | 39,5/0,0316 | 39,5/0,0316 | 42,0/0,039 |
| $5\cdot10^4$ | 132/0,021 | 133/0,022 | 156/0,0323 | 181/0,0450 |
| $2\cdot10^5$ | 388/0,0155 | 456/0,0182 | 560/0,0362 | 610/0,0456 |

Таким образом, в шероховатых трубах интенсивность теплоотдачи возрастает относительно меньше, чем коэффициент гидравлического сопротивления. При этом влияние шероховатости на показатель степени в зависимости Nu от Re оказывается не очень большим — изменение числа Re от $1\cdot10^4$ до $2\cdot10^5$ (в 20 раз) изменяет число Nu для гладкой трубы в 9,8 раза (средний показатель степени при Re равен 0,76), а для трубы с шероховатостью $D/k$ = 60 — в 14,5 раза (средний показатель степени 0,89). Графически результаты этих расчетов показаны на рис. 11.22.

## 11.15. ВЛИЯНИЕ ВНУТРЕННЕГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

Внутренний источник тепла возникает в потоке жидкости, несущей радиоактивную взвесь, в потоке радиоактивного раствора, при прохождении электрического тока через электролит или жидкий металл и т. п. Рассмотрим влияние этого фактора на коэффициент теплоотдачи при течении жидкости в круглой трубе, достаточно длинной для того, чтобы можно было пренебречь влиянием входного участка.

Введя в зависимость (11.3.3) внутренний источник плотностью $q_V$, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial R}\left[\left(1+\frac{\lambda_T}{\lambda}\right)R\frac{\partial T}{\partial R}\right]+\frac{q_V R}{\lambda}=\frac{wR}{a}\frac{\partial T}{\partial x}. \qquad (11.15.1)$$

Интегрируя в пределах от 0 до $R$ при условиях $q_V = \mathrm{const}$, после приведения к безразмерному виду находим значение

$$\vartheta=-\frac{\mathrm{Pe}}{2}\int_{\xi}^{1}\frac{\int_0^{\xi}\omega\xi(\partial\vartheta/\partial X)\,d\xi}{(1+\lambda_T/\lambda)\,\xi}\,d\xi-\frac{q_V R_0^2}{2\lambda(T_{\text{ст}}-\overline{T})}\int_{\xi}^{1}\frac{\xi d\xi}{1+\lambda_T/\lambda}. \qquad (11.15.2)$$

Введем в это выражение значение $\partial\vartheta/\partial X$ из (11.5.10), определяя значение коэффициента теплоотдачи по обычной формуле

$$\alpha=q_{\text{ст}}/(T_{\text{ст}}-\overline{T}), \qquad (11.15.3)$$

где $q_{\text{ст}}$ — плотность теплового потока, пронизывающего стенку трубы, Вт/м². В результате находим, что

$$\frac{1}{\mathrm{Nu}}=2\int_0^1\omega\xi\left[\int_{\xi}^{1}\frac{\int_0^{\xi}\omega\xi d\xi}{(1+\lambda_T/\lambda)\,\xi}\,d\xi\right]d\xi+Z\left\{2\int_0^1\omega\xi\left[\int_{\xi}^{1}\frac{\int_0^{\xi}\omega\xi d\xi}{(1+\lambda_T/\lambda)\,\xi}\,d\xi\right]d\xi-\right.$$
$$\left.-\int_0^1\omega\xi\left(\int_0^1\frac{\xi d\xi}{1+\lambda_T/\lambda}\right)d\xi\right\}. \qquad (11.15.4)$$

Здесь $Z = q_V R_0/2q_{\text{ст}}$ — относительная плотность источника тепла. Выражение, стоящее в фигурных скобках, может быть приведено к виду

$$\int_0^1\omega\xi\left[\int_{\xi}^{1}\left(\frac{2}{\xi}\int_0^{\xi}\omega\xi d\xi-\xi\right)\frac{d\xi}{1+\lambda_T/\lambda}\right]d\xi. \qquad (11.15.5)$$

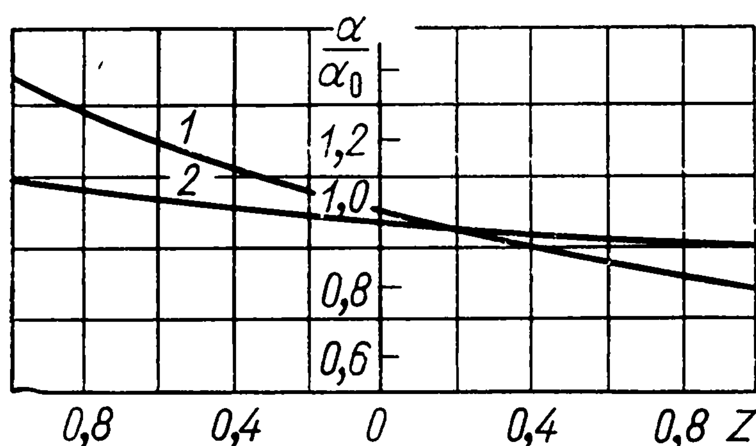


Рис. 11.23. Влияние внутреннего источника тепла на коэффициент теплоотдачи:
*1* — по формуле (11.15.7); *2* — по формуле (11.15.8)

Отсюда видно, что степень влияния внутреннего источника тепла пропорциональна величине

$$\Delta=\frac{2}{\xi}\int_0^{\xi}\omega\xi d\xi-\xi. \qquad (11.15.6)$$

При $\omega = 1$ $\Delta = 0$, т. е. в предельно развитом турбулентном потоке коэффициент теплоотдачи не зависит от плотности внутреннего источника.

Первый член уравнения (11.15.4) тождествен уравнению (11.5.14), т. е. представляет собой величину $1/\mathrm{Nu}_0$, где $\mathrm{Nu}_0$ — значение числа Нуссельта при $q_V = 0$.

Для ламинарного течения с параболическим профилем скоростей из уравнения (11.15.4) запишем:

$$\alpha/\alpha_0 = (1 + 0{,}272Z)^{-1}. \qquad (11.15.7)$$

Для турбулентного течения с распределением скоростей по закону степени 1/7 и при числе $\mathrm{Pr} = 0$

$$\alpha/\alpha_0 = (1 + 0{,}0834Z)^{-1}. \qquad (11.15.8)$$

На рис. 11.23 показаны результаты расчетов по этим формулам.

В общем влияние внутреннего источника на коэффициент теплоотдачи невелико. При $Z > 0$ коэффициент теплоотдачи несколько уменьшается вследствие более интенсивного нагрева слоев потока, имеющих меньшую скорость течения. При стоке тепла ($Z < 0$) коэффициент теплоотдачи несколько возрастает.

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*


1. **Аладьев И. Т.** Экспериментальное определение локальных и средних коэффициентов теплоотдачи при турбулентном течении жидкости в трубах.— «Изв. АН СССР. Сер. ОТН», 1951, № 11, с. 1669.
2. **Вопросы теплообмена.** Сб. статей. Отв. ред. М. А. Михеев. М., Изд-во АН СССР, 1959.
3. **Вопросы теплообмена.** Пер. с англ. М.— Л., Госэнергоиздат, 1959.
4. **Гидродинамика** и теплообмен в атомных энергетических установках. (Основы расчета). М., Атомиздат, 1975. Авт.: В. И. Субботин, М. Х. Ибрагимов, П. А. Ушаков и др.
5. **Жидкометаллические** теплоносители. Изд. 3-е М., Атомиздат, 1976. Авт.: Кутателадзе С. С., Боришанский В. М., Новиков И. И., Федынский О. С.
6. **Ильин Л. Н.** О влиянии температуры на конвективную теплоотдачу. М., Машгиз, 1951. (Тр. ЦКТИ, кн. 18).
7. **Киприянов И. В.** Теплоотдача и сопротивление газового потока в каналах с продольно омываемыми поверхностями нагрева. М., Машгиз, 1952. (Тр. ЦКТИ, кн. 22).
8. **Краснощеков Е. А., Протопопов В. С.** К вопросу о теплообмене при течении углекислоты и воды в сверхкритической области параметров состояния.— «Теплоэнергетика», 1960, № 10, с. 94.
9. **Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И.** Турбулентный пограничный слой сжимаемого газа. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
10. **Лельчук В. Л., Елфимов Г. И.** Теплообмен от стенки к углекислому газу при турбулентном течении в круглой трубе и больших тепловых нагрузках.— «Инж.-физ. журн.», 1963, т. 6, № 12, с. 11.
11. **Лельчук В. Л., Елфимов Г. И.** Теплоотдача к турбулентному потоку аргона внутри трубы при больших температурных напорах и высоких температурах стенки.— «Теплофизика высоких температур», 1964, т. 2, № 2, с. 243.
12. **Лельчук В. Л., Дядякин Б. В.** Теплоотдача от стенки к турбулентному потоку воздуха внутри трубы и гидравлическое сопротивление при больших температурных напорах. — В сб. «Вопросы теплообмена», М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 123.
13. **Миллионщиков М. Д.** Турбулентные течения в пограничном слое и трубах. М. ,«Наука», 1969.
14. **Методика** и зависимости для теоретического расчета теплообмена и гидравлического сопротивления теплообменного оборудования АЭС, РТМ 24 031 05—72. М., Минтяжмаш, 1974.
15. **Мигай В. К.** Теплообмен в треугольном канале при ламинарном течении.— «Инж.-физ. журн.», 1958, № 7, с. 18.
16. **Петухов Б. С.** Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М., «Энергия», 1967.
17. **Петухов Б. С., Генин Л. Г., Ковалев С. А.** Теплообмен в ядерных энергетических установках. М., Атомиздат 1974.
18. **Стырикович М. А., Семеновкер И. Е.** Теплообмен при очень низких значениях чисел Pr. — «Журн. техн. физ.», 1940, т. 10, № 16, с. 1324.
19. **Теплообмен** в химически реагирующих газовых теплоносителях. Под ред. А. К. Красина, В. Б. Нестеренко, А. Н. Девятко. Минск, «Наука и техника», 1971.
20. **Теплообмен** при высоких тепловых нагрузках и других специальных условиях. М., Госэнергоиздат, 1959.
21. **Шваб В. А.** К теории теплопередачи в турбулентном потоке. Тр. ЛПИ, Разд. физ.-мат. наук, вып. 1, 1937.
22. **Latzko H.** Der Wärmeübergang an einem turbulenten Flüssigkeits-oder Gasstrom. — «Abhandl. aus des Aerodyn. Inst. an der Techn. Hochschule, Aachen», 1930, Hf. I, S. 63.
23. **Lyon R.** Liquid metal heat — transfer coefficients. — «Chem. Eng. Progr », 1951, vol. 47, N 75, p. II.
24. **Nusselt W.** Der Wärmeübergang in Rohrleitungen. — «VDI Forschungsheft», 1910, Hf. 89, S. I.

Глава 12

# ТЕПЛООБМЕН ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

## 12.1. СВЯЗЬ МЕЖДУ ТЕМПЕРАТУРОЙ ТОРМОЖЕНИЯ И СКОРОСТЬЮ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА В ГАЗЕ

Для плоского пограничного слоя температура торможения

$$T^* = T + w_x^2/2c_p. \qquad (12.1.1)$$

Из термодинамики известно, что скорость распространения звука в газе, подчиняющемся уравнению Клапейрона—Менделеева, определяется адиабатической сжимаемостью среды:

$$a^* = \sqrt{kp/\rho} = \sqrt{c_p T (k-1)}, \qquad (12.1.2)$$

где $k = c_p/c_v$ — показатель адиабаты.

Подставляя в уравнение (12.1.1) значение термодинамической температуры потока $T$, выраженное через скорость звука, находим, что в потоке газа

$$T^* = T\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right). \qquad (12.1.3)$$

Здесь величина

$$M = w/a^* \approx w\sqrt{\rho/p} \qquad (12.1.4)$$

представляет собой отношение скорости течения среды к скорости распространения в ней звука, т. е. является критерием, характеризующим сжимаемость среды под воздействием динамических сил в потоке.

## 12.2. КОЭФФИЦИЕНТ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И ОБОБЩЕННЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛООТДАЧИ

Термодинамическая температура потока может быть измерена только таким термоприемником, относительная скорость которого равна нулю. В ином случае термометр будет показывать некоторую температуру, промежуточную между термодинамической температурой и температурой торможения. В общем случае

$$T_{\text{изм}} = T + rw^2/2c_p, \qquad (12.2.1)$$

где $r$ — так называемый коэффициент восстановления, который зависит от физических свойств потока, режима течения, геометрической формы и физических свойств обтекаемой поверхности (измерителя). При этом предполагается, что теплообмен излучением пренебрежимо мал. Температура, которая устанавливается на поверхности тела при отсутствии в нем каких-либо тепловых потоков (т. е. теплопередачи по нормали и растечек тепла вдоль этой поверхности вследствие теплопроводности), называется равновесной температурой.

Равновесная температура стенки $T^*_{\text{ст}}$ определяется формулой (12.2.1), причем коэффициент восстановления в этом случае зависит только от свойств потока и геометрии обтекаемой поверхности. Для газа при заданной форме тела коэффициент восстановления в случае равновесной температуры

$$r = r(\text{Pr};\ k;\ M;\ \text{Re}). \qquad (12.2.2)$$

Для продольно обтекаемой пластины при ламинарном пограничном слое $r \approx \sqrt{\text{Pr}}$, а при турбулентном пограничном слое $r \approx \sqrt[3]{\text{Pr}}$. При поперечном обтекании проволок газом по В. С. Жуковскому при $\text{Re} < 3000$

$$r = (0{,}355 + 2{,}14\text{Pr})(k - 1). \qquad (12.2.3)$$

Исследования коэффициента восстановления для различных областей значений чисел Re были проведены В. С. Жуковским и Л. М. Зысиной-Моложен (табл. 12.1). На рис. 12.1 приведены расчетные зависимости коэффициента восстановления от числа Pr при обтекании плоской пластины. Как видно, у неметаллических жидкостей (Pr $<$ 1) равновесная температура стенки $T^*_{\text{ст}}$ может существенно превышать температуру торможения в невозмущенном потоке $T^*_0$. Объясняется это тем, что вблизи стенки интенсивность диссипации работы трения пропорциональна $\mu w^2$, а отвод выделившейся теплоты от теплоизолированной стенки в ядро потока жидкости пропорционален $\lambda\,(T^*_{\text{ст}}-T_0)$. Отсюда при подобии между трением и теплообменом $T^*_{\text{ст}} = T^*_0$, а при $\nu > a$ теплоотвод через пограничный слой затрудняется и $T^*_{\text{тс}} > T^*_0$. В турбулентном пограничном слое такое подобие нарушается при Pr $\neq$ 1 только вследствие процессов молекулярного трения и молекулярной теплопроводности в тонком вязком подслое. Поэтому зависимость величины $r$ от числа Pr для турбулентного пограничного слоя слабее, чем для ламинарного пограничного слоя. Значения коэффициента восстановления при течении в трубах близки к соответствующим значениям для пластины.

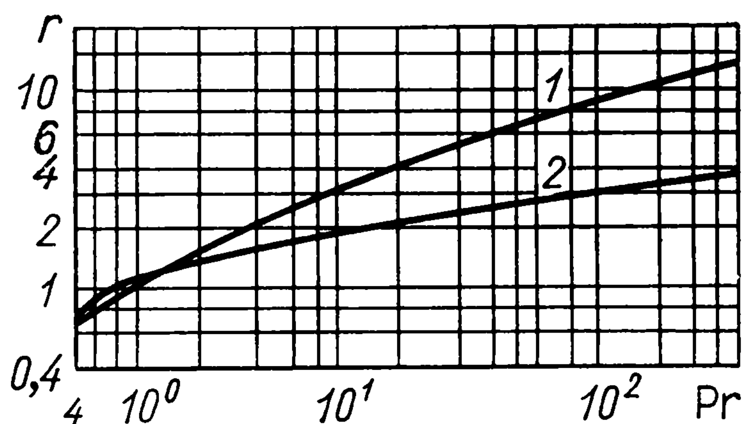



Рис. 12.1. Коэффициент восстановления при обтекании пластин:

*1* — ламинарный пограничный слой; *2* — турбулентный пограничный слой

Таблица 12.1

**Коэффициенты восстановления при поперечном обтекании воздухом проволок (Pr = 0,72; $k$ = 1,40)**

| Re | 3000 | 3000—20 000 | 20 000—140 000 $M>0,7$ | 140 000 |
|---|---|---|---|---|
| $r$ | 0.76 | Неустойчивые значения | 0,92 | $\partial r/\partial \text{Re}<0$ |

Таким образом, характерной величиной, определяющей поток энтальпии, является разность энтальпии при параметрах на стенке и энтальпии изоэнтропического торможения с учетом коэффициента восстановления. Поэтому определение (9.5.6) коэффициента теплоотдачи по разности энтальпии стенки и энтальпии торможения в общем случае целесообразно записать в форме

$$q = \alpha\,(i^*_{\text{ст}} - i_{\text{ст}}), \tag{12.2.4}$$

где $i^*_{\text{ст}} = i_0 + rw_0^2/2$ — равновесная энтальпия стенки. Эта формула имеет то достоинство, что всегда дает при $i_{\text{ст}} = i^*_{\text{ст}}$ правильное значение теплового потока $q = 0$.

## 12.3. ТЕПЛООТДАЧА К ПЛАСТИНЕ

Рассмотрим течение при отсутствии скачков уплотнения. В случае обтекания пластины потоком газа при Pr = 1, $c_p = \text{const}$ и $\partial p/\partial x = 0$ уравнения теплопроводности и движения пограничного слоя (9.4.2) становятся однотипными относительно $T^*$ и $w_x$. Следовательно, в рассматриваемом случае имеет место подобие полей температур торможения и скоростей. Из условия подобия следует, что

$$(T^* - T_{\text{ст}})/(T^*_0 - T_{\text{ст}}) = w_x/w_0. \tag{12.3.1}$$

Здесь индексом 0 обозначены температура торможения и скорость течения вне пограничного слоя. Из последнего выражения следует, что

$$T = T_{\text{ст}} + \left(T_0 + \frac{w_0^2}{2c_p} - T_{\text{ст}}\right)\frac{w_x}{w_0} - \frac{w_0^2}{2c_p}\left(\frac{w_x}{w_0}\right)^2; \tag{12.3.2}$$

$$q = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{\text{ст}} = \frac{\lambda}{w_0}\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)_{\text{ст}}\left(T_{\text{ст}} - T_0 - \frac{w_x^2}{2c_p}\right). \tag{12.3.3}$$

Выражая градиент скорости у стенки через напряжение трения $\tau_{ст}$, получаем

$$q/\tau_{ст} = c_p\,(T_{ст} - T_0^*)/w_0. \qquad (12.3.4)$$

Это выражение совершенно аналогично формуле (9.2.5) для потока медленно движущейся жидкости и отличается от него только тем, что термодинамическая температура ядра потока замещена в ней температурой торможения.

Вводя в уравнение (12.3.4) обобщенное значение коэффициента теплоотдачи по формуле (12.2.4) и выражая $\tau_{ст}$ через локальное значение коэффициента трения $c_f$, получаем

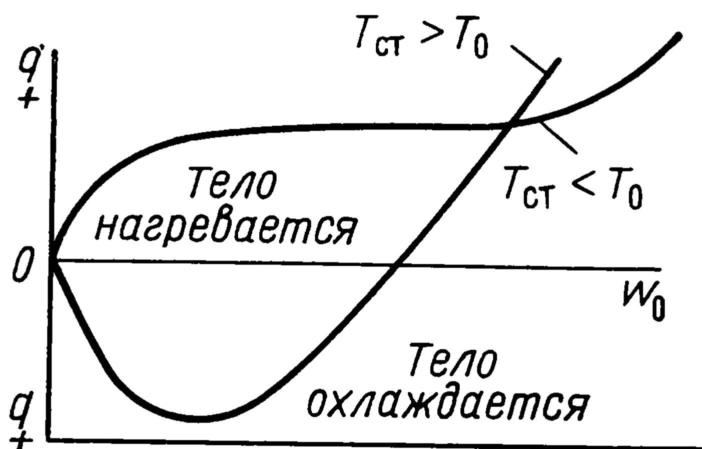


Рис. 12.2. Характер изменения теплообмена с увеличением скорости течения газа

$$\alpha/(\rho_0\,w_0) = c_f/2, \qquad (12.3.5)$$

или, при $c_p$ = const,

$$\alpha/(c_p\,\rho_0\,w_0) = c_f/2. \qquad (12.3.6)$$

В формуле (12.3.5) коэффициент теплоотдачи выражен через разность энтальпий, а в формуле (12.3.6) — через разность температур. Как видно, формула (12.3.6) совершенно тождественна формуле (9.2.8); при этом, однако, следует обратить внимание на то, что в нее входит значение плотности среды при определенной температуре $T = T_0$. При Pr $\approx$ 1 практически можно полагать

$$\alpha/(c_p\,\rho_0\,w_0) = \mathrm{Pr}^{-0,6}\,c_f/2. \qquad (12.3.7)$$

Введя в формулу (12.3.3) значение критерия $M = w_0/a^*$ по формуле (12.1.3), можем написать (Pr = 1)

$$q = \frac{c_f}{2}\,c_p\,\rho_0\sqrt{kRT_0}\,M_0\left[T_{ст} - T_0\left(1 + \frac{k-1}{2}\,M_0^2\right)\right]. \qquad (12.3.8)$$

Из этого выражения видно, что при $T_{ст} > T_0$ увеличение скорости течения (т. е. увеличение числа $M_0$) вначале вызывает рост, а затем падение теплового потока. При

$$M_0 = \sqrt{\frac{2}{k-1}\left(\frac{T_{ст}}{T_0} - 1\right)} \qquad (12.3.9)$$

тепловой поток равен нулю и при дальнейшем увеличении числа $M_0$ меняет знак. Таким образом, если $T_{ст} > T_0$, то пластина отдает тепло потоку до тех пор, пока $M_0 < \sqrt{\frac{2}{k-1}\left(\frac{T_{ст}}{T_0} - 1\right)}$, и начинает получать тепло от потока газа, когда знак неравенства меняется. Когда термодинамическая температура ядра потока больше температуры стенки, тепловой поток всегда направлен от газа к пластине (рис. 12.2).

## 12.4. КОЭФФИЦИЕНТ ТРЕНИЯ ПЛАСТИНЫ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Относительная плотность газа в данной точке может быть определена из уравнения состояния через температуру $T_0^*$ и соответствующее ей расчетное давление $p_{00}$. Отсюда

$$\rho/\rho_{00} = pT_0^*/(p_{00}\,T) \qquad (12.4.1)$$

или, принимая во внимание, что в пограничном слое $\partial p/\partial y = 0$ и, следовательно, $p = p_0$,

$$\rho/\rho_{00} = p_0\,T_0^*/(p_{00}\,T). \qquad (12.4.2)$$

Изменение состояния газа вне пограничного слоя происходит адиабатически, и, следовательно,

$$\frac{p_0}{p_{00}}=\left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)^{k/(k-1)}=\left(1-\frac{w_0^2}{2c_p T_0^*}\right)^{k/(k-1)}. \qquad (12.4.3)$$

Уравнение температурного поля (12.3.2) можно переписать следующим образом:

$$T=T_0^*\left[1-\bar{u}^2+\left(\frac{T_{\text{ст}}}{T_0^*}-1\right)\left(1-\frac{\bar{u}}{\bar{U}}\right)\right], \qquad (12.4.4)$$

где

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}&=w_x/\sqrt{2c_p T_0^*};\\ \bar{U}&=\frac{w_0}{\sqrt{2c_p T_0^*}}=\sqrt{\frac{(k-1)M^2}{2+(k-1)M^2}}.\end{aligned}\right\} \qquad (12.4.5)$$

Совмещая формулы (12.4.2)—(12.4.4), находим, что

$$\frac{\rho}{\rho_{00}}=\left(1-\bar{U}^2\right)^{k/(k-1)}\left[1-\bar{u}^2+\left(\frac{T_{\text{ст}}}{T_0^*}-1\right)\left(1-\frac{\bar{u}}{\bar{U}}\right)\right]^{-1}. \qquad (12.4.6)$$

Уравнение импульсов для безградиентного обтекания примет вид

$$d\delta^{**}/dx=\tau_{\text{ст}}/(\rho_{00}w_0^2), \qquad (12.4.7)$$

где $\delta^{**}=\int\limits_0^\delta \frac{\rho w_x}{\rho_{00}w_0}\left(1-\frac{w_x}{w_0}\right)dy$ — толщина потери импульса, отнесенная к плотности $\rho_{00}$.

Подставляя в равенство (12.4.7) значение $\rho/\rho_{00}$ по уравнению (12.4.6), получаем

$$\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho_{00}w_0^2}=\frac{d}{dx}\int\limits_0^\delta \frac{w_x}{w_0}\left(1-\frac{w_x}{w_0}\right)d\eta. \qquad (12.4.8)$$

Здесь $d\eta=\frac{\rho}{\rho_{00}}dy$, и соответственно

$$\eta=\int\limits_0^y\left(1-\bar{U}^2\right)^{k/k(-1)}\left[1-\bar{u}^2+\left(\frac{T_{\text{ст}}}{T_0^*}-1\right)\left(1-\frac{\bar{u}}{\bar{U}}\right)\right]^{-1}dy. \qquad (12.4.9)$$

Отсюда видно, что введенная А. А. Дородницыным переменная $\eta$ позволяет свести уравнение импульсов для газа к форме уравнения импульсов для потока несжимаемой жидкости.

Тогда коэффициент трения можно выразить:

$$c_f=\frac{2\tau_{\text{ст}}}{\rho_{00}w_0^2}=2\frac{d\delta^{**}}{dx}\left(1-\bar{U}^2\right)^{1/(1-k)}. \qquad (12.4.10)$$

После этих преобразований расчет ламинарного пограничного слоя газа можно вести аналогично расчету ламинарного слоя несжимаемой жидкости, введя в полином, аппроксимирующий профиль скоростей, вместо расстояния от стенки $y$ величину $\eta$. Кроме того, необходимо учесть переменность вязкости.

Л. Е. Калихман распространил на эту задачу метод Польгаузена, которым мы уже пользовались в гл. 10.

Предположим что

$$\left.\begin{aligned}&\mu=\mu_{00}(T/T_0^*)^n=\mu_{00}\left[1-\bar{u}^2+(T_{\text{ст}}/T_0^*-1)(1-\bar{u}/\bar{U})\right]^n;\\&\bar{u}/\bar{U}=A_1\eta/\delta+A_2(\eta/\delta)^2+A_3(\eta/\delta)^3+A_4(\eta/\delta)^4;\\&(T_0^*-T^*)(T_0^*-T_{\text{ст}})=B_1\eta/\delta+B_2(\eta/\delta)^2+B_3(\eta/\delta)^3+B_4(\eta/\delta)^4.\end{aligned}\right\}\quad(12.4.11)$$

$$\text{При } y=0\ \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)=0;\ \text{при } y=\delta\ w_x=w_0,\ \mu\frac{\partial w_x}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)=0.$$

Переходя к переменной Дородницына $\eta$, получаем:
при $\eta=0$

$$\left(\partial^2\frac{\bar{u}}{\bar{U}}\right)\Bigg/\left[\partial\left(\frac{\eta}{\delta}\right)^2\right]+(1-n)\left(1-\frac{T_0^*}{T_{\text{ст}}}\right)\left[\left(\partial\frac{\bar{u}}{\bar{U}}\right)\Bigg/\left(\partial\frac{\eta}{\delta}\right)\right]^2=0,$$

при $\eta=\delta$

$$\bar{u}=\bar{U},\ \left(\partial\frac{\bar{u}}{\bar{U}}\right)\Bigg/\left(\partial\frac{\eta}{\delta}\right)=0,\ \left(\partial^2\frac{\bar{u}}{\bar{U}}\right)\Bigg/\left[\partial\left(\frac{\eta}{\delta}\right)^2\right]=0.$$

Аналогичные условия составляют для температуры. По этим граничным условиям вычисляют коэффициенты $A_i$ и $B_i$ в системе (12.4.11). Расчеты, выполненные Л. Е. Калихманом, привели к формуле

$$\bar{c}_f=F\left(\frac{T_{\text{ст}}}{T_0^*}\right)\text{Re}^{-0,5}\left(\frac{T_0^*}{T_0}\right)^{(n-1)/2},\qquad(12.4.12)$$

где $\text{Re}=w_0l/\nu_0$. Здесь

$$\left.\begin{aligned}&F\left(\frac{T_{\text{ст}}}{T_0^*}\right)=\sqrt{\frac{2A(144+12A-5A^2)}{315}\left(\frac{T_{\text{ст}}}{T_0^*}\right)^{n-1}};\\&A=\left(\frac{T_{\text{ст}}}{T_0^*}-1\right)^{-1}\left[12\frac{T_{\text{ст}}}{T_0^*}-4\sqrt{\frac{T_{\text{ст}}}{T_0^*}\left(6\frac{T_{\text{ст}}}{T_0^*}+3\right)}\right].\end{aligned}\right\}\quad(12.4.13)$$

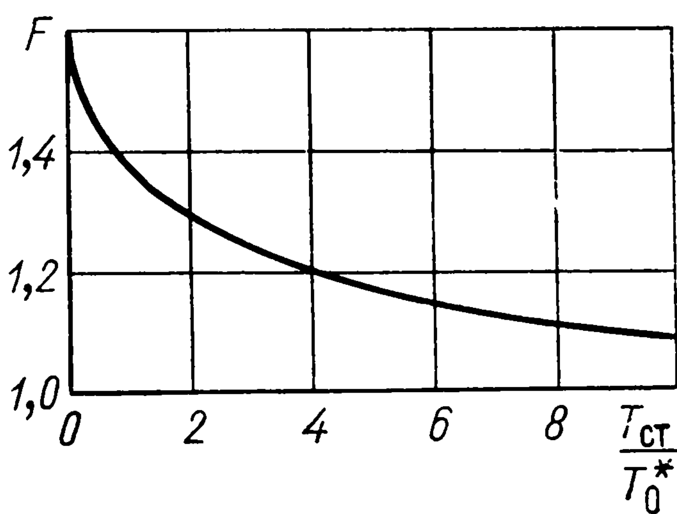


Рис. 12.3. Функция $F$ в формуле (12.4.12) при $n=0,7$

Для $n=0,7$ функция $F$ приведена на рис. 12.3 и может быть аппроксимирована формулой

$$F=1,36\left(\frac{T_{\text{ст}}}{T_0^*}\right)^{-0,11}.\qquad(12.4.14)$$

Соответственно для газа с $n=0,7$ при ламинарном пограничном слое на пластине с безградиентным обтеканием

$$\frac{c_f}{c_{f0}}=\left(\frac{T_{\text{ст}}}{T_0^*}\right)^{-0,11}\left(\frac{T_0^*}{T_0}\right)^{-0,15}.\qquad(12.4.15)$$

Здесь $c_{f0}$ — коэффициент трения для ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости при том же значении Re. Формуле (12.4.15) также можно придать вид

$$c_f/c_{f_0}=\psi^{-0,11}\,\psi^{*-0,04},\qquad(12.4.16)$$

где $\psi=T_{\text{ст}}/T_0$ — температурный фактор в его обычной форме; $\psi^*=T_0^*/T_0$ — величина, которая также может рассматриваться как особая форма температурного фактора, связанного с преобразованием кинетической энергии потока в теплоту. В обобщенной форме, пригодной для газа с $\text{Pr}\neq1$,

$$\psi^*=T_{\text{ст}}^*/T_0.\qquad(12.4.17)$$

Как уже говорилось ранее, эта величина может быть названа *третьим* или *кинетическим температурным фактором*. При сопоставлении коэффициентов трения по числу Re** в рассматриваемом случае

$$\Psi = (c_f/c_{f_0})_{\mathrm{Re}^{**}} = \psi^{-0,22}\,\psi^{*\,-0,08}. \tag{12.4.18}$$

## 12.5. ПРОФИЛЬ СКОРОСТЕЙ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА НЕПРОНИЦАЕМОЙ ПЛАСТИНЕ

Рассматривается распределение скоростей в плоском турбулентном пограничном слое быстротекущего газа в окрестности стенки. Полагая $\bar{\tau} \approx 1$, $\beta \approx 0$ и $l \sim y$, запишем

$$\tau_{c_1} \approx \rho_0 \frac{T_0}{T} \varkappa^2 y^2 \left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2. \tag{12.5.1}$$

Из соотношения (12.3.1) следует, что

$$T/T_0 = 1 + (\psi^* - 1)(1 - \omega^2) + \Delta\psi\,(1 - \omega), \tag{12.5.2}$$

где

$$\Delta\psi = \psi - \psi^* = (T_{\text{ст}} - T^*_{\text{ст}})T_0^{-1} \quad \text{и} \quad \omega = w_x/w_0.$$

Формула (12.5.2) соответствует формуле (9.14.22) при $\varepsilon = 1$. При $\Delta\psi = 0$ теплообмен отсутствует, т. е. имеет место адиабатическое обтекание поверхности. Подставляя значение $T/T_0$ из уравнения (12.5.2) в соотношение (12.5.1),

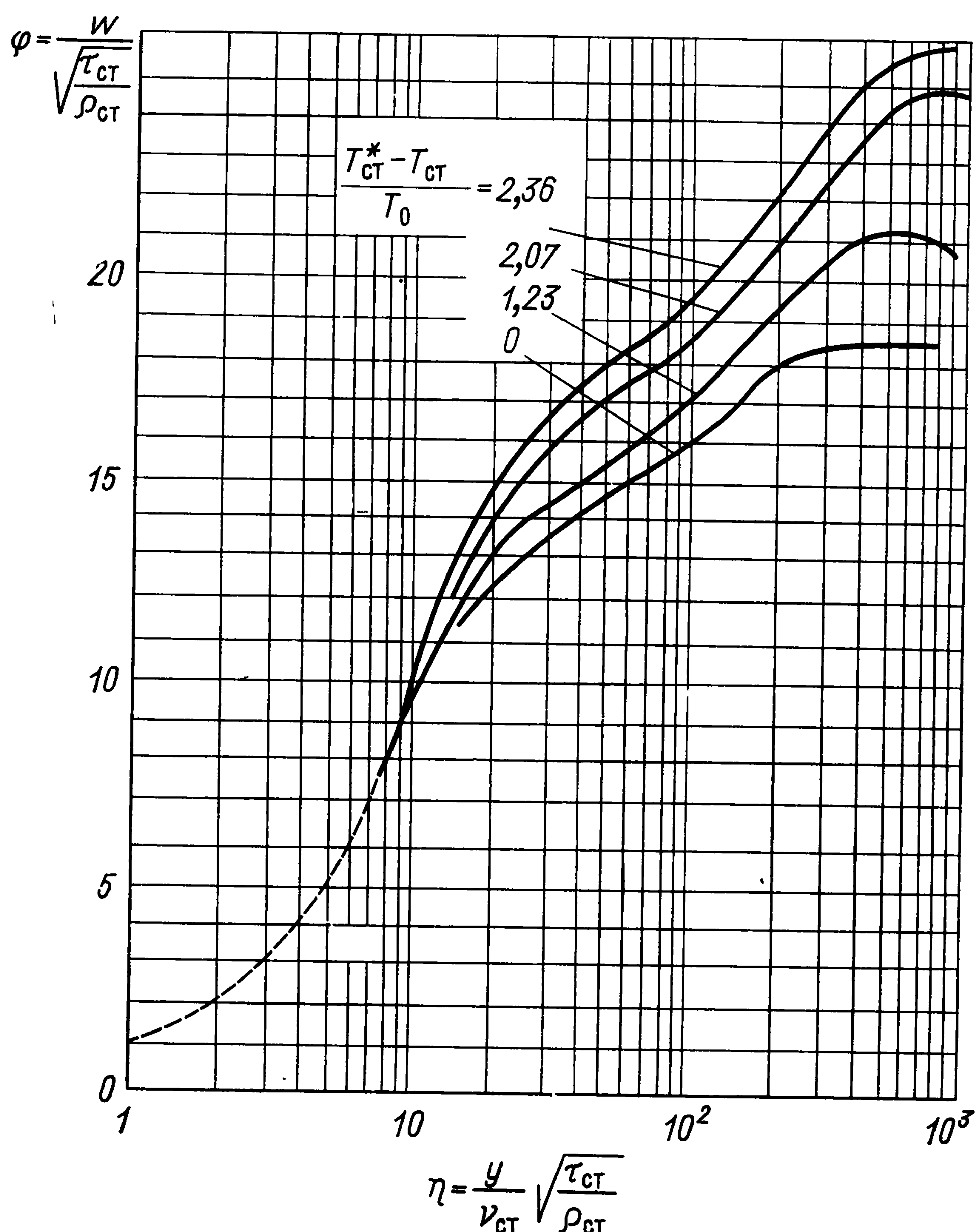



Рис. 12.4. Распределение скоростей в пограничном слое на пластине при сверхзвуковом течении газа ($M_0=5$)

находим следующее выражение для профиля скоростей в пристенной области турбулентного ядра пограничного слоя газа:

$$\omega = z_1 + z_2 \sin\left(z_3 + z_4 \ln \frac{y}{y_1}\right). \qquad (12.5.3)$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{-\Delta\psi}{2(\psi^* - 1)}; \\ z_2 &= \frac{\sqrt{4(\psi^* - 1)\psi + (\Delta\psi)^2}}{2(\psi^* - 1)}; \\ z_3 &= \arcsin \frac{2(\psi^* - 1)\omega_1 + \Delta\psi}{\sqrt{4(\psi^* - 1)\psi + (\Delta\psi)^2}}; \\ z_4 &= \frac{1}{\varkappa}\sqrt{(\psi^* - 1)c_f}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.5.4)$$

Функция $\omega_1 = \frac{w_1}{v^*}\sqrt{\frac{c_f}{2}} = \frac{w_1}{w_0}$, где $w_1$ — скорость течения на расчетной границе вязкого подслоя $y_1$.

Формула (12.5.3) может быть названа законом распределения скоростей по синусу логарифма расстояния от стенки. При $\psi = \psi^* = 1$ эта формула переходит в логарифмическую для изотермического турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. В вязком подслое

$$\tau_{ст} = \mu_0 [1 + (\psi^* - 1)(1 - \omega^2) + \Delta\psi(1 - \omega)]^n \frac{\partial w_x}{\partial y}, \qquad (12.5.5)$$

где $n$ — показатель степени в первой из формул (12.4.11). Интеграл этого уравнения дает зависимость, которая может быть сращена с зависимостью (12.5.3), если известна величина

$$\eta_1 = v^* y_1/\nu_1 = \eta_1(\psi;\ \psi^*;\ \mathrm{Re}^{**}), \qquad (12.5.6)$$

которая может быть оценена, например, из условия (9.13.16).

Как видно из рис. 12.4, профили скоростей имеют сложный характер и менее заполнены, чем в изотермическом потоке.

## 12.6. КОЭФФИЦИЕНТ ТРЕНИЯ И ТЕПЛООТДАЧИ ПЛАСТИНЫ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Подставляя в уравнение (9.14.3) значение $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0$ и определяя $\rho/\rho_0 = T/T_0$ по формуле (12.5.2), находим, что при

$$\Psi_s = \Psi = (\psi^* - 1)^{-1} z^{-2} \left[\arcsin \frac{2(\psi^* - 1) + \Delta\psi}{\sqrt{4(\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + (\Delta\psi)^2}} - \arcsin \frac{2(\psi^* - 1)\omega_1 + \Delta\psi}{\sqrt{4(\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + (\Delta\psi)^2}}\right]^2. \qquad (12.6.1)$$

При $\mathrm{Re} \to \infty$ $\omega_1 \to 0$, $z \to 1$ и

$$\Psi \to (\psi^* - 1)^{-1} \left[\arcsin \frac{2(\psi^* - 1) + \Delta\psi}{\sqrt{4(\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + (\Delta\psi)^2}} - \arcsin \frac{\Delta\psi}{\sqrt{4(\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + (\Delta\psi)^2}}\right]^2, \qquad (12.6.2)$$

или

$$\Psi \approx \left[\frac{2 \operatorname{arctg} M\sqrt{r(k-1)/2}}{\left(\sqrt{T_{ст}/T^*_{ст}} + 1\right) M\sqrt{r(k-1)/2}}\right]^2. \qquad (12.6.3)$$

В области конечных чисел Рейнольдса функции $\omega_1$ и $z$ в соответствии с уравнением (10.9.4) можно вычислить по формулам

$$\left.\begin{aligned} &z \approx 1-\omega_1;\\ &\omega_1 \approx 11{,}6\sqrt{c_{f_0}/2} \text{ при } \psi<1;\\ &\omega_1 \approx 11{,}6\sqrt{\Psi_\infty c_{f_0}/2} \text{ при } \psi>1. \end{aligned}\right\} \quad (12.6.4)$$

Здесь $\Psi_\infty$ определяется по формуле (12.6.3).

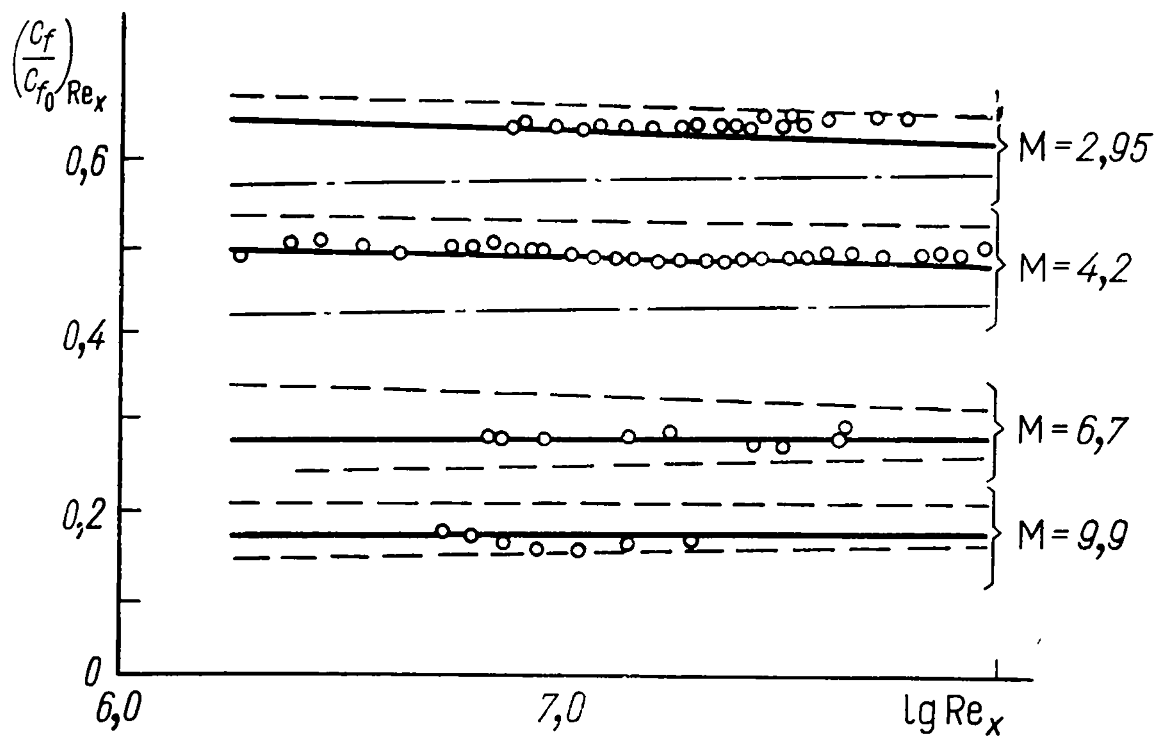



Рис 12.5. Сопоставление теоретических расчетов с опытными данными при больших числах М:
— ——расчет по формуле (12. 6. 3); — — —расчет по формуле (12. 6. 1) при $\Delta\psi=0$ и $\omega_1 = 11{,}6\sqrt{c_{f_0}/2}$; ———расчет по формуле (12. 6 1) при $\omega_1=11{,}6\sqrt{c_f\Psi_\infty/2}$; $z=1-\omega_1$; $\Delta\psi=0$

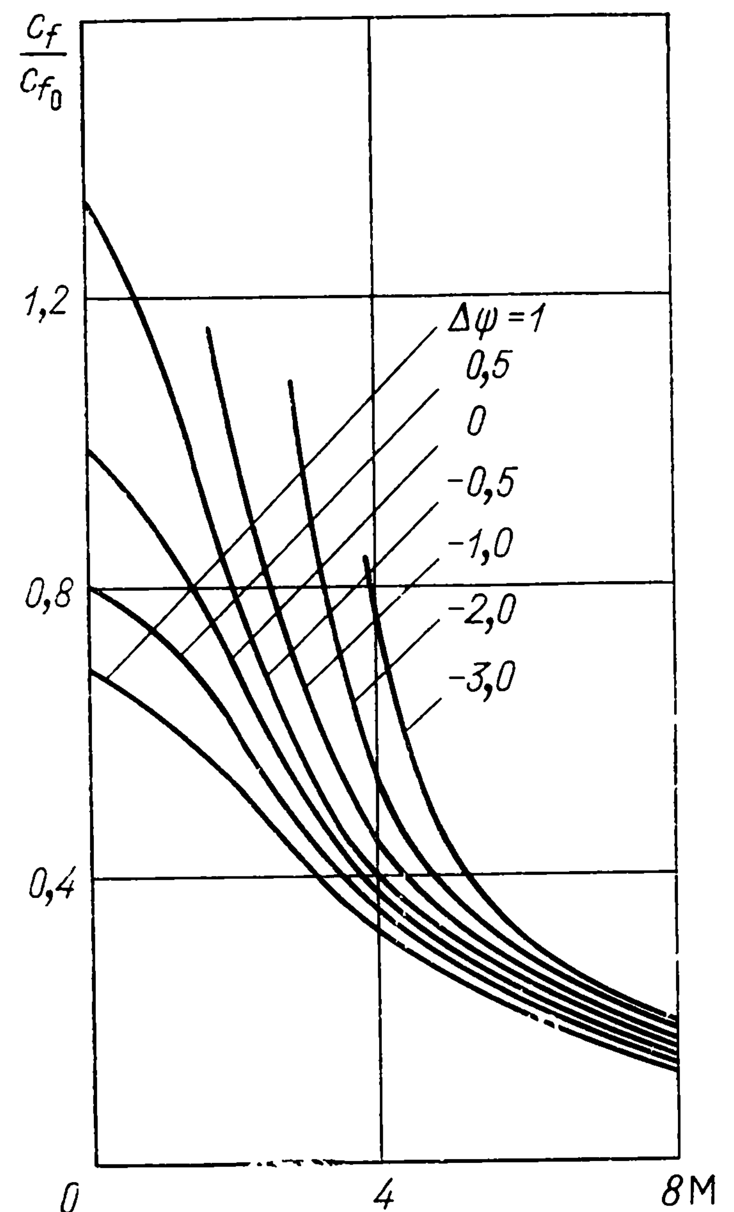



Рис 12.6. Зависимость $c_f/c_{f0}$ от М и $\Delta\psi$ при $r=0{,}9$, рассчитанная по формуле (12.6.2)

На рис. 12.5 дано сопоставление расчетов по этим формулам с опытами Маттинга, Чепмена и Нейхолма, охватывающих диапазон чисел $\mathrm{Re}_x$ до $10^8$ и чисел М до 10. На рис. 12.6 отчетливо видно, что в области $\Delta\psi<0$ трение повышается, а в области $\Delta\psi>0$ уменьшается.

## 12.7. ТРЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ДИССОЦИИРОВАННОГО ГАЗА

При $M>10$ температура торможения столь велика, что начинается диссоциация молекул газа. Когда температура относительно еще невелика, а скорости течения весьма значительны, характерное время рекомбинации молекул и атомов можно считать большим по сравнению с характерным временем турбулентной диффузии. Тогда при условии подобия массовых концентраций атомов и скоростей течения

$$\varepsilon=\varepsilon_{\text{ст}}+(\varepsilon_0-\varepsilon_{\text{ст}})\,\omega, \qquad (12.7.1)$$

где $\varepsilon$ — степень диссоциации. Пренебрегая энергией вибрации атомов и ограничиваясь рассмотрением двухатомных молекул, можем написать

$$\rho/\rho_0=(T_0/T)(1-\varepsilon_0)/(1-\varepsilon). \qquad (12.7.2)$$

Связь между скоростью и температурой для рассматриваемых условий имеет вид

$$\frac{T}{T_0}=\frac{7+3\varepsilon_{\text{ст}}}{7+3\varepsilon}+\left(\frac{7+3\varepsilon_0}{7+3\varepsilon}-\frac{7+3\varepsilon_{\text{ст}}}{7+3\varepsilon}\,\psi\right)\omega+\omega(1-\omega)\frac{1{,}4\,\mathrm{M}^2}{7+3\varepsilon}. \qquad (12.7.3)$$

Предельный закон трения имеет форму

$$\Psi \underset{\mathrm{Re}\to\infty}{\to} \left( \int_0^1 \sqrt{\frac{T_0}{T} \frac{1+\varepsilon_0}{1+\varepsilon}}\, d\omega \right)^2 . \quad (12.7.4)$$

Отсюда при квазиизотермическом течении газа получаем

$$\left( \frac{c_f}{c_{f,\,\varepsilon=0}} \right)_{\mathrm{Re}^{**},\, \mathrm{M},\, \psi} = \left( \frac{2}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}}+1} \right)^2 , \quad (12.7.5)$$

где $\tilde{\varepsilon} = (1+\varepsilon_0)/(1+\varepsilon_{\text{ст}})$. Численное решение уравнения (12.7.4) показывает, что отношение $c_f/c_{f,\,\varepsilon=0}$ при $\mathrm{M} = \mathrm{idem}$, $\psi = \mathrm{idem}$ и $\mathrm{Re}^{**} = \mathrm{idem}$ слабо зависит от этих параметров. Поэтому практически почти всегда можно пользоваться формулой (12.7.5).

Для двухатомных газов $0{,}5 < \tilde{\varepsilon} < 2$ и $0{,}75 < c_f/c_{f,\,\varepsilon=0} < 1{,}3$. Более сложные случаи теплообмена и трения при сверхзвуковых течениях рассматриваются в специальных монографиях.

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*


1. **Дородницын А. А.** Пограничный слой в сжимаемом газе.— «Прикл. матем. и механ.», 1942, № 6, с. 449.
2. **Жуковский В. С.** Измерение температуры газового потока при весьма больших скоростях.— «Журн. техн. физ.», 1938, т. 8, № 21, с. 1938.
3. **Зысина-Моложен Л. М.** Измерение температур в быстродвижущемся газовом потоке. Машгиз, 1950. (Тр. ЦКТИ, кн. 18).
4. **Калихман Л. Е.** Газодинамическая теория теплопередачи.— «Прикл. матем. и механ.», 1946, т. 10, вып. 4, с. 3.
5. **Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И.** Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М.— Л., «Энергия», 1972.
6. **Кутателадзе С. С.** Пристенная турбулентность. Новосибирск, «Наука», 1973.
7. **Основы** теплопередачи в авиационной и ракетной технике. Под общ. ред. В. К. Кошкина. М., Оборонгиз, 1960. Авт.: В. С. Авдуевский, Ю. И. Данилов, В. К. Кошкин и др.

*Глава* 13

# ТЕПЛООБМЕН И ТРЕНИЕ ПРИ ПЕРЕНОСЕ ВЕЩЕСТВА

## 13.1. МАССООБМЕН И ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

Во многих случаях переносы количества движения и тепла происходят одновременно с переносом массы вещества, обусловленным различием концентраций компонент системы в различных ее областях. Так, одним из эффективных способов ограждения тела от воздействия высокотемпературного газа является «пористое» охлаждение. В этом случае охлаждающая среда (газ, испаряемая жидкость) вводится в пограничный слой основного потока через пористую стенку и, диффундируя по направлению к ядру течения, существенно меняет интенсивность теплообмена.

Тепло- и массообмен неразрывно связаны друг с другом в процессах изменения агрегатного состояния теплоносителя при испарении жидкости в газ, конденсации из паро-газовой смеси, при интенсивной термодиффузии и в ряде других случаев. В этой главе рассматриваются некоторые общие свойства таких процессов и имеющие достаточно общее значение проблемы теории бинарного пограничного слоя на проницаемых поверхностях. В последующих главах эти проблемы рассматриваются применительно к ряду других явлений (кипящие слои, кипение и т. п.).

## 13.2. УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Диффузией называется самопроизвольный перенос вещества из области с большей его концентрацией в область с меньшей концентрацией. Аналогично теплообмену перенос вещества (массообмен) может осуществляться как за счет молекулярного движения, так и конвекцией. Одной из важных форм мóлярного переноса вещества является турбулентная диффузия в газах и жидкостях.

Так же, как и теплопроводность, диффузия описывается линейной связью между плотностью потока и градиентом потенциала. В газах эта аналогия переходит в почти полную тождественность механизмов переноса. Как известно из кинетической теории в газе,

$$\lambda \approx c_V \rho D, \tag{13.2.1}$$

где $D$ — коэффициент самодиффузии.

При совместном протекании нескольких процессов такого рода возникают некоторые эффекты, являющиеся результатом их взаимодействия. При взаимодействии диффузии и теплопроводности плотность потока вещества описывается уравнением

$$\mathbf{j} = -D_1 \operatorname{grad} C - D_2 \operatorname{grad} T, \tag{13.2.2}$$

т. е. перенос вещества происходит под воздействием как разности концентраций $C$, так и разности температур $T$. Это явление называется термодиффузией.

По Чепмену и Каулингу плотность одномерного потока массы при отсутствии конвекции и термодиффузии

$$j' = -D\rho\partial\tilde{\rho}'/\partial y. \tag{13.2.3}$$

Здесь $D$ — коэффициент диффузии, м²/с; $\rho$ — плотность смеси, кг/м³; $\tilde{\rho}' = \rho'/\rho$ — относительная плотность компоненты с индексом $'$. Наличие полей давления и других сил вызывает эффекты баро- и динодиффузии.

Во многих случаях, особенно в турбулентных потоках, этими эффектами можно пренебречь, и мы на них останавливаться не будем, отсылая читателей к специальной литературе. Поэтому, если ограничиться определением плот-

ности потока вещества по равенству (13.2.2), уравнение диффузии в плоском бинарном пограничном слое можно написать в форме

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(D\rho\,\frac{\partial\tilde{\rho}'}{\partial y}\right)=\rho w_x\,\frac{\partial\tilde{\rho}'}{\partial x}+\rho w_y\,\frac{\partial\tilde{\rho}'}{\partial y}\,. \qquad (13.2.4)$$

На рис. 13.1 показана схема тепловых потоков, возникающих в плоском бинарном пограничном слое. Возникает тепловой поток, связанный с потоком массы $j'$, и уравнение распространения тепла в плоском пограничном слое принимает вид (без учета термо-, баро- и динодиффузий)

$$\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2+w_x\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial q^*}{\partial y}=$$
$$=\rho w_x\,\frac{\partial i}{\partial x}+\rho w_y\,\frac{\partial i}{\partial y}\,, \qquad (13.2.5)$$

где

$$q^*=\lambda\partial T/\partial y+(c_{p_1}-c_{p_0})\,(T-T_0)\,j'. \qquad (13.2.6)$$

Рис. 13.1. Схема тепловых потоков к формуле (13.2.6)

Здесь (кроме принятых обозначений) $c_{p_1}$ — удельная теплоемкость среды, подаваемой в пограничный слой; $c_{p_0}$ — удельная теплоемкость основного потока; $j'$ — диффузионный поток рассматриваемой компоненты.

Производные энтальпии смеси и температуры связаны уравнением

$$\frac{\partial i}{\partial y}=c_p\,\frac{\partial T}{\partial y}+(c_{p_1}-c_{p_0})\,\frac{\partial\tilde{\rho}'}{\partial y}\,(T-T_0), \qquad (13.2.7)$$

где $c_p=c_{p_0}+(c_{p_1}-c_{p_0})\,\tilde{\rho}'$ — удельная теплоемкость смеси.

Отсюда можно написать, что

$$-q^*=\frac{\lambda}{c_p}\,\frac{\partial i}{\partial y}+(c_{p_1}-c_{p_0})\,(T-T_0)\,(1-\mathrm{Le}), \qquad (13.2.8)$$

где $\mathrm{Le}=a/D$ — число Льюиса. Уравнение движения пограничного слоя, написанное относительно параметров смеси, сохраняет нормальный вид.

Вдув или отсос газа или жидкости через пористую поверхность, испарение, конденсация или химическая реакция на обтекаемой поверхности приводят к тому, что на последней нормальная составляющая вектора скорости течения не равна нулю. Таким образом, при массообмене граничные условия на стенке, обтекаемой сплошной средой, имеют вид

$$\{y=0,\ w_y=w_{\text{ст}},\ w_x=0,\ w_z=0,\ T=T_{\text{ст}},\ \tilde{\rho}'=\tilde{\rho}'_{\text{ст}}\}. \qquad (13.2.9)$$

Следует различать полупроницаемую и полностью проницаемую стенки. В первом случае при бинарной смеси поток $j'_{\text{ст}}\neq 0$, а поток $j''_{\text{ст}}=0$. Во втором случае поверхность полностью проницаема для обеих компонент.

### 13.3. ТРОЙНАЯ АНАЛОГИЯ

Из уравнений (13.2.4) и (13.2.5) следует, что при $\mathrm{Pr}=\mathrm{Le}=1$ и $dp/dx=0$ уравнения движения, теплопроводности и диффузии становятся тождественными относительно параметров $w$, $T$ и $\tilde{\rho}'$.

Следовательно, если при этом имеет место также подобие граничных условий, то существует и подобие полей скоростей, температур и относительных концентраций. Это так называемая тройная аналогия, когда

$$\mathrm{St}_D=\mathrm{St}=c_f/2. \qquad (13.3.1)$$

Здесь $\mathrm{St}_D = \beta/w_0$, где $\beta$ — коэффициент массоотдачи, определяемый соотношением

$$\beta = j_{\text{ст}}/(\rho'_{\text{ст}} - \rho'_0). \tag{13.3.2}$$

Частные аналогии имеют вид (при $dp/dx = 0$ и подобии граничных условий)

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Pr} = \nu/a = 1, \quad \mathrm{St} = c_f/2; \\ \mathrm{Pr}_D = \nu/D = 1, \ \mathrm{St}_D = c_f/2; \\ \mathrm{Le} = a/D = 1, \ \mathrm{St}_D = \mathrm{St}. \end{aligned}\right\} \tag{13.3.3}$$

Для последнего случая коэффициенты тепло- и массоотдачи связаны формулой Льюиса:

$$\beta = \alpha/(c_p\,\rho). \tag{13.3.4}$$

## 13.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ТЕПЛОВОГО ПОТОКА В ПЛОСКОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПОЛУПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Уравнение движения плоского пограничного слоя в непосредственной окрестности твердой стенки имеет вид (поскольку в этой области $w_x \approx 0$)

$$-dp/dx + d\tau/dy \underset{y\to 0}{\to} \rho w_y\,\partial w_x/\partial y. \tag{13.4.1}$$

В общем случае механизм трения может быть и турбулентным. Вследствие этого интерполяционный профиль касательных напряжений целесообразно строить, не вводя в него непосредственно вязкость.

Возьмем частный интеграл от выражения (13.4.1) по оси $y$ так, чтобы верхний предел интегрирования был весьма мало удален от поверхности стенки. Тогда можно положить, что

$$\rho w_y \underset{y\to 0}{\to} \rho_{\text{ст}}\,w_{\text{ст}} = j_{\text{ст}} \tag{13.4.2}$$

и

$$\tau \underset{y\to 0}{\to} \tau_{\text{ст}} + \frac{dp}{dx}\,y + j_{\text{ст}}\,w_x. \tag{13.4.3}$$

Аппроксимируя профиль касательных напряжений кубической параболой так, чтобы в области $\xi \approx 0$ с точностью до малых второго порядка выполнялось условие (13.4.3), получим

$$\bar{\tau} = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 + (\Lambda\xi + b_1\,\omega)(1-\xi)^2, \tag{13.4.4}$$

или

$$\Psi\,\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_0} = \Psi + \frac{\Lambda_0\,\xi + b\omega}{1+2\xi}. \tag{13.4.5}$$

Здесь $b_1 = 2\tilde{j}_{\text{ст}}/c_f$ — фактор проницаемости стенки, построенный по истинному коэффициенту трения; $b = 2\tilde{j}_{\text{ст}}/c_{f_0}$ — фактор проницаемости стенки, построенный по эталонному коэффициенту трения ($\mathrm{Re}^{**} = \mathrm{idem}$; $dp/dx = 0$; $\tilde{j}_{\text{ст}} = 0$); $\tilde{j}_{\text{ст}} = j_{\text{ст}}/\rho_0 w_0$ — относительный поток массы через стенку.

При $\tilde{j}_{\text{ст}} = 0$ формула (13.4.4) переходит в формулу (9.6.4). Сопоставление расчета по формуле (13.4.4) с опытами Миклея в обработке Бартля и Лидона при $dp/dx = 0$ дает качественное хорошее совпадение (рис. 13.2).

Однако в количественном отношении аппроксимационная формула хорошо описывает результаты измерений в пристенной области проницаемой пластины и хуже в ядре пограничного слоя.

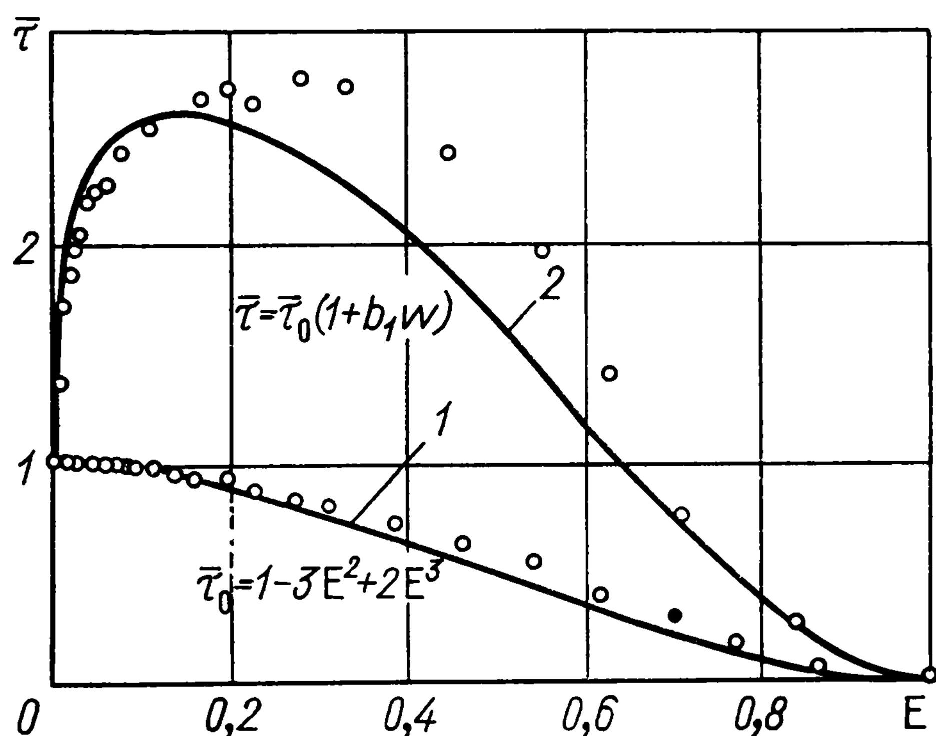



Рис. 13.2. Сопоставление результатов расчета по формуле (13.4.4) с опытными данными по распределению касательных напряжений по сечению турбулентного пограничного слоя для непроницаемой (*1*) и проницаемой (*2*) стенок ($j_{\text{ст}}=0{,}003$; $b=1{,}3$; $\psi=0{,}455$)

Уравнение распространения тепла в непосредственной окрестности стенки ($y \approx 0$, $w_x \approx 0$) можно записать в виде

$$\partial q/\partial y + j'(c_{p_0} - c_{p_1})\,\partial T/\partial y \approx c_{p,\,\text{ст}}\, j_{\text{ст}}\, \partial T/\partial y, \qquad (13.4.6)$$

где $j' = -D\rho\,(\partial\tilde{\rho}'/\partial y)_{\text{ст}}$. Интегрируя, находим, что в непосредственной окрестности стенки

$$q \approx q_{\text{ст}} - [j'(c_{p_0} - c_{p_1}) + c_{p,\,\text{ст}}\, j_{\text{ст}}]\,(T - T_{\text{ст}}). \qquad (13.4.7)$$

Далее, используя соотношения

$$c_{p,\,\text{ст}} = (c_{p_1} - c_{p_0})\,\tilde{\rho}'_{\text{ст}} + c_{p_0};\quad \rho'_{\text{ст}} w_{\text{ст}} = j_{\text{ст}} - j', \qquad (13.4.8)$$

можно привести выражение (13.4.7) к виду

$$q \approx q_{\text{ст}} + c_{p_1}\, j_{\text{ст}}\,(T - T_{\text{ст}}). \qquad (13.4.9)$$

С учетом этого граничного условия (остальные остаются теми же, что и рассмотренные в гл. 9) аппроксимация кубической параболой дает

$$\Psi_s\,\tilde{q}/\tilde{q}_0 = \Psi_s + b_T\,\vartheta/(1 + 2\xi_T), \qquad (13.4.10)$$

где $\vartheta$ — безразмерная температура (при $\psi^* \approx 1$ $\vartheta = (T - T_{\text{ст}})/(T_0 - T_{\text{ст}})$; $b_T = c_{p_1}\tilde{j}_{\text{ст}}/c_{p_0}\,\text{St}_0$ — тепловой фактор проницаемости стенки.

## 13.5. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЗАКОН ТРЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПОЛУПРОНИЦАЕМОЙ ПЛАСТИНЕ

Если при $\text{Re} \to \infty$ на полупроницаемой пластине показатель степени в степенной аппроксимации профиля скоростей $n \to 0$ (так же, как на пластине непроницаемой), то $z_\infty \to 1$, а сумма $1 + 2\xi$ в уравнении (13.4.5) по всему интервалу значений $\xi$, кроме точки $\xi = 1$, стремится к 1.

Принимая во внимание эти соображения и подставляя в выражение (9.14.12) распределение $\bar\tau$ из уравнения (13.4.5) при $\Lambda = 0$, находим, что

$$\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{(\rho_0/\rho)(\Psi + b\omega)}} \xrightarrow[\text{Re}\to\infty]{} 1. \qquad (13.5.1)$$

Аналогично течению с градиентом давления в рассматриваемом случае тоже возможна ситуация, при которой коэффициент трения обращается в нуль. Это явление связано с оттеснением основного пограничного слоя от твердой стенки при вдуве через нее поперечного потока вещества.

Полагая в выражении (13.5.1) $\Psi = 0$, получаем выражение для критического значения параметра вдува при $\text{Re} \to \infty$:

$$b_{\text{кр}} = \left(\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega\rho_0/\rho}}\right)^2. \qquad (13.5.2)$$

Замечательной особенностью этих уравнений является то, что для их решения не требуется знания распределения скоростей течения в пограничном слое. Достаточно знать только связь между относительной плотностью $\rho/\rho_0$ и безразмерной скоростью $\omega$, которую для газов легко установить через тройную аналогию.

## 13.6. ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПОЛУПРОНИЦАЕМОЙ ПЛАСТИНЕ

Простейшая постановка этой проблемы сводится к решению системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)=\rho w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+\rho w_y\frac{\partial w_x}{\partial y};\\
&\frac{\partial \rho w_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho w_y}{\partial y}=0;\\
&\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+D\rho\,(c_{p_1}-c_{p_0})\times\\
&\times\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial y}=\rho c_p w_x\frac{\partial T}{\partial x}+\rho c_p w_y\frac{\partial T}{\partial y};\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(D\rho\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial y}\right)=\rho w_x\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial x}+\rho w_y\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial y}
\end{aligned}\right\}\qquad(13.6.1)$$

при граничных условиях

$$\left.\begin{aligned}
&y=0,\ T=T_{\text{ст}},\ \tilde{\rho}'=\tilde{\rho}'_{\text{ст}},\ w_x=0,\\
&w_y=\frac{D\rho}{1-\tilde{\rho}'}\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial y};\\
&y\to\infty,\ T=T_0,\ \tilde{\rho}'=0,\ w_x=w_0.
\end{aligned}\right\}\qquad(13.6.2)$$

Изучение этой системы было выполнено в работах Бирона, Эккерта и др. Подробный обзор теоретических и экспериментальных данных, появившихся к 1959 г., был сделан Гроссом, Хартнеттом, Мессоном и Гейзли.

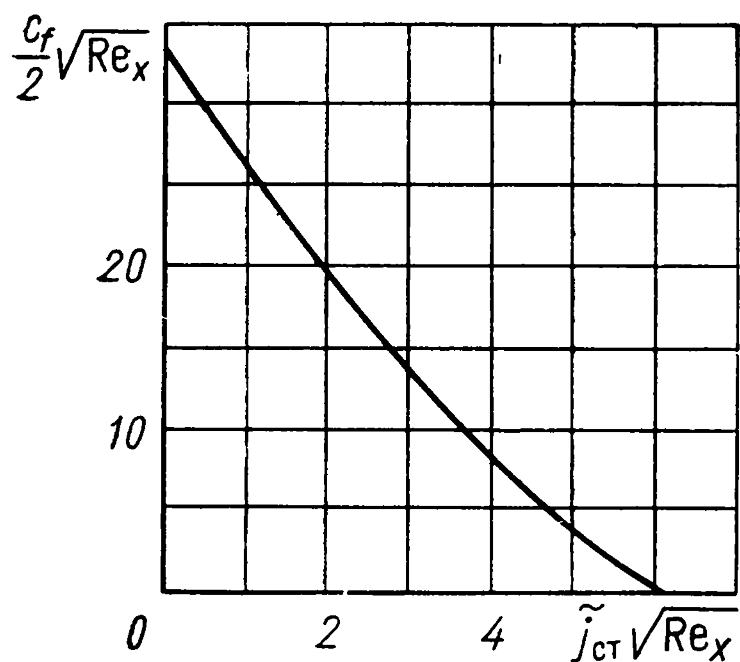



Рис. 13.3. Влияние воздушного вдува на локальное значение коэффициента трения плоской пластины при постоянных свойствах ламинарного потока

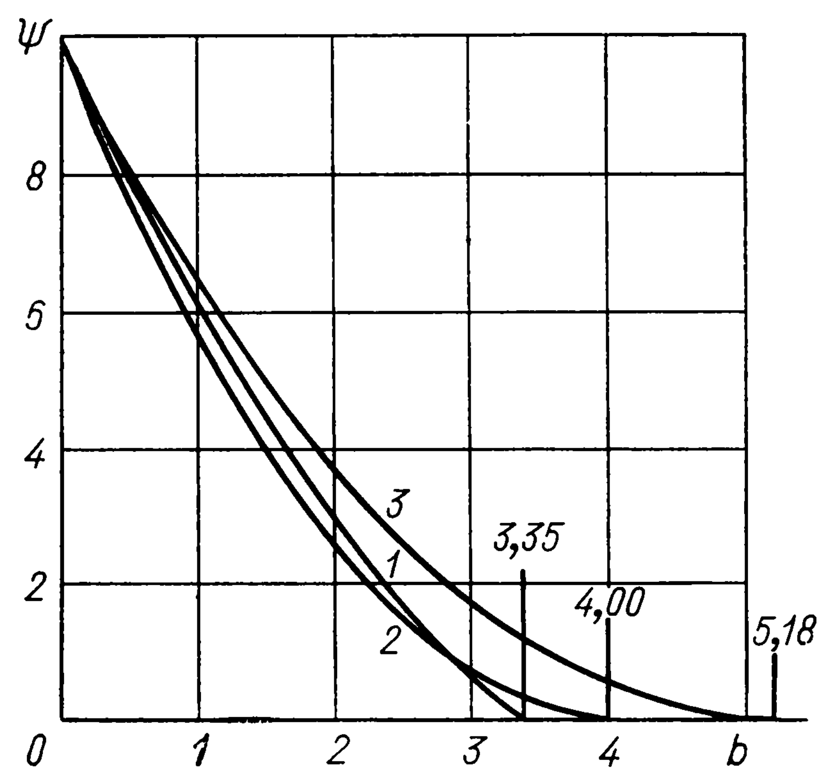



Рис. 13.4. Зависимость $\Psi(b)$ при $\rho=\rho_0$ и $dp/dx=0$:

1 — ламинарное течение; 2 — турбулентное течение при $\text{Re}\to\infty$; 3 — турбулентное течение при $\text{Re}^{**}=2000$

Результаты вычислений для пластины, обтекаемой однородным ламинарным пограничным слоем с постоянными физическими свойствами, показаны на рис. 13.3. На рис. 13.4 эти же результаты представлены в координатах $\Psi$ — $b$. Точка оттеснения пограничного слоя определяется значением $b_{\text{кр}}=3{,}35$. Кривую на рис. 13.3 можно аппроксимировать формулой

$$\Psi=(1-\tilde{b})^{4/3}.\qquad(13.6.3)$$

Здесь $\tilde{b}=b/b_{\text{кр}}$ — относительная величина фактора проницаемости стенки.

На рис. 13.5 и 13.6 приведены результаты численных решений системы (13.6.1) для бинарных ламинарных пограничных слоев.

Закон теплообмена в рассматриваемых условиях определяется обычным соотношением для ламинарного пограничного слоя на пластине: $St = Pr^{-2/3} \times c_f/2$. Эккерт, Хейдей и Минкевич несколько уточнили результаты, приведенные в обзоре Гросса и др. Однако предложенные ими расчетные формулы неудовлетворительны в области значений $\tilde{b} > 0,6$.

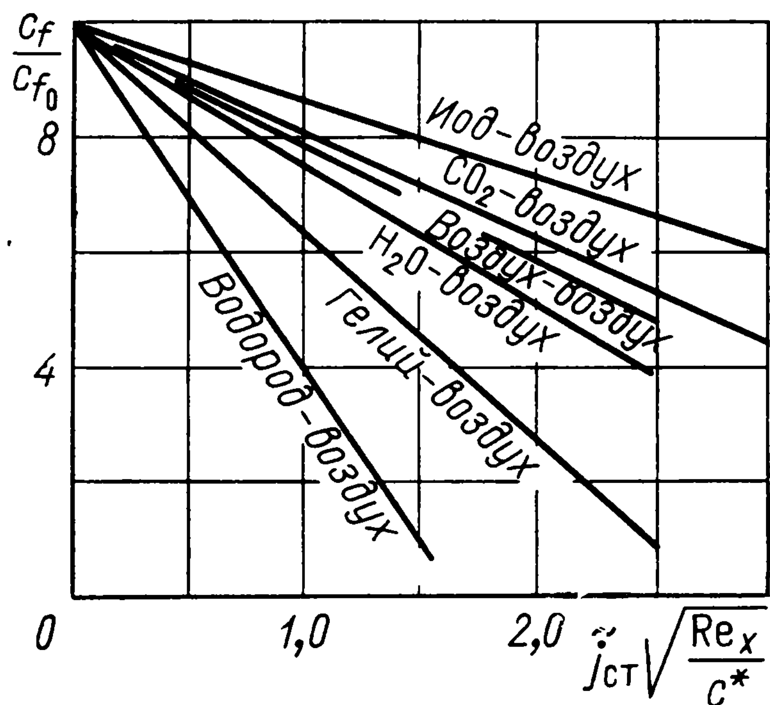



Рис. 13.5. Влияние массопереноса на значение коэффициента трения в ламинарном потоке на плоской пластине

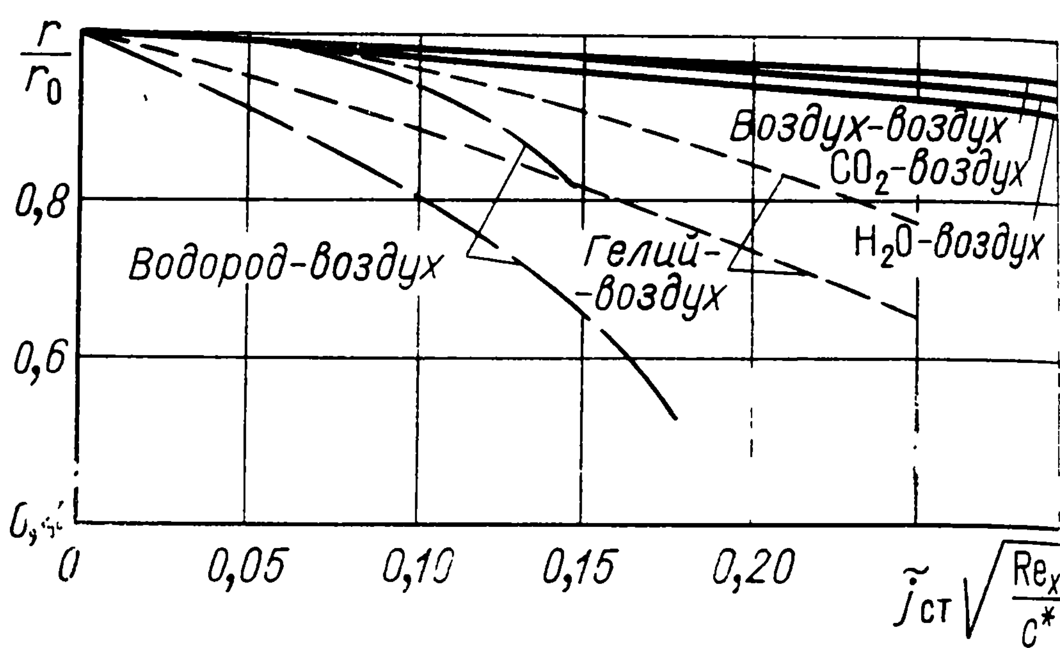



Рис. 13.6. Влияние массопереноса на значение коэффициента восстановления в ламинарном потоке на плоской пластине

Более целесообразно результаты численных решений уравнений ламинарного пограничного слоя на проницаемой пластине аппроксимировать формулой (13.6.3), полагая в ней

$$b_{кр} = 1,83 \sqrt[3]{\varepsilon} \sqrt{1 + 0,50(\psi - 1) + 0,22(\psi^* - 1)}, \qquad (13.6.4)$$

где $\varepsilon$ — отношение молекулярных масс газа основного потока и газа, подаваемого через стенку. Кроме того, в данном случае

$$c_f = c_{f_0} \Psi_T, \qquad (13.6.5)$$

где $\Psi_T$ — поправка на температурный фактор и сжимаемость.

## 13.7. ЭФФЕКТ ТЕРМОДИФФУЗИИ

В бинарном ламинарном пограничном слое в определенных условиях существенно проявляется термодиффузия. Особенно существен здесь эффект Дюфо, заключающийся в возникновении градиента температуры при адиа-

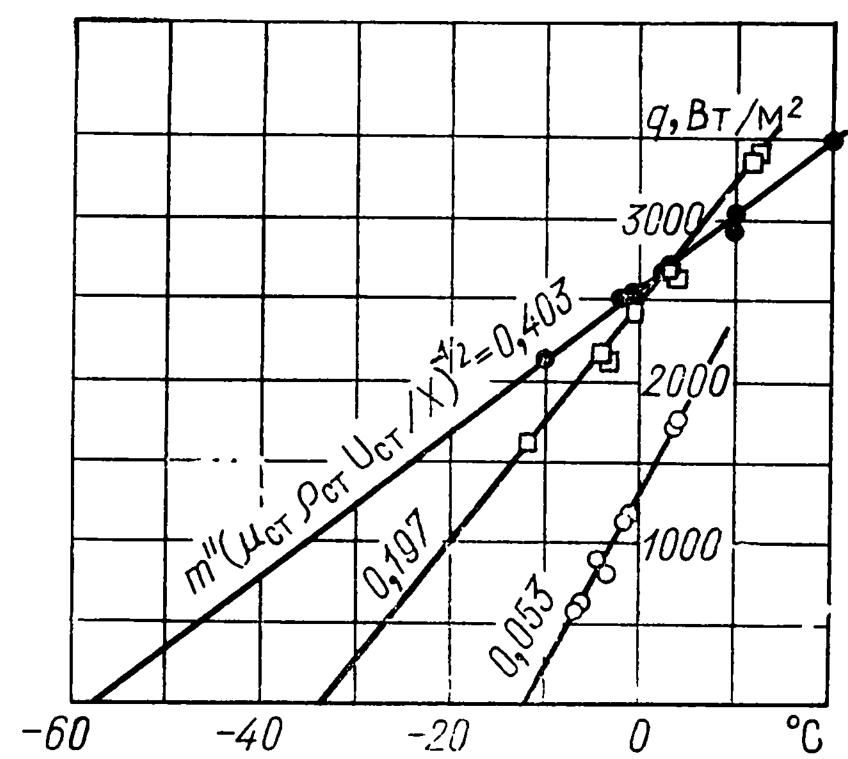



Рис. 13.7. Зависимость теплового потока от разности температур и параметра проницаемости стенки при обтекании лобовой точки пористого тела системой воздух—водород

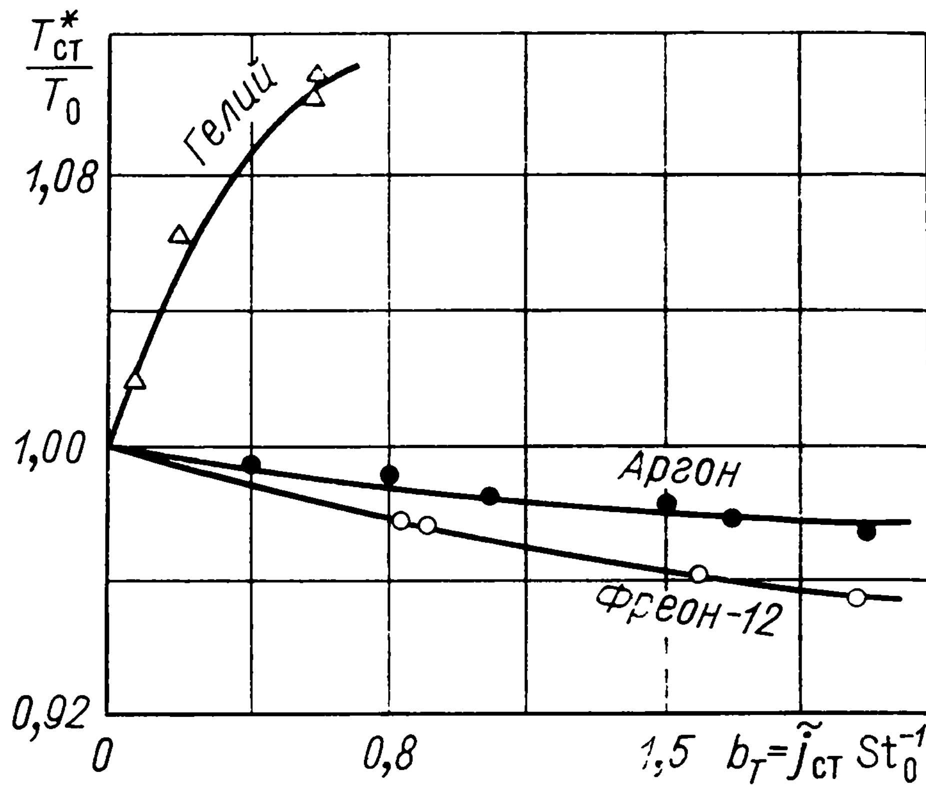



Рис. 13.8. Равновесная температура пористой адиабатической пластины при вдуве инородного газа в турбулентный пограничный слой воздуха

батической диффузии. В результате температура поверхности адиабатической пористой пластины может существенно отличаться от температуры вне пограничного слоя. Таким образом, здесь также целесообразно ввести понятие адиабатической температуры стенки, сохранив за этой величиной обычное ее обозначение, и определять тепловой поток, как обычно в таких случаях, по формуле

$$q = \alpha (T^*_{\text{ст}} - T_{\text{ст}}). \tag{13.7.1}$$

При этом коэффициент теплоотдачи $\alpha$ консервативен относительно эффекта термодиффузии (рис. 13.7).

В турбулентном пограничном слое этот эффект существенно меньше, что видно из данных П. А. Романенко и Ю. П. Семенова, показанных на рис. 13.8.

### 13.8. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ГАЗА НА ПОЛУПРОНИЦАЕМОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ $\mathrm{Re} \to \infty$

Ниже излагается решение, следующее из теории пограничного слоя с исчезающей вязкостью.

При обтекании пластины неограниченным потоком многоатомного газа $dp/dx = 0$, $\mathrm{Le} = \mathrm{Pr} = 1$ и имеет место тройная аналогия:

$$\frac{i^* - i_{\text{ст}}}{i^*_{\text{ст}} - i_{\text{ст}}} = \frac{\tilde{\rho}' - \tilde{\rho}'_{\text{ст}}}{\tilde{\rho}'_0 - \tilde{\rho}'_{\text{ст}}} = \omega. \tag{13.8.1}$$

Если в основном потоке концентрация вдуваемого газа равна нулю, то

$$\tilde{\rho}' / \tilde{\rho}'_{\text{ст}} = 1 - \omega. \tag{13.8.2}$$

Газовая постоянная смеси связана с плотностью известным соотношением, вытекающим из закона Клапейрона—Менделеева:

$$R/R_0 \approx \tilde{\rho}' (\tilde{R} - 1) + 1, \tag{13.8.3}$$

где $\tilde{R} = R_1/R_0$. В силу постоянства давления поперек пограничного слоя

$$\rho_0/\rho = RT/(R_0 T_0). \tag{13.8.4}$$

Далее будем рассматривать потоки, в которых $\tilde{\rho}'_0 = 0$. Тогда

$$\rho_0/\rho = (T/T_0) [1 + \tilde{\rho}'_{\text{ст}} (\tilde{R} - 1)(1 - \omega)]. \tag{13.8.5}$$

Из соотношения (13.8.1) следует, что

$$-\left(\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial y}\right)_{\text{ст}} = \frac{\tilde{\rho}'_{\text{ст}}}{w_0} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)_{\text{ст}} = \frac{c_f}{2} \tilde{\rho}'_{\text{ст}} \frac{\rho_0 w_0}{\mu_{\text{ст}}}, \tag{13.8.6}$$

т. е.

$$-\left(D\rho \frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial y}\right)_{\text{ст}} = \frac{c_f}{2 \mathrm{Pr}\, \mathrm{Le}} \tilde{\rho}'_{\text{ст}} \rho_0 w_0. \tag{13.8.7}$$

С другой стороны, можно написать, что

$$\tilde{j}_{\text{ст}} = -\frac{D\rho}{\rho_0 w_0} \left(\frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial y}\right)_{\text{ст}} + \frac{\rho'_{\text{ст}} w_{\text{ст}}}{\rho_0 w_0}. \tag{13.8.8}$$

Подставляя значение второго члена этого уравнения из уравнения (13.8.7) и принимая во внимание, что

$$\frac{\rho'_{\text{ст}} w_{\text{ст}}}{\rho_0 w_0} = \tilde{\rho}'_{\text{ст}} \tilde{j}_{\text{ст}},$$

получаем

$$\tilde{\rho}'_{\text{ст}} = b_1 (1/\mathrm{Le}\, \mathrm{Pr} + b_1)^{-1}. \tag{13.8.9}$$

Для многоатомных газов точно, а для других приближенно $Le = Pr = 1$ и

$$\tilde{\rho}'_{ст} = b_1/(1+b_1). \quad (13.8.10)$$

Таким образом, для рассматриваемых условий

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{T}{T_0}\left[1 + \frac{b_1}{1+b_1}(\tilde{R}-1)(1-\omega)\right]. \quad (13.8.11)$$

В свою очередь,

$$\frac{T}{T_0} = \frac{c_{p0}}{c_p}\left[\frac{i_{ст}}{i_0} - \left(\frac{i_{ст}}{i_0} - \psi^*\right)\omega - (\psi^*-1)\omega^2\right]; \quad (13.8.12)$$

$$\frac{c_p}{c_{p_0}} = 1 + \frac{b_1}{1+b_1}\left(\frac{c_{p_1}}{c_{p_0}} - 1\right)(1-\omega); \quad (13.8.13)$$

$$\frac{c_{p_1}}{c_{p_0}} = \tilde{R}\frac{k_1(k_0-1)}{k_0(k_1-1)}, \quad (13.8.14)$$

где $k$ — показатель адиабаты.

Из этих формул видно, что в ряде случаев при дозвуковых течениях

$$\rho_0/\rho = \psi_1 - (\psi_1 - 1)\omega, \quad (13.8.15)$$

где $\psi_1 = \rho_0/\rho_{ст}$ (табл. 13.1).

Таблица 13.1

**Расчетные формулы для определения параметра $\psi_1$ в некоторых системах**

| Тип слоя | Формула | Тип слоя | Формула |
|---|---|---|---|
| Дозвуковой пограничный | $\frac{\rho_0}{\rho_{ст}}$ | Неоднородный изотермический | $1 + \frac{b_1}{1+b_1}(\tilde{R}-1)$ |
| Однородный неизотермический | $\frac{T_{ст}}{T_0}$ | Неоднородный из смеси газов одинаковой атомности, неизотермический | $\frac{T_{ст}}{T_0}\left[1+\frac{b_1}{1+b_1}\times\right.$ $\left.\times(\tilde{R}-1)\right]$ |

Подставляя значение относительной плотности газа из последнего выражения в уравнение (13.8.12), получим следующие формулы:

$$\psi_1 < 1; \quad b_{кр} = \frac{1}{1-\psi_1}\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-\psi_1}}{1-\sqrt{1-\psi_1}}\right)^2; \quad (13.8.16)$$

$$\Psi = \frac{4}{b_1(1-\psi_1)}\left[\ln\frac{\sqrt{(1-\psi_1)(1+b_1)}+\sqrt{b_1}}{\sqrt{1-\psi_1}+\sqrt{b_1\psi_1}}\right]^2; \quad (13.8.17)$$

$$\psi_1 > 1; \quad b_{кр} = \frac{1}{\psi_1 - 1}\left(\arccos\frac{2-\psi_1}{\psi_1}\right)^2; \quad (13.8.18)$$

$$\Psi = \frac{4}{b_1(\psi_1-1)}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b_1}{(\psi_1-1)(1+b_1)}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b_1\psi_1}{\psi_1-1}}\right]^2. \quad (13.8.19)$$

Для однородного изотермического пограничного слоя $\rho = \rho_0$, и предельный закон трения на пластине имеет исключительно простой вид:

$$\Psi = (1 - b/4)^2; \quad (13.8.20)$$

$$b_{кр} = 4; \quad (13.8.21)$$

$$\tilde{j}_{ст,кр} = 2c_{f_0}. \quad (13.8.22)$$

Замечательно, что формулы (13.8.17) и (13.8.19) вполне удовлетворительно аппроксимируются выражением, сочетающим формулы (13.8.20) и (10.9.2), а именно:

$$\Psi \approx 4\left(\frac{1-\tilde{b}}{\sqrt{\psi_1}+1}\right)^2 . \qquad (13.8.23)$$

Закон теплообмена в рассмотренных случаях, в соответствии с наличием тройной аналогии, определяется первой строкой системы (13.3.3). При числах Прандтля, мало отличающихся от единицы, можно вводить обычную поправку типа $St = Pr^{-0,6}\, c_f/2$.

## 13.9. ПАРАМЕТРЫ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ТОЧКЕ ОТТЕСНЕНИЯ ОТ ПЛАСТИНЫ

В непосредственной окрестности стенки механизм трения молекулярный, и решение уравнения (13.4.1) при $dp/dx = 0$ имеет вид

$$\omega = \frac{\Psi}{b}\left(\exp\frac{j_{ст}\, y}{\mu} - 1\right). \qquad (13.9.1)$$

При $j_{ст} = 0$ из этой формулы следует обычное линейное распределение скоростей в вязком подслое. В точке оттеснения пограничного слоя

$$\Psi = 0, \quad j_{ст} = \rho_0 w_0 b_{кр} \sqrt{c_{f_0}/2}, \qquad (13.9.2)$$

причем значение $b_{кр}$ всегда конечно. При этих условиях из равенства (13.9.1) следует, что в точке оттеснения $\omega = 0$, т. е. вместо вязкого подслоя возникает область с заторможенным в продольном направлении течением. Это явление аналогично эффекту «острого дутья» в струевых процессах. Здесь, однако, не следует забывать, что эти рассуждения верны только в обычном приближении «двухслойной схемы» турбулентного пограничного слоя.

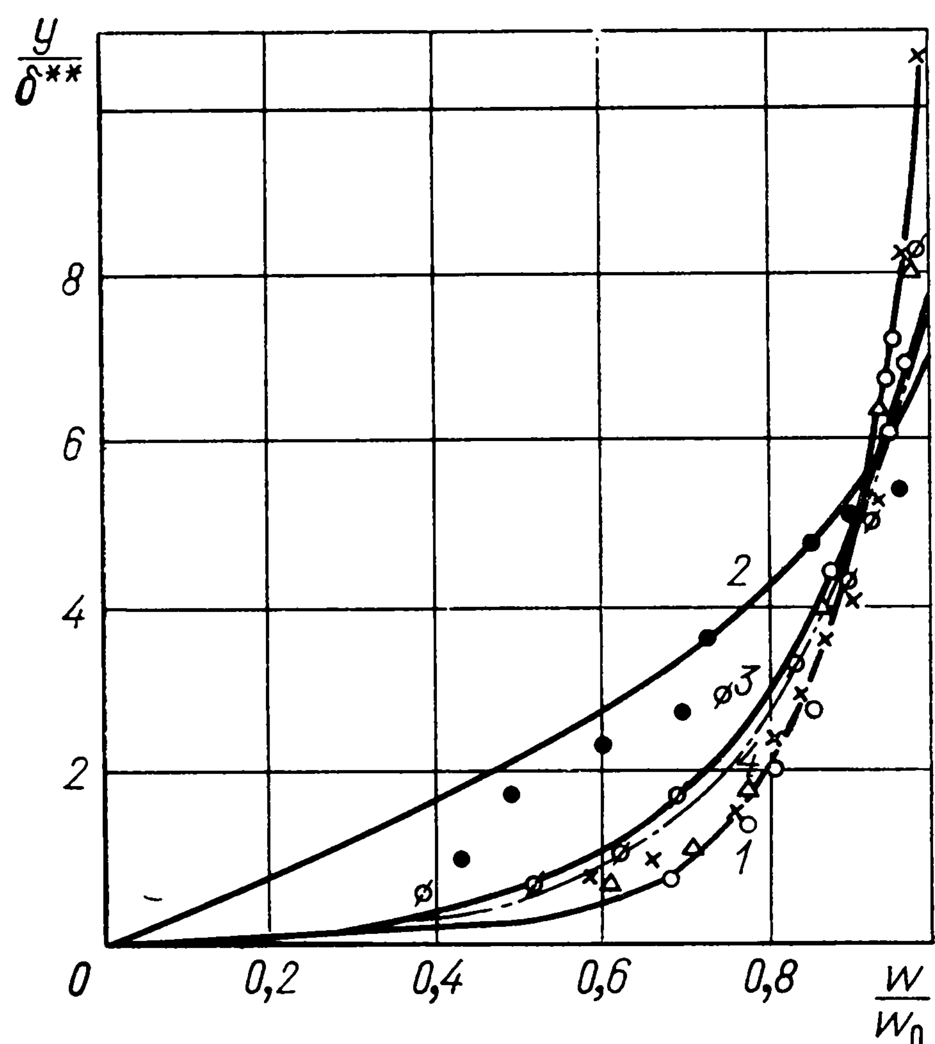



Рис. 13.9. Сопоставление профиля скоростей, рассчитанного по формуле (13.9.9), с результатами экспериментов Б. П. Миронова и П. П. Луговского:
○ — $Re_x = 4{,}2 \cdot 10^5$; △ — $Re_x = 5 \cdot 10^5$; × — $Re_x = 5{,}35 \cdot 10^5$; ● — $Re_x = 1{,}5 \cdot 10^5$; ⌀ — $Re^{**} = 1320$ (критический вдув); *1* — теоретическое распределение скоростей $w/w_0 = (y/\delta)^{1/7}$; *2* — $w/w_0 = 2y/\delta - 2(y/\delta)^3 + (y/\delta)^4$; *3,4* — $w/w_0 = \left[1 + 2{,}5\sqrt{c_{f_0}/2}\ln(y/\delta)\right]^2$ (*3* — $Re^{**} = 1300$; *4* — $Re^{**} = 2600$)

Рассмотрим теперь турбулентное ядро пограничного слоя, полагая функцию $\tilde{l}(\xi)$ консервативной и вычисляя ее из логарифмического профиля скоростей. Имеем

$$\tilde{l} = 0{,}4\xi\sqrt{\tilde{\tau}_0}. \qquad (13.9.3)$$

Эта зависимость неверна во внешней части пограничного слоя, но при интегрировании поперек слоя это обстоятельство не дает существенной погрешности. Вид же функции (13.9.3) очень удобен для дальнейших операций.

Как уже указывалось выше, при больших числах Re функция $\xi(\omega)$ близка во всех точках к нулю, кроме $\omega = 1$. Поэтому при $\Lambda = 0$, $\psi = 0$ и $Re \to \infty$ из уравнения (13.4.5) следует, что

$$\tau/(\rho_0 w_0^2) = \tilde{\tau}_0 \tilde{j}_{ст,\,кр}\,\omega. \qquad (13.9.4)$$

Выражая $\tau$ по формуле (9.6.4) и $\tilde{l}$ по формуле (13.9.3), после интегрирования получаем уравнение

$$\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega\rho_0/\rho}} = 2{,}5\sqrt{\tilde{j}_{ст,\,кр}}\,\ln\frac{\xi}{\xi_{1,\,кр}}. \qquad (13.9.5)$$

При $\xi = 1$ и $\omega = 1$

$$\xi_{1,\,кр} = \exp\left(-0{,}4\sqrt{\frac{b^*_{кр}}{b_{кр}}\,\frac{2}{c_{f_0}}}\right). \tag{13.9.6}$$

Соответственно

$$\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{\sqrt{\omega\rho_0/\rho}} = \sqrt{b^*_{кр}} = 2{,}5\sqrt{b_{кр}\,c_{f_0}/2}\,\ln\xi. \tag{13.9.7}$$

В этих формулах $b^*_{кр}$ — критическое значение фактора проницаемости стенки при $\mathrm{Re}\to\infty$, определяемое по формуле (13.5.2). Поскольку в точке оттеснения $\omega_1 = 0$, то

$$b^*_{кр} = z^2\,b_{кр}. \tag{13.9.8}$$

Полагая в первом приближении (поскольку в теории рассматриваются большие числа Рейнольдса) $z = 1$, находим, что при $\rho = \mathrm{const}$ в области $\xi_1 < \xi < 1$

$$\omega = \left(1 + 2{,}5\sqrt{c_{f_0}/2}\,\ln\xi\right)^2. \tag{13.9.9}$$

Сопоставление расчетных и экспериментальных значений профиля скоростей дано на рис. 13.9. В табл. 13.2 приведены значения параметров $H$ и $\widetilde{\delta}^{**}$ для случая безградиентного турбулентного пограничного слоя.

Таблица 13.2

**Значения параметров H и $\widetilde{\delta}^{**}$ на пластине при турбулентном пограничном слое**

| Re** | $2\cdot10^3$ | $1\cdot10^4$ | $1\cdot10^5$ | $1\cdot10^6$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $H$ при $b=0$ | 1,28 | 1,23 | 1,18 | 1,15 | 1 |
| $\widetilde{\delta}^{**}$ при $b=0$ | 0,0859 | 0,0756 | 0,0652 | 0,0569 | 0 |
| $H$ при $b=b^*_{кр}$ | 1,53 | 1,44 | 1,40 | 1,33 | 1 |
| $\widetilde{\delta}^{**}$ при $b=b_{кр}$ | 0,1274 | 0,117 | 0,105 | 0,095 | 0 |
| $H/H_0$ | 1,19 | 1,17 | 1,18 | 1,15 | 1 |
| $\widetilde{\delta}^{**}/\widetilde{\delta}^{**}_0$ | 1,49 | 1,55 | 1,605 | 1,668 | 1 |

## 13.10. ДВА ВАЖНЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ ДЛЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛАСТИНЕ

Интегральное соотношение импульсов на проницаемой поверхности имеет вид

$$d\delta^{**}/dx + f\,(2 + H) - \widetilde{j}_{ст} = c_f/2, \tag{13.10.1}$$

т. е. в нем появляется величина относительного потока массы через поверхность стенки.

При $dp/dx = 0$ и $f = 0$ уравнению импульсов можно придать форму

$$d\,\mathrm{Re}^{**}/d\,\mathrm{Re}_x = (\Psi + b)\,c_{f_0}/2. \tag{13.10.2}$$

Два канонических случая определяются условиями $b = \mathrm{const}$ и $\widetilde{j}_{ст} = \mathrm{const}$.

Далее будем полагать, что пограничный слой данного режима (ламинарный, или турбулентный) развивается так, что на передней кромке $x = 0$ и $\delta = 0$. Закон трения в заданном интервале чисел Re** аппроксимируется обычными степенными формулами:

$$\left.\begin{aligned} c_{f_0}/2 &= B\,\mathrm{Re}^{**-m};\\ c_{f_0}/2 &= B_1\,\mathrm{Re}_x^{-m_1}. \end{aligned}\right\} \tag{13.10.3}$$

Здесь

$$m_1 = m/(1+m) \text{ и } B_1 = B^{m_1/m}(1+m)^{-m_1}.$$

Кроме того, введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\Psi} &= (c_f/c_{f_0})_{\mathrm{Re}_x}; \\ \overset{*}{b} &= (2/c_{f_0})\tilde{j}_{\text{ст}}. \end{aligned}\right\} \tag{13.10.4}$$

Величина $\overset{*}{\Psi}$ представляет собой отношение действительного коэффициента трения при данном значении $\mathrm{Re}_x$ к коэффициенту трения на непроницаемой поверхности при том же $\mathrm{Re}_x$. Величина $\overset{*}{b}$ построена по значению коэффициента трения на непроницаемой пластине при данном значении $\mathrm{Re}_x$.

При $b = \text{const}$ и $T_{\text{ст}} = \text{const}$ $\Psi = \text{const}$, и интеграл уравнения (13.10.2) при условии $x = 0$, $\delta = 0$ имеет вид

$$\mathrm{Re}^{**} = [B(1+m)(\Psi + b)\mathrm{Re}_x]^{1/(1+m)}, \tag{13.10.5}$$

отсюда следует, что при $b = \text{const}$, $\delta_{x=0} = 0$, $T = \text{const}$

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\Psi} &= \Psi/(\Psi + b)^{m_1}; \\ \overset{*}{b} &= b\overset{*}{\Psi}/\Psi, \\ \overset{*}{b}_{\text{кр}} &= b_{\text{кр}}^{1-m_1}. \end{aligned}\right\} \tag{13.10.6}$$

При $b = b_{\text{кр}}$ $\overset{*}{\Psi} = \Psi = 0$, а при $b = -\Psi$ $\overset{*}{\Psi} = \infty$. При ламинарном пограничном слое $m_1 = 1/2$ и

$$\left.\begin{aligned} \Psi &= \overset{*}{\Psi}{}^2 + \overset{*}{b}\overset{*}{\Psi}; \\ b &= \overset{*}{b}(\overset{*}{\Psi} + \overset{*}{b}). \end{aligned}\right\} \tag{13.10.7}$$

Используя формулу (13.6.3), можем записать:

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\Psi} &= \frac{(1-\tilde{b})^{4/3}}{\sqrt{(1-\tilde{b})^{4/3} + b_{\text{кр}}\tilde{b}}}; \\ \overset{*}{b} &= \frac{\tilde{b}}{\sqrt{(1-\tilde{b})^{4/3} + b_{\text{кр}}\tilde{b}}}; \\ b_{\text{кр}} &= 3{,}35; \ \overset{*}{b}_{\text{кр}} = 1{,}83. \end{aligned}\right\} \tag{13.10.8}$$

При турбулентном пограничном слое в области закона распределения скоростей по степени $n = 1/7$ $m = 1/5$ и

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\Psi} &= \frac{(1-0{,}25b)^2}{(1+0{,}25b)^{0,4}}; \\ \overset{*}{b} &= \frac{b}{(1+0{,}25b)^{0,4}}; \\ b_{\text{кр}} &= 4; \ \overset{*}{b}_{\text{кр}} = 3{,}0, \end{aligned}\right\} \tag{13.10.9}$$

а рассматриваемое течение существует в области значений параметров вдува:

$$\left.\begin{aligned} -4 &< b < +4; \\ -\infty &< \overset{*}{b} < +3. \end{aligned}\right\} \tag{13.10.10}$$

При условиях $\tilde{j}_{ст} = \text{const}$, $T = \text{const}$, $\delta_{x=0} = 0$, $m = 1/4$ интеграл уравнения (13.10.2) имеет вид

$$\text{Re}_x = \frac{16}{3\tilde{j}_{ст}\beta^4(1+\beta\,\text{Re}^{**1/4})}[\beta^4\,\text{Re}^{**} - 2\beta^3\,\text{Re}^{*3/4} + $$
$$+ 6\beta^2\,\text{Re}^{**1/2} + 12\beta\,\text{Re}^{**1/4} - 12(1+\beta\,\text{Re}^{**1/4})\ln(1+\beta\,\text{Re}^{**1/4})]. \quad (13.10.11)$$

Здесь $\beta = \tilde{j}_{ст}/4B$.

Разлагая логарифм из этой формулы в ряд и ограничиваясь первыми пятью членами разложения, получаем

$$\text{Re}^{**} = \left[\frac{B}{4}(1+\beta\,\text{Re}^{**1/4})\,\text{Re}_x\right]^{4/5}. \quad (13.10.12)$$

Соответственно

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\Psi} &= \frac{(1-0,25b)^2}{(1+0,25b)^{0,2}}; \\ \overset{*}{b} &= \frac{b}{(1+0,25b)^{0,2}}; \\ b_{кр} &= 4;\ \overset{*}{b}_{кр} = 3,5. \end{aligned}\right\} \quad (13.10.13)$$

Область существования такого течения

$$\left.\begin{aligned} -4 < b < +4; \\ -\infty < \overset{*}{b} < +3,5. \end{aligned}\right\} \quad (13.10.14)$$

Из этих формул следует, что при $\overset{*}{b} \to -\infty$ $\overset{*}{\Psi} \to -\overset{*}{b}$, т. е.

$$\tau_{ст} \xrightarrow[\overset{*}{b} \to -\infty]{} -j_{ст}\,w_0. \quad (13.10.15)$$

Этот результат справедлив и для ламинарного пограничного слоя.

## 13.11. ЗАКОНЫ ТРЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ГАЗА ПРИ КОНЕЧНЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

В точке оттеснения пограничного слоя от проницаемой пластины при любом значении Re величина $\omega_1 = 0$ и

$$b_{кр} = \left(\frac{1}{z}\int_0^1 \sqrt{\frac{1+2\xi}{\omega\rho_0/\rho}}\,d\omega\right)^2. \quad (13.11.1)$$

В первом приближении $\xi(\omega)$ определится по уравнению (13.9.5) при $z = 1$. Тогда, принимая во внимание равенство (13.9.8), можно написать

$$b_{кр} \approx \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{1+2\xi}{\omega\rho_0/\rho}}\,d\omega\right)^4 \left(\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega\rho_0/\rho}}\right)^{-2}, \quad (13.11.2)$$

а величину $\Psi$ вычислять по формуле (13.8.20). Результаты соответствующих расчетов приведены в табл. 13.3 и 13.4.

Зависимости $\tilde{\Psi}(\tilde{b})$ для изотермического бинарного пограничного слоя газа и $b_{кр}(\psi\tilde{R})$ для бинарного пограничного слоя газа показаны на рис. 13.10 и 13.11.

На рис. 13.12 показано сопоставление теории с рядом опытов для однородного пограничного слоя, а на рис. 13.13 — для неоднородных пограничных слоев.

Таблица 13.3

**Значения $b_{кр}$ для однородного дозвукового пограничного слоя газа на пластине**

| φ | Re** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2·10³ | 1·10⁴ | 1·10⁶ | ∞ |
| 0,25 | 11,6 | 11,0 | 10,0 | 9,25 |
| 0,50 | 7,96 | 7,54 | 6,87 | 6,21 |
| 1 | 5,18 | 4,92 | 4,48 | 4,00 |
| 2 | 3,23 | 3,06 | 2,79 | 2,47 |
| 4 | 1,92 | 1,83 | 1,67 | 1,46 |

Таблица 13.4

**Значения $b_{кр}$ и $b_{T,\,кр}$ при наличии подобия полей скоростей и концентраций (изотермический пограничный слой, Re→∞, величины $^*b_{кр}$ и $^*b_{T,\,кр}$ для условий $b = \text{const}$ и $m = 0{,}25$)**

| Система | $b_{кр}$ | $b_{T,\,кр}$ | $\overset{*}{b}_{кр}$ | $\overset{*}{b}_{T,\,кр}$ |
|---|---|---|---|---|
| Воздух—воздух | 4,00 | 4,00 | 3,02 | 3,02 |
| Гелий—воздух | 0,89 | 4,60 | 0,91 | 3,36 |
| Водород—воздух | 0,52 | 7,30 | 0,59 | 4,90 |

При положительном продольном градиенте давления и постоянной плотности из уравнений (9.14.12) и (13.4.4) методом последовательных приближений можно получить следующую зависимость для критического значения параметра вдува:

$$b_{кр,\,\lambda}/b_{кр,\,\lambda=0} = (1 - \lambda_0/\lambda_{0,\,кр})^{3/2}, \qquad (13.11.3)$$

где $b_{кр,\,\lambda=0}$ определяется по формуле (13.11.2); $\lambda_0 = -(\delta/\delta^{**}f)2/c_{f_0}$; $\lambda_{0,\,кр} = -(\delta/\delta^{**}f)_{кр}\,2/c_{f_0}$, $(\delta f/\delta^{**})_{кр}$ определяется по формуле (10.10.6).

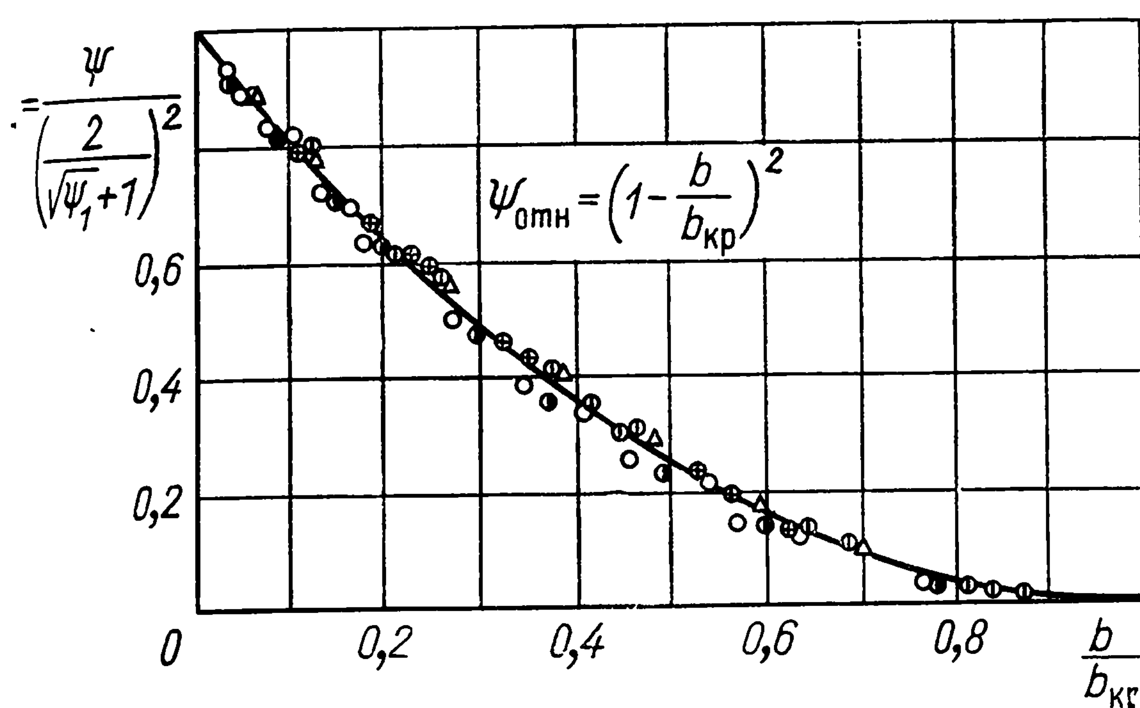



Рис. 13.10. Сопоставление расчетов по формулам (13.8.17) и (13.8.19) при определении $b_{кр}$ по формулам (13.8.16) и (13.8.18) с расчетами по формуле (13.8.23)

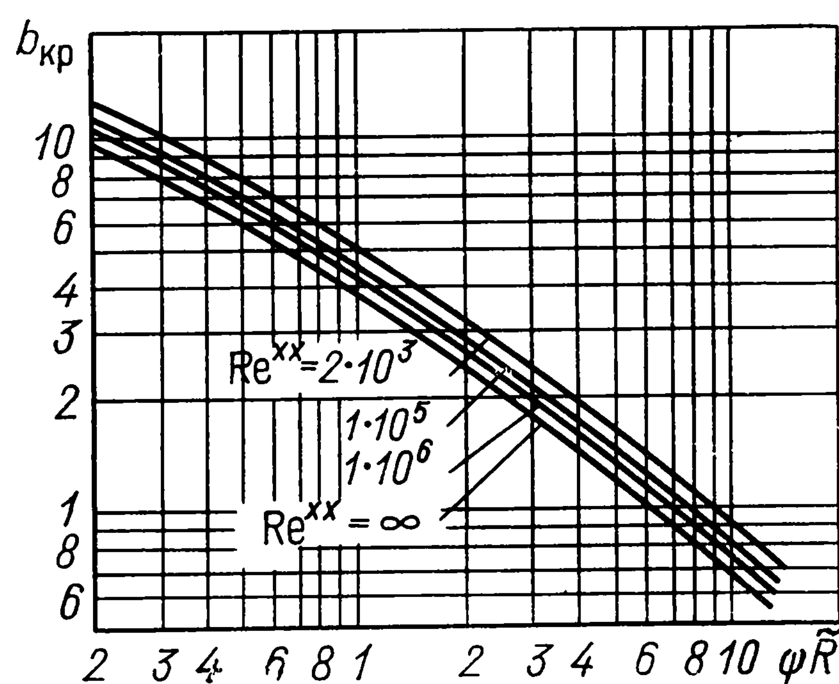



Рис. 13.11. Влияние теплообмена и неоднородности вдуваемого газа на критический параметр проницаемости

Формулой (13.11.3) можно пользоваться и для расчетов неизотермических течений, определяя величину $b_{кр,\,\lambda=0;\,\psi}$ по формулам (13.8.16), (13.8.18) и полагая

$$\lambda_{0,\,кр;\,\psi} = \lambda_{0,\,кр}\left[2/(\sqrt{\psi}+1)\right]^2. \qquad (13.11.4)$$

На рис. 13.14 кроме карты режимов течения в турбулентном пограничном слое со вдувом при продольном градиенте давления приведены вспомогательные рисунки, дающие представление о типичном изменении различных характеристик пристенного потока. Кривая $A$ на рис. 13.14 указывает границу наступления оттеснения пограничного слоя (критических параметров вдува) при изотермическом течении и однородном вдуве. С ростом диффузорности параметр $b_{кр}$ уменьшается. На рис. 13.15 показано соответствие зависимости (13.11.3) с опытами Б. П. Миронова и П. П. Луговского, проведенными индикаторным методом для $\lambda_0 \geqslant 0$.

При наличии неизотермичности, сжимаемости, неоднородности вдува кривая $A$ смещается вверх или вниз в соответствии с формулами (13.8.16), (13.8.18),

(13.11.3), (13.11.4), что изображено на рис. 13.14, *а*. С ростом конфузорности $b_{кр}$ увеличивается.

Для значений $\lambda_0 < \lambda_{0,кр}$ и параметров вдува $b < b_{кр}(\lambda_0)$, соответствующих области, лежащей ниже кривой *А*, имеем $c_f > 0$, $St > 0$, $\overline{\rho}_{ст} < 100\%$ в соответствии с формулами (13.8.22), (13.11.2). С ростом вдува в этой области

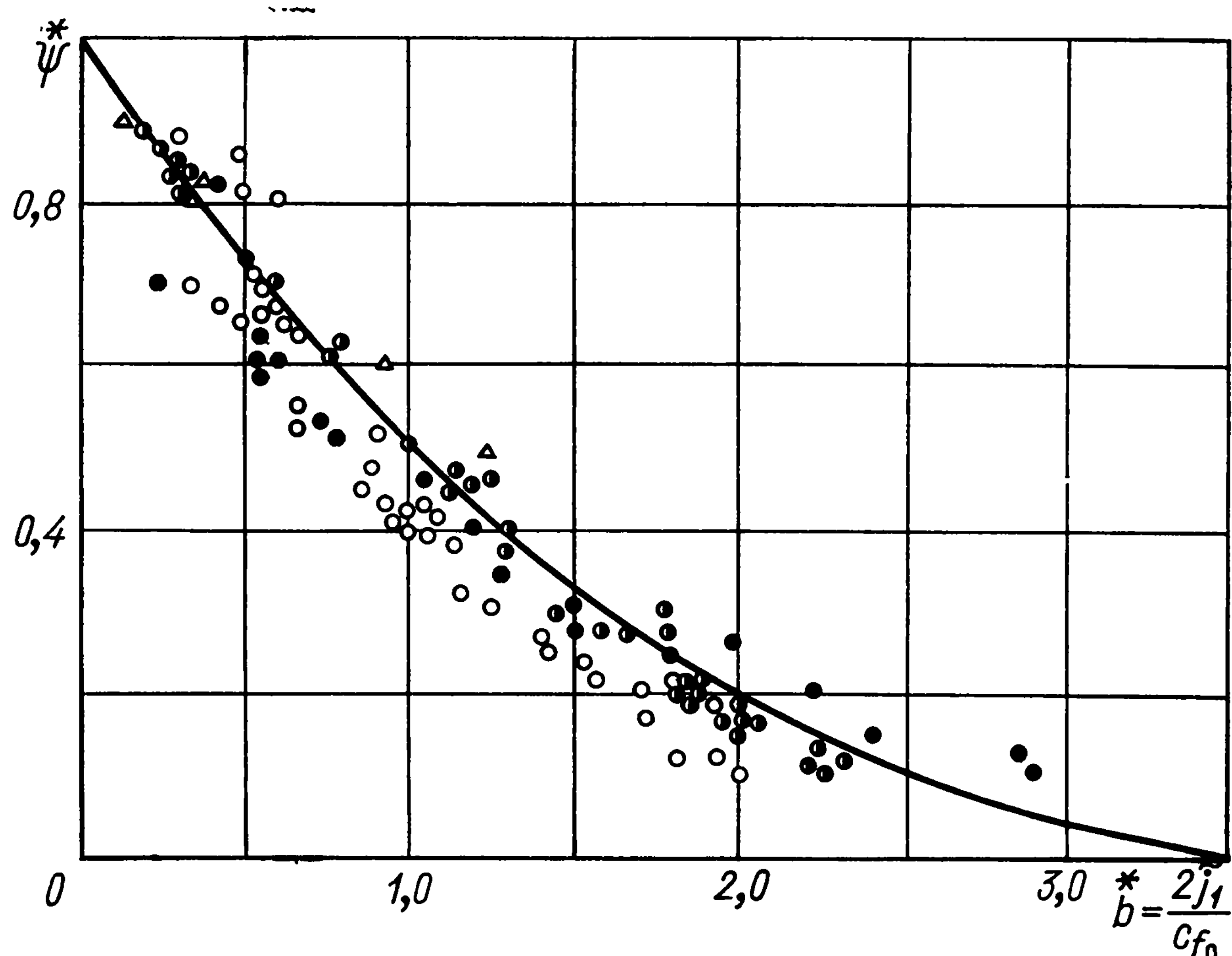



Рис. 13.12. Сопоставление расчетов по формуле (13.8.23) при $b_{кр}$ для $Re^{**}=1\cdot10^4$ с опытами Миклея и Паппаса и Окуно:
● — опыты Миклея в обработке Лидона; △ — опыты Паппаса и Окуно; ○ — опыты Хаккера; ◑ — опыты П. А. Романенко и В.Н. Харченко

существенно возрастают продольные и поперечные пульсации скорости, однако возвратно-вихревых течений не наблюдается. Профили скорости становятся менее заполненными. При этом в зоне оттеснения (на границе *А*) профили скорости в условиях различных комбинаций вдува и продольного градиента дав-

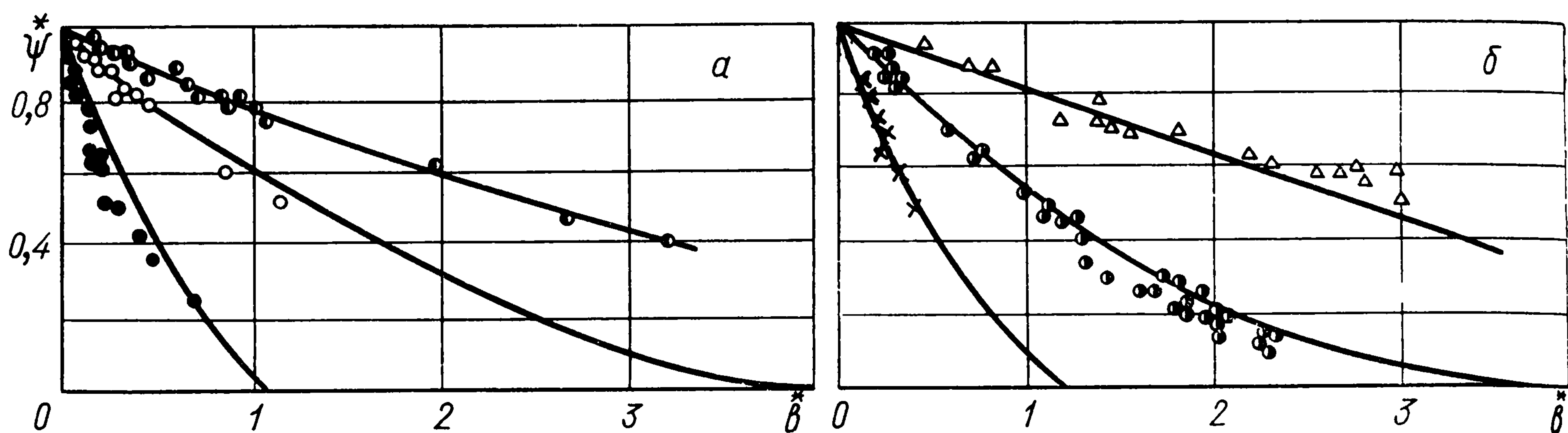



Рис. 13.13. Сопоставление теоретического расчета с опытными данными Паппаса и Окуно (*а*) и П. А. Романенко и В. Н. Харченко (*б*) при вдуве инородных газов:
● — гелий — воздух ($M=0,3$; 0,7; $m=0,153$); ○ — воздух — воздух; ◐ — фреон-12 — воздух; × — гелий — воздух; ◑ — воздух — воздух; △ — фреон-12 — воздух; ——— — расчет по формуле (13.8.22) при определении $b_{кр}$ для $Re^{**}=10^4$, $m=0,25$

ления становятся практически одинаковыми, за исключением зоны, близкой к критическому значению $\lambda_0$. Формпараметр для отрывного профиля при отсутствии вдува и для профиля в зоне оттеснения при отсутствии градиента давления имеет довольно близкие значения (соответственно 1,86 и 1,57).

При переходе через границу *А* в область сверхкритических вдувов ($b > b_{кр}$) возникают особенности в пристенном течении, которые удобно проследить при изменении значений параметра $\lambda_0$ в сторону его уменьшения от критического значения. При $\lambda_0 = \lambda_{0,кр}$ и $b = 0$ вблизи стенки возникают возвратно-вихревые течения, которые непосредственно омывают стенку (см. рис. 13.14, *м*).

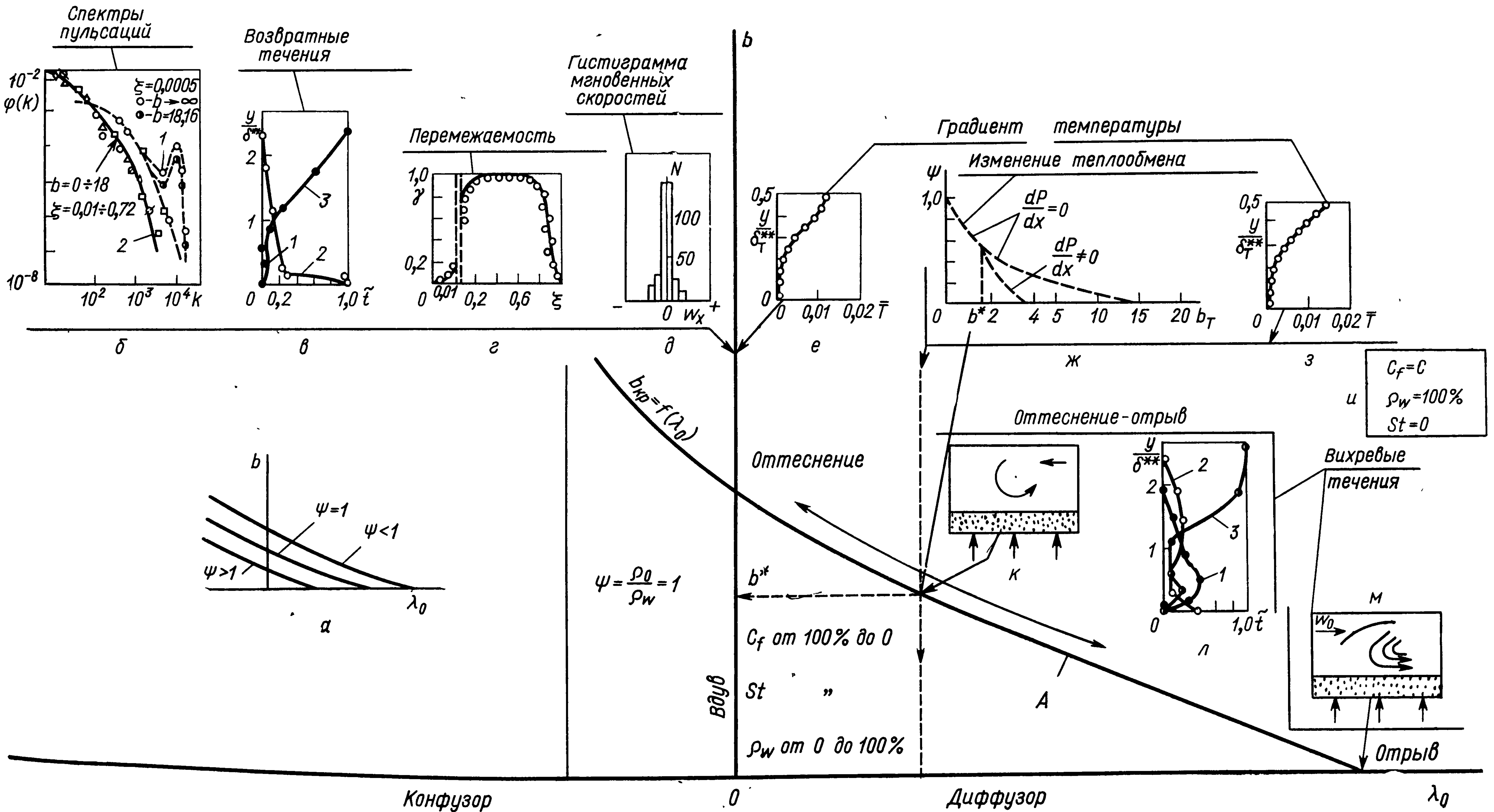



Рис. 13.14. Карта режимов течения в турбулентном слое со вдувом и продольным градиентом давления

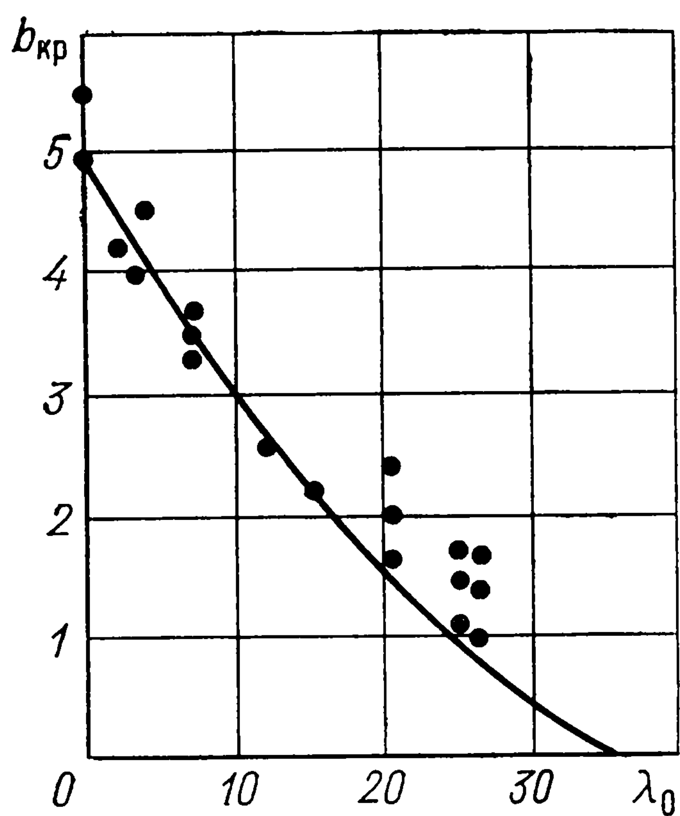



Рис. 13.15. Изменение критического параметра вдува при положительном градиенте давления — зависимость (13.11.13) (● — опыты проведены индикаторным методом)

Одной из характеристик наступления отрыва пограничного слоя при $\lambda_0 = \lambda_{0,\text{кр}}$ является равенство нулю осредненного во времени локального коэффициента трения. Наличие вихрей свидетельствует о возникновении следующей стадии развития пристенного течения в условиях диффузорности, когда воздействие потока на поверхность за счет трения направлено в противоположную сторону по сравнению со скоростью на внешней границе пограничного слоя («отрицательное» значение $c_f$).

Для режимов при $0 < \lambda_0 < \lambda_{0,\text{кр}}$ и $b > b_{\text{кр}}(\lambda_0)$, располагающихся над кривой $A$, также является характерным возникновение возвратно-вихревых течений, которые свидетельствуют о переходе величины $c_f$ через нулевое значение (см. рис. 13.14, *к*, *л*). На графике рис. 13.14, *л* (и подробнее на рис. 13.16) кривые *1*, *2*, *3* соответственно означают долю времени $\tilde{t}$ из общего времени наблюдения, в течение которого на относительной ординате регистрировались возвратное, восходящее и поступательное течения. Граница $A$, определяемая в опытах по возникновению вихревых течений, выражена довольно резко: при $b = 0{,}75 b_{\text{кр}}(\lambda_0)$ вихри еще не наблюдаются, при $b = 1{,}1 b_{\text{кр}}(\lambda_0)$ вихри уже хорошо развиты. Вследствие вдува эти вихри находятся на некотором расстоянии от стенки, непосредственно над которой возникает слой оттеснения.

Гидродинамические особенности этого слоя оттеснения удобнее проследить при режимах с $\lambda_0 = 0$. При увеличении вдува,

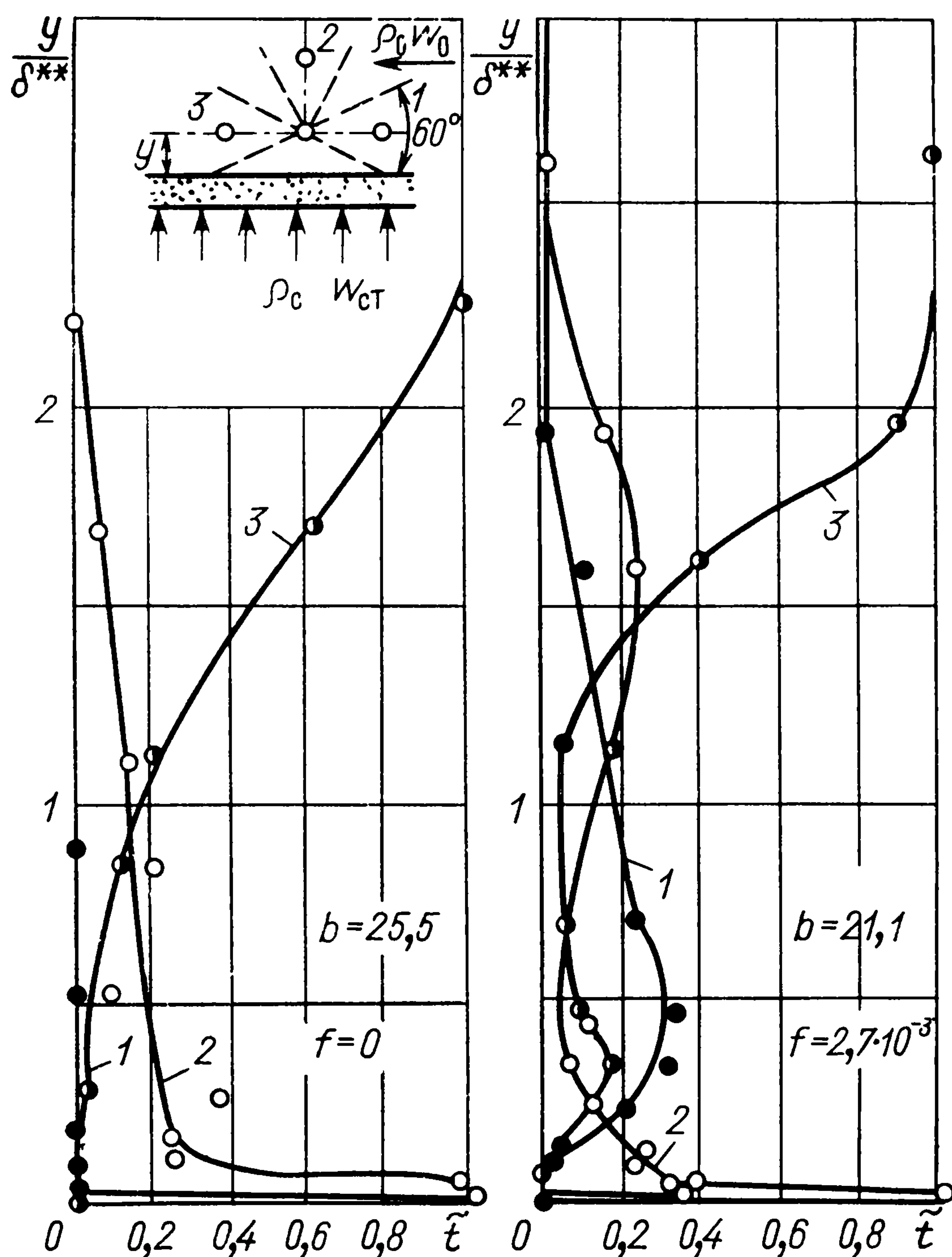



Рис. 13.16. Распределение вероятности направления течения вблизи стенки для разных значений $b$ и $f$:

*1* — возвратные потоки; *2* — потоки по нормали к стенке; *3* — в направлении главного течения

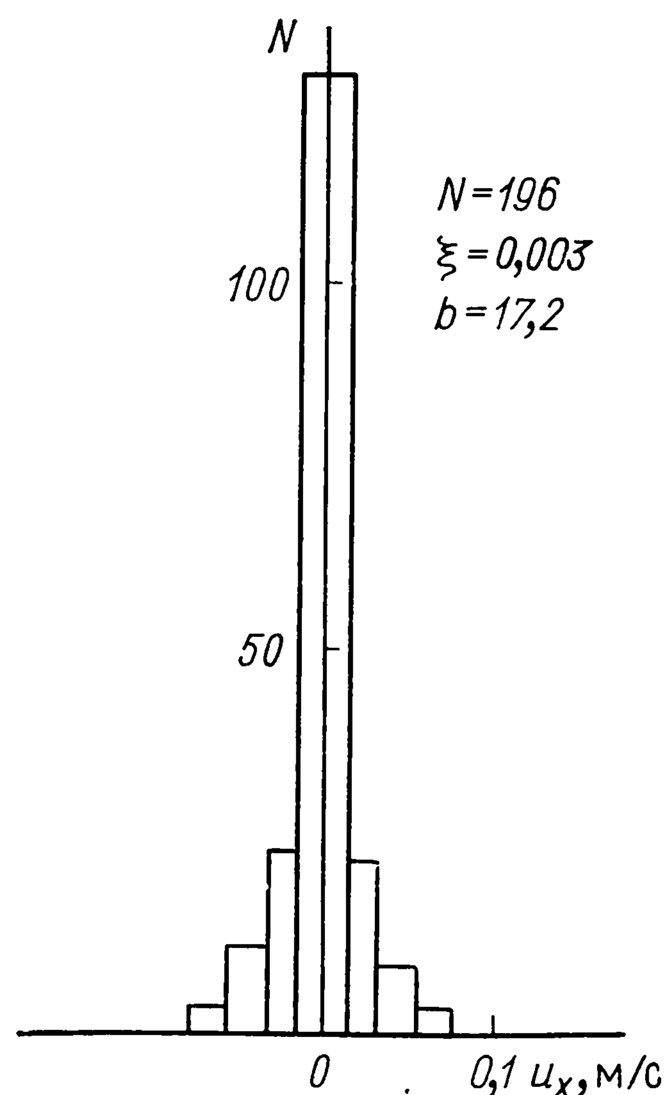



Рис. 13.17. Гистограмма распределения мгновенных значений продольной скорости в пристенной области пограничного слоя

как уже отмечалось, существенно возрастает максимум пульсаций скорости в пристенной зоне и существенно уменьшается значение средней скорости $\bar{u}$. Вследствие этого непосредственно в окрестности стенки могут возникать отрицательные значения мгновенной скорости $u = \bar{u} + u'$.

При параметре вдува $b \approx 17$ на относительном расстоянии от стенки $\xi = 0{,}003$ гистограмма мгновенных скоростей становится симметричной относительно положительных и отрицательных значений скорости (см. рис. 13.14, *д*, и 13.17). Таким образом, осреднение мгновенных значений скорости и ее производной по времени или по ансамблю дает среднюю величину $\bar{u} = 0$ и $\bar{c}_f = 0$. Отмечавшиеся при $\lambda_0 > 0$ возвратно-вихревые течения вырождаются при $\lambda_0 = 0$ в возвратно-поступательные. Об этом свидетельствуют также данные рис. 13.14, *в*, обозначения для которого приняты те же, что и для рис. 13.14, *л*, и 13.16. Такие течения на пористой поверхности и их трансформация при изменении $\lambda_0$ регистрировались в опытах Б. П. Миронова и П. П. Луговского с помощью скоростной киносъемки (см. рис. 13.14, *к*, *м*), методом стробоскопической визуализации (см. рис. 13.14, *д*) и в опытах Б. П. Миронова и А. А. Зеленгура с помощью четырехнитевого датчика направления потока с центральной обогреваемой нитью, схема расположения которого показана в верхней части рис. 13.16. Этот датчик состоял из нагреваемой нити и трех расположенных около нее (0, 90 и 180°) термометров сопротивления (см. рис. 13.16).

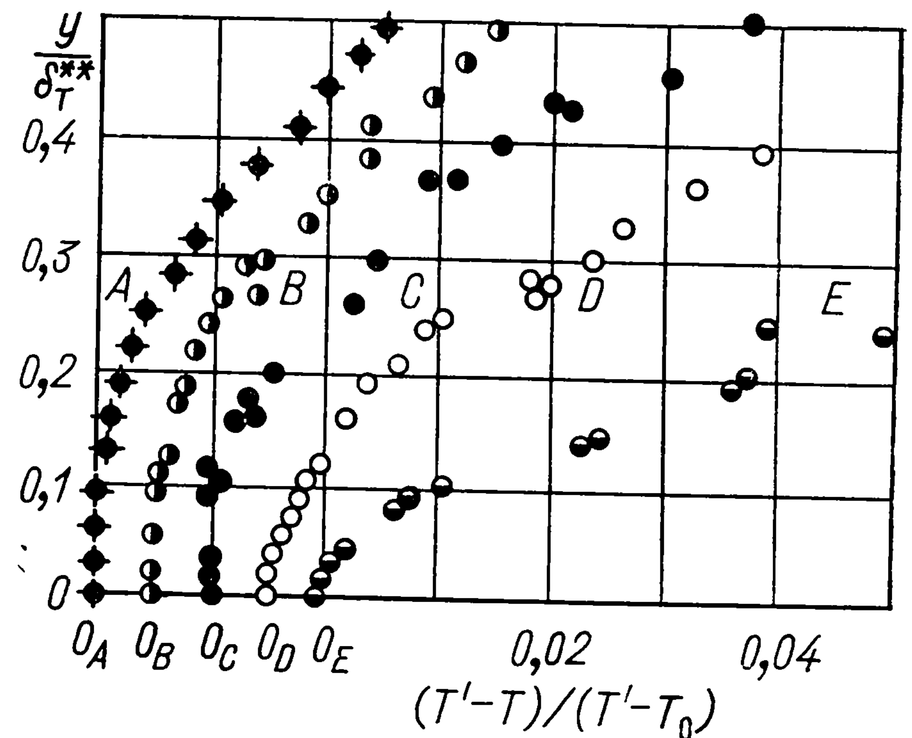



Рис. 13.18. Профили температуры вблизи стенки:

$A - b = 20{,}6$, $f = 0$; $B - b = 19{,}7$, $f = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$; $C - b = 18{,}6$, $f = 0$; $D - b = 17{,}1$, $f = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$; $E - b = 11{,}8$, $f = 0$

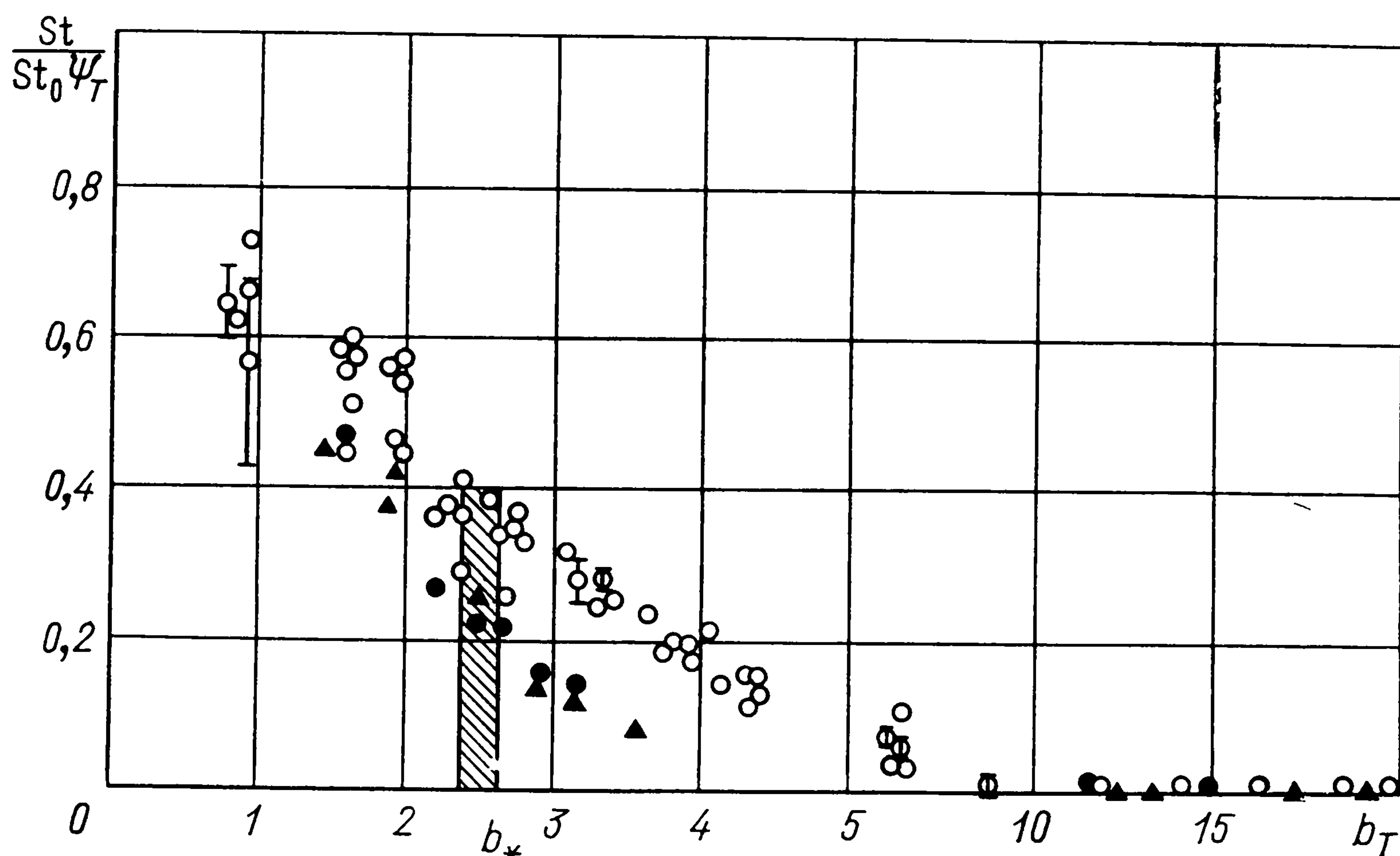



Рис. 13.19. Теплоотдача на проницаемой поверхности ($b_*$ при $f = (2{,}6 \div 3) \cdot 10^{-3}$);

○ — $f = 0$; ▲ — $f = 2{,}6 \cdot 10^{-3}$; ● — $f = 3 \cdot 10^{-3}$

Гидродинамические особенности слоя оттеснения проявляются также через изменения коэффициента перемежаемости и спектра пульсаций скорости, полученных в опытах Б. П. Миронова, А. И. Алимпиева и В. Н. Мамонова. Коэффициент перемежаемости $\gamma$, характеризующий границу турбулентного пограничного слоя, при $b > b_{кр}$ меняется от нуля на внешней границе до единицы внутри пограничного слоя и снова до нуля вблизи стенки (см. рис. 13.14, *г*). Это оз-

начает, что пограничный слой «всплывает» над слоем оттеснения. Спектры пульсации вектора скорости по частотам указывают на то, что в слое оттеснения устанавливается такое течение, которое сохраняет особенности спектра вдуваемой среды при $b \to \infty$ (см. рис. 13.14, *б*, спектр *1*). Эта особенность проявляется, например, в том, что внесенные при каких-либо частотах возмущения в спектр пульсации при $b \to \infty$ остаются неизменными в некоторой пристенной области, когда $b > b_{кр}$. Кроме того, спектр около стенки *1* отличается от спектра в ядре пограничного слоя *2* (см. рис. 13.14, *б*).

Индикаторные измерения концентрации вдуваемой среды на стенке подтверждают, что в слое оттеснения $\bar{\rho}_{ст} \to 100\%$. Исследования температурных полей вблизи стенки, проведенные в опытах Б. П. Миронова и А. А. Зеленгура, дают нулевые значения градиента температуры в пределах возможной точности этих измерений (см. рис. 13.14, *е*, *з*, и 13.18). Переход через границу *А* в область $b > b_{кр}$ $(\lambda_0)$ приводит к существенным изменениям теплоотдачи от вдува вследствие возникновения специфических вихревых течений (рис. 13.14, *ж*, и 13.19). До достижения значения $b_* = b_{кр}$ $(\lambda_0)$ относительная функция теплообмена $\Psi$ в зависимости от параметра вдува $b_T$ для $dp/dx = 0$ и $dp/dx > 0$ остается одной и той же. При $b > b_*$ наблюдается более интенсивное снижение теплоотдачи с ростом вдува. При этом вследствие сильных пульсаций скорости вблизи стенки тепловое оттеснение наступает позже динамического.

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*


1. **Берман Л. Д.** Испарительное охлаждение циркуляционной воды. М.—Л., Госэнергоиздат, 1957.
2. **Волчков Э. П., Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И.** Взаимодействие затопленной турбулентной струи с твердой стенкой.— «Журн. прикл. мех. и техн. физ.», 1965, № 2, с. 50.
3. **Иевлев В. М.** Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М., «Наука», 1975.
4. **Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И.** Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М., «Энергия», 1972.
5. **Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И., Миронов Б. П.** Turbulent boundary layer with mass injection and longitudinal pressure gradient in finite Reynolds number region. — In: JSME, Semi-International Symposium, Tokyo, Japan, 1967, p. 225.
6. **Миронов Б. П., Луговской П. П.** Исследование картины течения в пристенной области турбулентного пограничного слоя при вдуве и положительном градиенте. — «Инж.-физ. журн.», 1973, т. 25, № 2, с. 251.
7. **Франк-Каменецкий Д. А.** Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., Изд-во АН СССР, 1947.
8. **Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М.** Теория тепло- и массообмена. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961.
9. **Эккерт Э. Р., Хейдей А. А., Минкевич В. Ж.** Тепло- и массоперенос. Сб. докл., т. III. М., Госэнергоиздат, 1963.
10. **Экспериментальное** исследование пристенных турбулентных течений. Новосибирск, «Наука», 1975. Авт.: С. С. Кутателадзе, Б. П. Миронов, В. Е. Накоряков, Е. М. Хабахпашева.
11. **Gross J. F., Hartnett J. P., Masson D. J., Gazley C. A.** Review of binary boundary layer characteristics. The RAND Corporation, 1959.
12. **Turbulent** heat transfer on permeable surface at large injection and adverse pressure gradient.— «5 th Intern. Heat Transfer Conference», Tokyo, Japan, 1974, p. 109. Auth.: Б. П. Миронов, А. И. Алимпиев, А. А. Зеленгур, В. Н. Мамонов.

Глава **14**

# ТЕПЛОВЫЕ ЗАВЕСЫ

## 14.1. ТИПЫ ЗАВЕС

При обтекании твердых тел газом, нагретым до высокой температуры, или жидкой агрессивной средой можно организовать пограничный слой, который на определенном участке будет иметь существенно меньшую температуру или малую концентрацию агрессивного вещества. Имеется несколько способов организации таких защитных слоев или завес (рис. 14.1). Наиболее важной является подача защитной струи через встроенный в тело пористый участок, соответствующую щель, насадку. Кроме того, можно создать охлаждаемый участок в головной части тела, а остальную его часть не охлаждать или охлаждать менее интенсивно.

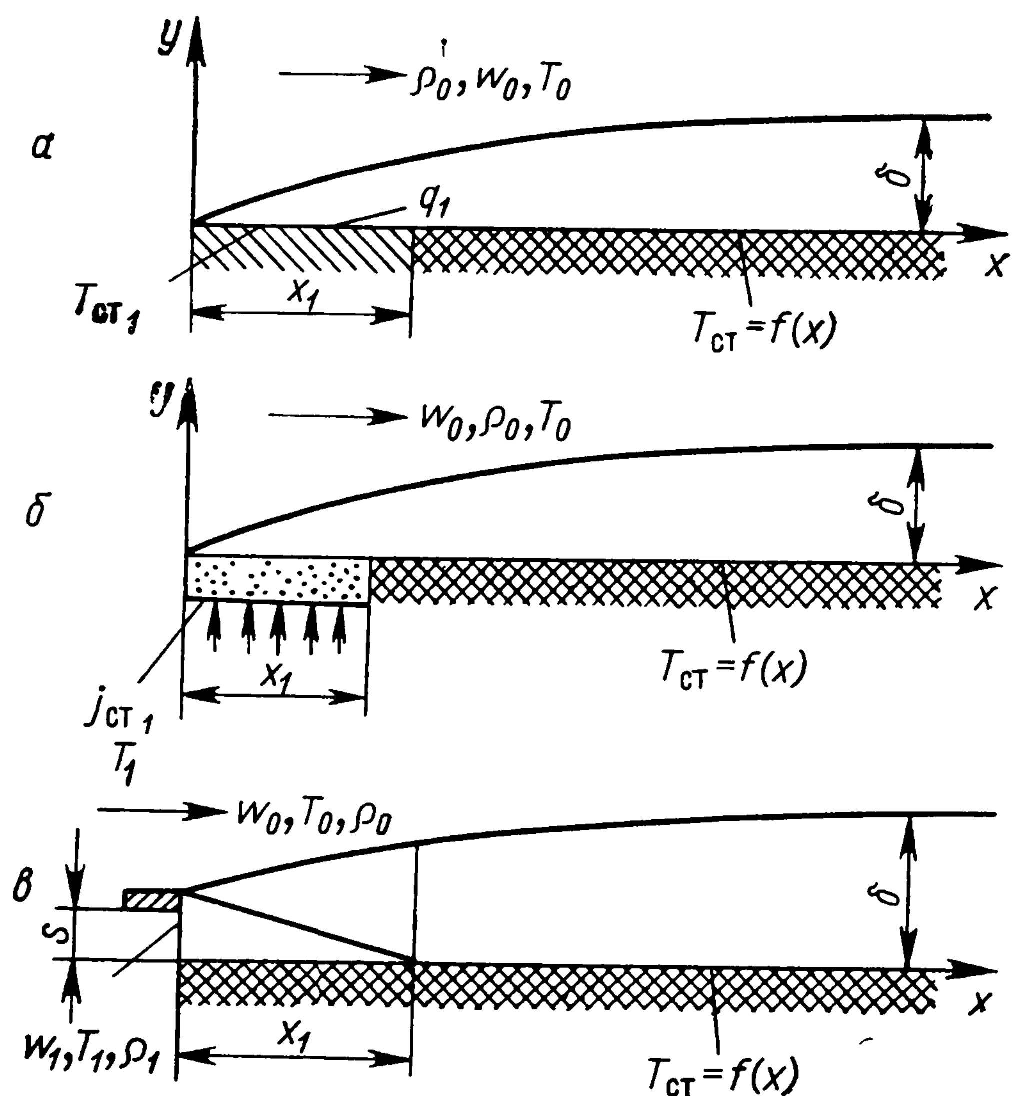



Рис. 14.1. Схемы тепловой защиты адиабатических пластин с предвключенным участком теплообмена (*а*), с предвключенным пористым участком (*б*) и с газовой завесой через щелевую насадку (*в*)

Здесь мы рассмотрим некоторые свойства таких завес, связанные с вырождением теплового пограничного слоя, и способ применения интегральных соотношений импульсов и энергии к взаимодействию затопленной струи с твердой стенкой.

Изложение асимптотических свойств тепловых завес основывается на работах автора и А. И. Леонтьева, а изложение интегральных соотношений для взаимодействия тела с затопленной струей — на работе автора, А. И. Леонтьева и Э. П. Волчкова.

При этом, для простоты, там, где это не будет особо оговорено, рассматриваются квазиизотермические течения.

## 14.2. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ТЕПЛОВОЙ ЗАВЕСЕ НА АДИАБАТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Для квазиизотермического пограничного слоя уравнение энергии можно записать в форме

$$\frac{d}{d\tilde{x}}\left(\mathrm{Re}_T^{**}\,\Delta T\right)=\frac{q_{ст}L}{\mu c_p}, \qquad (14.2.1)$$

где $\mathrm{Re}_T^{**}=w_0\,\delta_T^{**}/\nu$ и $\tilde{x}=x/L$.

Следует напомнить, что это выражение является точным при любом распределении температур и скоростей во внешнем потоке. Пусть с сечения $x=x_1$ рассматриваемое тело адиабатично, т. е. тепловой поток через его поверхность $q_{ст}=0$. Тогда в области $x>x_1$

$$\mathrm{Re}_T^{**}\,\Delta T=\mathrm{const}. \qquad (14.2.2)$$

Эффективность тепловой завесы принято характеризовать величиной

$$\Theta = (T_0 - T_{\text{ст}})/(T_0 - T_{\text{ст},1}). \qquad (14.2.3)$$

Здесь $T_0$ — температура внешнего потока; $T_{\text{ст}}$ — температура стенки в данной точке; $T_{\text{ст},1}$ — температура стенки при $x = x_1$.

Из уравнения (14.2.2) следует, что

$$\Theta = \mathrm{Re}_{T1}^{**}/\mathrm{Re}_T^{**}. \qquad (14.2.4)$$

Используя известные свойства пограничного слоя, можно написать, что

$$(T_{\text{ст}} = \text{const};\ \Pr \approx 1) \Rightarrow (\delta_T^{**} \leqslant \delta^{**}); \qquad (14.2.5)$$

$$\begin{pmatrix} T_{\text{ст}} = \text{const}; & \\ \Pr \approx 1; & f \approx 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \delta_T \approx \delta \\ \delta_T^{**} \approx \delta^{**} \end{pmatrix}. \qquad (14.2.6)$$

В области $x > x_1$ такое подобие динамического и теплового пограничного слоев нарушается вследствие изменения граничных условий, а именно:

$$(x > x_1;\ q_{\text{ст}} = 0) \Rightarrow (\partial T/\partial y = 0 \text{ в точках } y = 0 \text{ и } y = \delta_T). \qquad (14.2.7)$$

В этих условиях выравнивание температуры внутри пограничного слоя, особенно турбулентного, наиболее интенсивно происходит в пристенной области, где производная $\partial w_x/\partial y$ имеет наибольшее значение. Одновременно из-за подсоса газа из внешнего потока температура пограничного слоя при $x \to \infty$ стремится к $T_0$. Отсюда следует предельное соотношение Кутателадзе—Леонтьева для вырожденного пограничного слоя на адиабатической поверхности:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } x \to \infty\ q_{\text{ст}} = 0;\ T \to T_{\text{ст}} \to T_0 \\ &\bar{\delta}_T^{**} = \int_0^1 \omega\left(1 - \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}}\right) d\xi \to \int_0^1 \omega d\xi. \end{aligned}\right\} \qquad (14.2.8)$$

Это наибольшее возможное значение толщины потери энергии, соответствующее такому распределению температур, при котором в основной части пограничного слоя температура близка к температуре стенки. Как известно, при обычных значениях чисел $\mathrm{Re}^{**}$ в области $f = 0$ распределение скоростей и температур удовлетворительно описывается степенными зависимостями с $n = 1/7$. При $f = f_{\text{кр}}$ для профиля скоростей $n \approx 1/2$, а профиль температур почти не меняется. Таким образом, в рассматриваемом здесь случае имеем

$$\left.\begin{aligned} &\Pr \approx 1;\ \mathrm{Re}^{**} \approx 10^4;\ x < x_1 \begin{cases} f = 0; \bar{\delta}_T^{**} \approx \bar{\delta}^{**} \approx 0{,}097; \\ f = f_{\text{кр}};\ \bar{\delta}_T^{**} \approx 0{,}097;\ \bar{\delta}^{**} \approx 0{,}16; \end{cases} \\ &\Pr \approx 1;\ \mathrm{Re}^{**} \approx 10^4;\ x \to \infty \begin{cases} f \approx 0;\ \bar{\delta}_{T,\text{ макс}}^{**} = 0{,}87; \\ f = f_{\text{кр}};\ \bar{\delta}_{T,\text{ макс}}^{**} = 0{,}70. \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (14.2.9)$$

Как видно, при любом градиенте давления относительная толщина потери энергии на непроницаемой адиабатической поверхности, расположенной за зоной теплообмена, при $x \to \infty$ в области конечных чисел Рейнольдса становится близкой к единице.

Этот результат подтверждается измерениями профилей температур в области тепловой завесы. Так, в опытах Нишиваки, Хирата и Тзучида отношение значения $\bar{\delta}_T^{**}$ в пограничном слое завесы к значению $\bar{\delta}_T^{**}$ в обычных условиях близко к 6. Предельное же отношение по уравнению (14.2.9) равно 9.

## 14.3. АДИАБАТИЧЕСКАЯ ПЛАСТИНА С ПРЕДВКЛЮЧЕННЫМ УЧАСТКОМ ТЕПЛООБМЕНА

Схема задачи приведена на рис. 14.1, *а*.

$$\left.\begin{aligned}&0<x<x_1;\ T_{ст}=T_{ст,1}=\text{const};\ w_0=\text{const};\ \Pr\approx 1;\\&\delta_T\approx\delta;\ \delta_T^{**}\approx\delta^{**};\\&x>x_1;\ q_{ст}\approx 0;\quad \delta_T\approx\delta;\quad \delta_T^{**}\neq\delta^{**}.\end{aligned}\right\}\qquad(14.3.1)$$

Здесь следует обратить внимание на то, что в области $x > x_1$ тепловой пограничный слой хотя и растягивается в соответствии с уравнением (14.2.8), но не может выйти за рамки динамического слоя, поскольку существенное турбулентное перемешивание имеет место только при $\partial w_x/\partial y \neq 0$.

Для условий (14.3.1) формула (14.2.4) может быть записана в виде

$$\Theta=\delta_1^{**}/(\beta\delta^{**}),\qquad(14.3.2)$$

где $\beta = \delta_T^{**}/\delta^{**}$. При $x \to x_1$ $\beta \to 1$, при $x \to \infty$ $\beta \to \beta_{макс}$. Квазиизотермический динамический пограничный слой развивается независимо от процесса теплообмена, и, следовательно, для пластины в области закона распределения скоростей по степени $n = 1/7$

$$\delta_T^{**}/\delta^{**}=(x_1/x)^{0,8}\qquad(14.3.3)$$

и при $x \to \infty$

$$\Theta\to\beta_{макс}^{-1}(x_1/x)^{0,8}.\qquad(14.3.4)$$

При $x \to x_1$ $\Theta \to 1$, и простейшая интерполяция может быть записана в виде

$$\Theta\approx[1+\beta_{макс}^{1,25}(x-x_1)/x_1]^{-0,8}.\qquad(14.3.5)$$

Полагая $\beta_{макс} = 9$, имеем

$$\Theta\approx[1+15{,}5(x-x_1)/x_1]^{-0,8}.\qquad(14.3.6)$$

Эта формула вполне удовлетворительно подтверждается опытами Рейнольдса, Кейса и Клайна.

## 14.4. АДИАБАТИЧЕСКАЯ ПЛАСТИНА С ПРЕДВКЛЮЧЕННЫМ ПОРИСТЫМ УЧАСТКОМ

Схема задачи приведена на рис. 14.1, *б*. Через пористую вставку на участке $0 < x < x_1$ в пограничный слой вдувается холодный газ. В соответствии с данными гл. 13 для пористого участка имеем уравнения:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\text{Re}_T^{**}}{d\tilde{x}}+\frac{\text{Re}_T^{**}}{\Delta T}\frac{d\Delta T}{d\tilde{x}}=\text{St}_0\,\text{Re}_L(\Psi_S+b_T);\\&c_{p_1}j_{ст}(T_{ст}-T_1)=\alpha(T_0-T_{ст}).\end{aligned}\right\}\qquad(14.4.1)$$

Здесь $b_T = j_{ст}/(\rho_0 w_0 \text{St}_0)$ — тепловой фактор проницаемости стенки; $j_{ст}$ — массовая скорость потока через стенку; $T_1$ — начальная температура охлаждающего газа.

При этом предполагается, что газ нагревается в пористой стенке от $T_1$ до $T_{ст}$, полностью воспринимая тепло от потока горячего газа. Соответственно

$$\Psi_s=\text{St}/\text{St}_0=Kb_T,\qquad(14.4.2)$$

где

$$K=c_{p_1}(T_{ст}-T_1)/c_{p_0}(T_0-T_{ст}).\qquad(14.4.3)$$

В рассматриваемых условиях однородного пограничного слоя

$$c_{p_1}=c_{p_0}\quad\text{и}\quad K=(T_{ст}-T_1)/(T_0-T_{ст}).$$

При $T_{ст} = \text{const}$ и $\delta_{x=0} = 0$

$$\left.\begin{aligned}&d\text{Re}_T^{**}/d\tilde{x}=\tilde{j}_{ст}\,\text{Re}_L(1+K);\\&\text{Re}_{T_1}^{**}=\text{Re}_{ст_1}(1+K_1).\end{aligned}\right\}\qquad(14.4.4)$$

Здесь

$$\tilde{j}_{\text{ст}} = \frac{j_{\text{ст}}}{\rho_0 w_0} \quad \text{и} \quad \mathrm{Re}_{\text{ст}_1} = \frac{1}{\mu}\int_0^{x_1} j_{\text{ст}}\, dx.$$

В области $x > x_1$ справедлива формула (14.2.4), которая в данном случае принимает вид

$$\Theta = (1 + K_1)/(1 + K), \tag{14.4.5}$$

где $K_1 = (T_{\text{ст}_1} - T_1)/(T_0 - T_{\text{ст}_1})$, а в $K$ вводится текущее значение $T_{\text{ст}}$ в области $x > x_1$. Отсюда

$$K = (1 + K_1)(\mathrm{Re}_T^{**}/\mathrm{Re}_{T_1}^{**}) - 1. \tag{14.4.6}$$

В области $0 < x < x_1$ $\mathrm{Re}_T^{**} = \mathrm{Re}^{**}$, а в области $x > x_1$ $\mathrm{Re}_T^{**} = \beta \mathrm{Re}^{**}$. Из уравнения импульсов получим (см. гл. 10)

$$\mathrm{Re}^{**} = [(1 + m) A \mathrm{Re}_{\Delta x} + \mathrm{Re}_1^{**1+m}]^{1/(1+m)}, \tag{14.4.7}$$

где $A$ и $m$ — коэффициенты степенной аппроксимации закона трения, а $\mathrm{Re}_{\Delta x} = w_0 (x - x_1)/\nu$.

При $x \to \infty$ $\mathrm{Re}_{\Delta x} \to \mathrm{Re}_x \gg \mathrm{Re}_1^{**}$ и

$$K = \frac{\beta_{\text{макс}}}{\mathrm{Re}_{\text{ст}1}} [(1 + m) A \mathrm{Re}_x]^{1/(1+m)} - 1, \tag{14.4.8}$$

где $\mathrm{Re}_1 = w_0 x_1/\nu$.

Для $n = 1/7$ $A = 0{,}0128$, $m = 1/4$, $\beta_{\text{макс}} = 9$ и $K \to 0{,}33\,\mathrm{Re}_x^{0,8}/\mathrm{Re}_{\text{ст}1} - 1$. (14.4.9)

Рис. 14.2. Сопоставление теоретического расчета (кривая) с опытными данными (точки)

Интерполяционная формула может быть записана в виде

$$K \approx (1 + K_1)\left[1 + \frac{0{,}25\,\mathrm{Re}_{\Delta x}}{\mathrm{Re}_{\text{ст}1}^{1,25}(1 + K_1)^{1,25}}\right]^{0,8} - 1. \tag{14.4.10}$$

На рис. 14.2 дано сопоставление формулы (14.4.10) с опытами Нишиваки и В. П. Комарова.

### 14.5. АДИАБАТИЧЕСКАЯ ПЛАСТИНА С ГАЗОВОЙ ЗАВЕСОЙ

Схема задачи приведена на рис. 14.1, *в*.

Основной поток газа имеет скорость $w_0$ и температуру $T_0$. Через щелевую насадку высотой $s$ вдувается тот же газ со средней скоростью в выходном сечении, равной $w_1$, и температурой $T_1$. Физические свойства газа постоянны, $q_{\text{ст}} = 0$.

На участке $0 < x < x_1$ $T_{\text{ст}} = T_{\text{ст}_1} = T_1$; с сечения $x = x_1$ начинает развиваться тепловой пограничный слой вследствие перемешивания завесы с основным потоком.

При $x > x_1$

$$\Theta = (T_0 - T_{\text{ст}})/(T_0 - T_1) = \delta_{T_1}^{**}/(\beta \delta^{**}). \tag{14.5.1}$$

При $x \to \infty$ и $n = 1/7$ из уравнения (14.4.7) следует, что

$$\delta^{**} \to 0{,}036 x\, \mathrm{Re}_x^{-0,2}. \tag{14.5.2}$$

В сечении $x_1$ толщина потери энергии

$$\delta_{T_1}^{**}=\int_0^h \frac{w}{w_0}\left(1-\frac{T_0-T}{T_0-T_1}\right)dy, \qquad (14.5.3)$$

где $h$ — ширина затопленной струи.

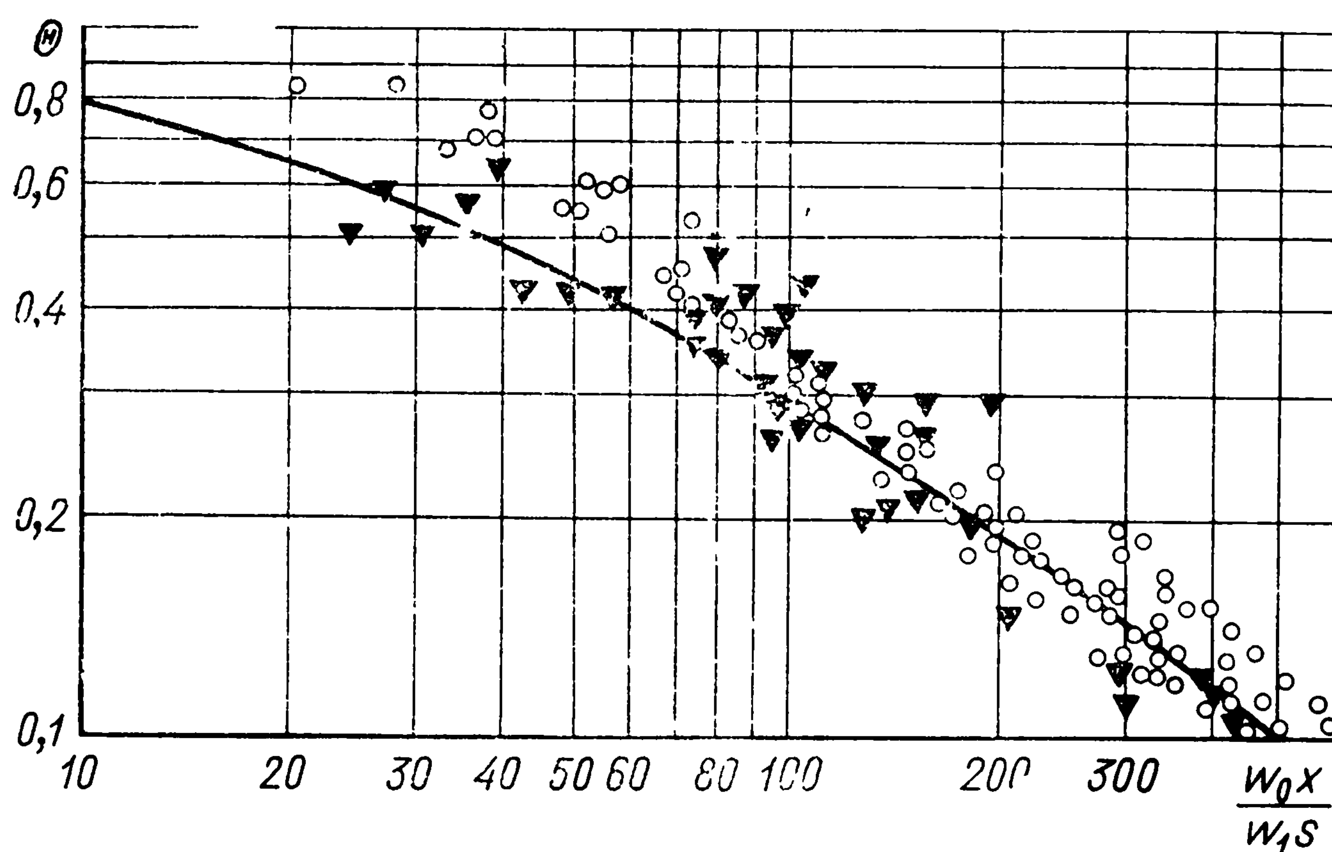



Рис. 14.3. Сопоставление теоретического расчета эффективности струйного охлаждения с опытами:

▼ — данные работы [6]; ○ — [7]; ——— результат расчета по формуле (14.5.11)

Тепловой и материальный балансы струи в сечении $x_1$ имеют вид

$$\int_0^h c_p \rho w_x T dy = c_{p_1}\rho_1 w_1 T_1 s + c_{p_0}\rho_0 w_0 T_0 (h-s); \qquad (14.5.4)$$

$$\int_0^h \rho w_x dy = \rho_1 w_1 s + \rho_0 w_0 (h-s). \qquad (14.5.5)$$

В рассматриваемом случае $\rho_1=\rho_0$ и $c_{p_1}=c_{p_0}$, т. е.

$$\delta_{T_1}^{**}=s w_1/w_0. \qquad (14.5.6)$$

Подставляя в уравнение (14.5.1) значение $\delta^{**}$ из выражения (14.5.2) и значение $\delta_{T_1}^{**}$ из равенства (14.5.6), находим, что при $x\to\infty$

$$\Theta \to \frac{27{,}8}{\beta_{\text{макс}}}\,\mathrm{Re}_s^{0,2}\left(\frac{w_1 s}{w_0 x}\right)^{0,8}, \qquad (14.5.7)$$

где $\mathrm{Re}_s = w_1 s/\nu$ — число Рейнольдса на срезе насадки. При $\beta_{\text{макс}}=9$ получим

$$\Theta \to 3{,}1\,\mathrm{Re}_s^{0,2}\,[w_1 s/(w_0 x)]^{0,8}. \qquad (14.5.8)$$

Интерполяционную формулу запишем в следующем виде ($x > x_1$):

$$\Theta \approx \left[1+0{,}24\,\mathrm{Re}_s^{-0,25}\,\frac{w_0(x-x_1)}{w_1 s}\right]^{-0,8}. \qquad (14.5.9)$$

В области $0 < x < x_1$ $\Theta = 1$. Из теории свободной затопленной струи можно принять, что при $w_1 < w_0$

$$\frac{x_1}{s}\approx\left(0{,}107+0{,}037\,\frac{w_1}{w_0}\right)^{-1}\frac{w_0+w_1}{w_0-w_1}. \qquad (14.5.10)$$

Если пренебречь участком $x_1$, т. е. принять некоторый запас надежности завесы, получим

$$\Theta \approx [1+0{,}24\,\mathrm{Re}_s^{-0,25}\, w_0\, x/(w_1\, s)]^{-0,8}. \qquad (14.5.11)$$

На рис. 14.3 дано сопоставление последней формулы с опытами Себана и Паппела и Траута.

## 14.6. НЕАДИАБАТИЧЕСКАЯ ПЛАСТИНА С ГАЗОВОЙ ЗАВЕСОЙ

Определим для области $x > x_1$ коэффициент теплоотдачи формулой, аналогичной формуле (12.2.4), для течения с большими скоростями:

$$\alpha = q_{\text{ст}}/(T_{\text{ст}}^{*} - T_{\text{ст}}). \qquad (14.6.1)$$

Здесь $T_{\text{ст}}^{*}$ — адиабатическая температура стенки, т. е. та температура, которая устанавливается в области завесы при $q_{\text{ст}} = 0$. Пусть при $x > x_1$ и $q_{\text{ст}} = 0$ в пограничном слое установится некоторое распределение температуры

$$T^{*} = T^{*}(y; x), \qquad (14.6.2)$$

такое, что при $y = 0$ $T^{*} = T_{\text{ст}}^{*}$ и при $y = \delta_T$ $T^{*} = T_0$. Тогда можно написать уравнение теплового баланса пограничного слоя в виде

$$q_{\text{ст}} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} c_p\, \rho w_x (T - T^{*})\, dy. \qquad (14.6.3)$$

При $T \equiv T^{*}$ и $q_{\text{ст}} = 0$ имеет место обтекание адиабатической стенки. Уравнение (14.6.3) имеет вид, тождественный обычному уравнению теплового пограничного слоя, и переходит в последнее при $T_{\text{ст}}^{**} = T_0$, т. е. при отсутствии тепловой завесы. Следовательно, если закон теплообмена St ($\mathrm{Re}_T^{**}$) сохраняет консервативность, то коэффициент теплоотдачи в уравнении (14.6.1) можно определять по обычным формулам. Опыты Гартнетта, Эккерта и Биркебака подтверждают этот вывод.

## 14.7. ИНТЕГРАЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУИ С ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНОЙ

Рассмотрим на рис. 14.4 плоскую струю, вытекающую из щели и распространяющуюся вдоль гладкой плоской стенки. Начиная с сечения $x = 0$ нарастает пристеночный пограничный слой до толщины $\delta_1$, на внешней границе которого имеет место максимум скорости. Толщина струи в сечении $x$ равна $\delta_2$, и уравнение импульсов имеет вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_2} \rho w_x^2\, dy = -\tau_{\text{ст}}. \qquad (14.7.1)$$

Полагая, что при $y = \delta_1$ $\partial w_x/\partial y = 0$ и $\tau = 0$ для контура *1—2—3—4*, можем написать, что

$$\frac{d}{dx} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \rho w_x^2\, dy + w_0 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_1} \rho w_x\, dy = 0. \qquad (14.7.2)$$

Тогда, разбивая в уравнении (14.7.1) пределы интегрирования на интервалы $0$—$\delta_1$ и $\delta_1$—$\delta_2$, получим

$$w_0 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_1} \rho w_x\, dy - \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_1} \rho w_x^2\, dy = \tau_{\text{ст}}. \qquad (14.7.3)$$

Это уравнение приводится к виду

$$\frac{d}{dx}\rho_0 w_0^2 \delta^{**} + \rho_0 w_0 (\delta^* - \delta_1)\frac{dw_0}{dx} = \tau_{\text{ст}} \qquad (14.7.4)$$

или

$$\frac{d\,\text{Re}^{**}}{d\tilde{x}} + \left(1 + H - \frac{\delta_1}{\delta^{**}}\right)\frac{\text{Re}^{**}}{\tilde{w}_0}\frac{d\tilde{w}_0}{d\tilde{x}} = \frac{c_{f_1}}{2}\text{Re}_s\tilde{w}_0. \qquad (14.7.5)$$

Здесь $\text{Re}^{**} = w_0\delta^{**}/\nu$; $\tilde{x} = x/s$; $\tilde{w}_0 = w_0/w_s$;

$$c_{f_1}/2 = \tau_{\text{ст}}/(\rho_0 w_0^2);\ \text{Re}_s = w_s s/\nu;\ H = \delta^*/\delta^{**}.$$

Толщина вытеснения и потери импульса в данном случае:

$$\left.\begin{aligned}\delta^* &= \int_0^{\delta_1}\left(1 - \frac{\rho w}{\rho_0 w_0}\right)dy;\\ \delta^{**} &= \int_0^{\delta_1}\frac{\rho w}{\rho_0 w_0}\left(1 - \frac{w}{w_0}\right)dy.\end{aligned}\right\} \qquad (14.7.6)$$

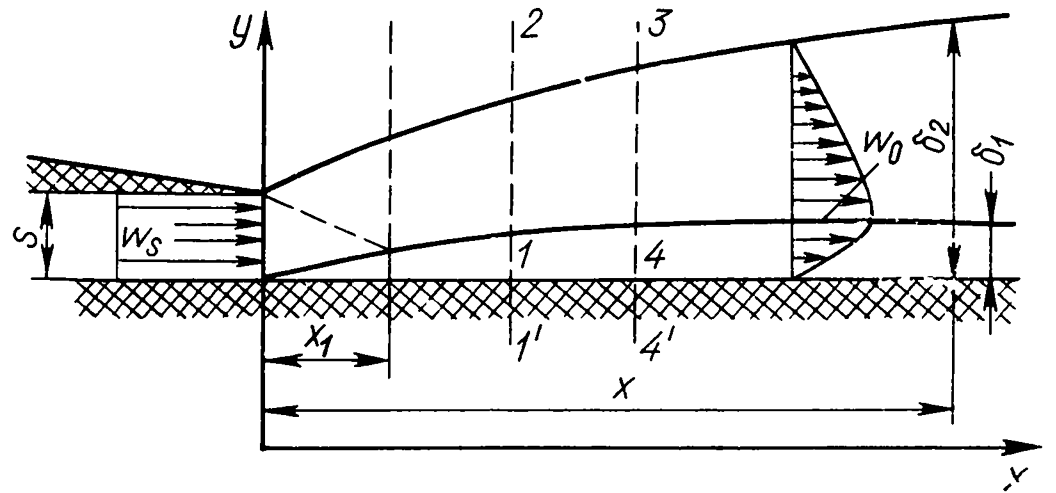



Рис. 14.4. Схема течения в полуограниченной затопленной струе

Уравнение (14.7.5) имеет нетривиальную форму, так как помимо обычных формпараметров $H$ и $f$ содержит в себе еще и соотношение $\delta_1/\delta^{**}$.

Кроме того, следует обратить внимание и на то обстоятельство, что в данном случае величина $dw_0/dx$ не связана с градиентом давления, который в дозвуковой затопленной струе практически равен нулю. При распределении скоростей в пристенном пограничном слое по закону $n = 1/7$ имеем

$$1 + H - \delta_1/\delta^{**} = -8. \qquad (14.7.7)$$

## 14.8. ТРЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУИ С ТВЕРДОЙ СТЕНКОЙ

Полагая, что законы трения и теплообмена сохраняют консервативность и в данной ситуации, запишем уравнение (14.7.5) в виде

$$\frac{d\,\text{Re}^{**}}{d\tilde{x}} + C_1\frac{\text{Re}^{**}}{\tilde{w}_0}\frac{d\tilde{w}_0}{d\tilde{x}} = \frac{A\tilde{w}_0}{\text{Re}^{**m}}\text{Re}_s. \qquad (14.8.1)$$

При $n = 1/7$ $A = 0{,}0128$; $m = 0{,}25$; $C_1 = -8$. Поскольку $\delta_1 \ll \delta_2$, закон изменения максимальной скорости в пристеночной струе можно принять таким же, что и в свободной струе с начальным сечением $2s$, т. е.

$$\tilde{w}_0 = C_2\tilde{x}^a \approx 3{,}8\tilde{x}^{-0{,}5}. \qquad (14.8.2)$$

Интегрируя (14.8.1) в пределах от $\tilde{x}_1$ до $\tilde{x}$, получим

$$\text{Re}^{**} = \left\{\text{Re}_1^{**\,1+m}\left(\frac{x_1}{x}\right)^{C_1 a(1+m)} + \frac{A(1+m)C_2\text{Re}_s\tilde{x}^{1+a}}{aC_1(1+m)+1+a}\left[1 - \left(\frac{x_1}{x}\right)^{C_1 a(1+m)+1+a}\right]\right\}^{1/(1+m)}. \qquad (14.8.3)$$

При $x \gg x_1$

$$\text{Re}^{**} \to \left[\frac{A(1+m)C_2\text{Re}_s\tilde{x}^{1+a}}{aC_1(1+m)+1+a}\right]^{1/(1+m)}. \qquad (14.8.4)$$

Отсюда при $n = 1/7$ и $\tilde{x} \gg 1$

$$c_{f_1}/2 = \tau_{\text{ст}}/(\rho_0 w_0^2) = 0{,}0315/(\mathrm{Re}_s^{0,2}\, \tilde{x}^{0,1}); \tag{14.8.5}$$

$$c_{f_2}/2 = \tau_{\text{ст}}/(\rho_0 w_s^2) = 0{,}457/(\mathrm{Re}_s^{0,2}\, \tilde{x}^{1,1}). \tag{14.8.6}$$

В опытах Сигалла было найдено, что при $\tilde{x} > 30$

$$c_{f_1} = 0{,}0865\,(w_0 x/\nu)^{-0,2}, \tag{14.8.7}$$

или с учетом выражения (14.8.2)

$$c_{f_1}/2 = 0{,}0332/(\mathrm{Re}_s^{0,2}\, \tilde{x}^{0,1}). \tag{14.8.8}$$

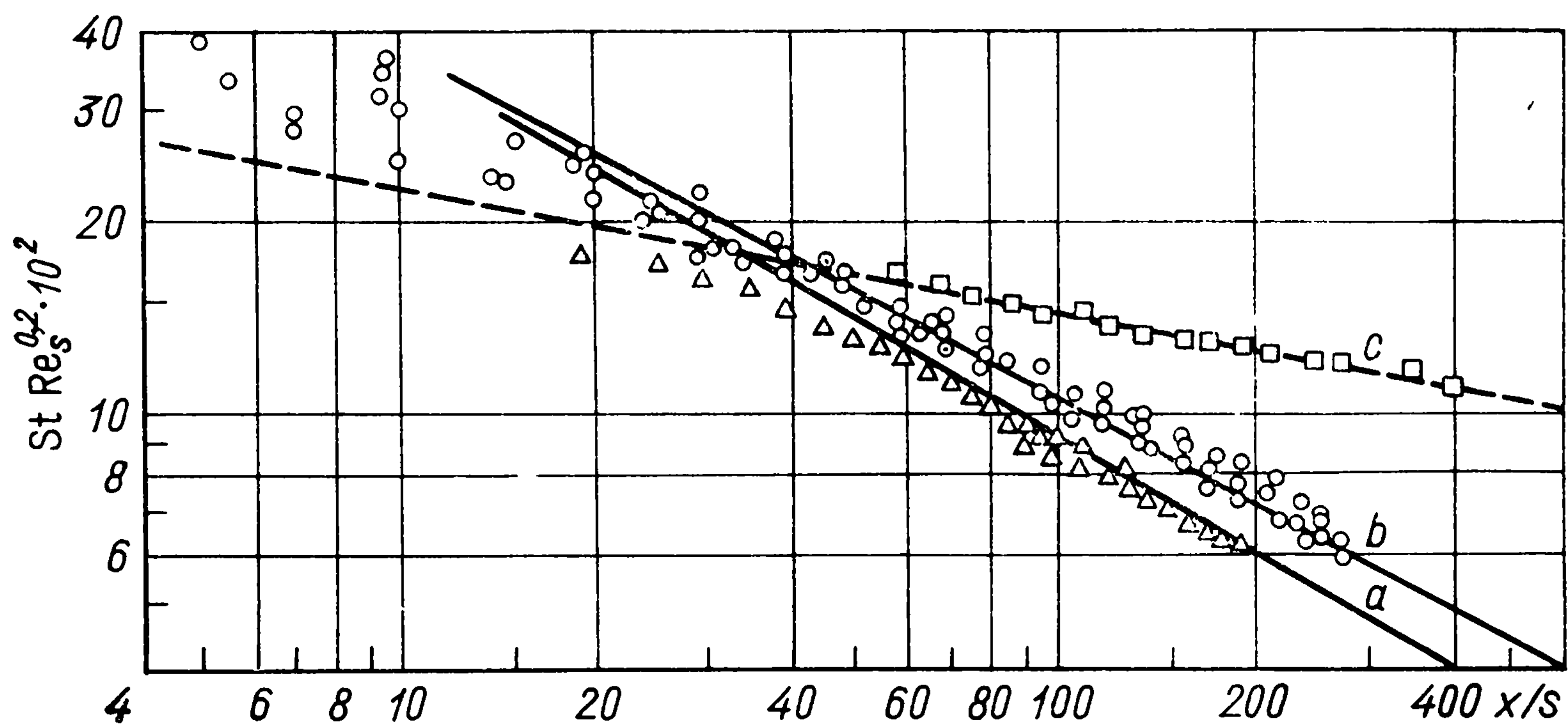



Рис. 14.5. Коэффициент теплообмена в полуограниченной струе:
$a$, $b$, $c$ — результат расчетов соответственно по формулам (14.8.11). (14.8.12), (14.8.13); Δ — данные работы [4] при $T_{\text{ст}} = \text{const}$; ○ — данные работ [7, 8] при $q_{\text{ст}} = \text{const}$, $3 < (\rho w)_S/(\rho w)_\infty < 9$; □ — данные работы [7] при $q_{\text{ст}} = \text{const}$, $1{,}05 < (\rho w)_S/(\rho w)_\infty < 1{,}1$

Эта формула отличается от (14.8.5) всего на 5%. Себан и Бэк нашли, что в спутном потоке с $3 < \rho_s w_s/(\rho_0 w_0) < 9$ величина $w_0$ в затопленной струе меняется по закону

$$\tilde{w}_0 = 3{,}6\tilde{x}^{-0,45}. \tag{14.8.9}$$

Из уравнений (14.8.4) и (14.8.9) следует, что при слабом спутном потоке

$$c_{f_1}/2 = 0{,}0314/\,(\mathrm{Re}_s^{0,12}\, \tilde{x}^{0,11}). \tag{14.8.10}$$

Эта формула также удовлетворительно подтверждается опытами. Полагая для турбулентного потока

$$\mathrm{St} = \mathrm{Pr}^{-0,6}\, c_f/2,$$

находим, что:

а) для затопленной пристеночной струи в неограниченном неподвижном пространстве

$$\mathrm{St} = \alpha/(c_p \rho w_s) = 0{,}12\mathrm{Re}_s^{-0,2}\,(\tilde{x}\,\mathrm{Pr})^{-0,6}; \tag{14.8.11}$$

б) для пристеночной струи в слабом неограниченном спутном потоке

$$3 < w_s/w_0 < 9;\ \mathrm{St} = 0{,}113\,\mathrm{Re}_s^{-0,2}\,\mathrm{Pr}^{-0,6}\,\tilde{x}^{-0,56}. \tag{14.8.12}$$

На рис. 14.5 дано сопоставление расчетов по этим формулам с опытами Себана и Бэка. Там же нанесены данные Себана для $w_s \approx w_0$, которые, естественно, описываются обычной формулой для пластины:

$$\tilde{\mathrm{St}} = 0{,}0288\,\mathrm{Re}_x^{-0,2}\,\mathrm{Pr}^{-0,6}. \tag{14.8.13}$$

# *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*


1. **Акатнов Н. И.** Распространение плоской турбулентной струи вдоль твердой, гладкой и шероховатой поверхностей.— «Изв. АН СССР. Сер. ОТН. Механика и машиностроение», 1960, № 1, с. 27.
2. **Волчков Э. П., Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И.** Взаимодействие затопленной турбулентной струи с твердой стенкой.— «Журн. прикл. механ. и техн. физ.», 1965, № 2, с. 50.
3. **Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И.** Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М., «Энергия», 1972.
4. **Мейерс Г. Е., Шауер И. И., Юстис Р. Н.** Теплообмен в плоских турбулентных струях у стенки.— «Тр. амер. об-ва инженеров-механиков» (рус. пер.), 1963, сер. С, т. 85, № 3, с. 209.
5. **Nishiwaki N., Hirata M., Tsuchida A.** Heat transfer on a surface covered by cold air film. — In: Intern. Developments in Heat Transfer. 1961 Intern. Conf., Pt. 4. New York 1961, Sec. A, p. 675.
6. **Papell S., Trout A. M.** Experimental investigation of air film-cooling applied to an adiabatic wall by means of axially discharging slot. NASA.TND-9, 1959.
7. **Seban R. A.** Heat transfer and effectiveness for a turbulent boundary layer with tangential fluid injection.— «Trans. ASME», ser. C, 1960, v. 82, N 4, p. 303.
8. **Seban R. A., Back L. H.** Velocity and temperature profiles in a wall jet.— «Intern. J. Heat and Mass Transfer», 1961, v. 3, N 4, p. 255.

*Глава* 15

# ТЕПЛООБМЕН В ПАКЕТАХ И ЗАСЫПКАХ

## 15.1. ПОПЕРЕЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ ПАКЕТОВ ЦИЛИНДРОВ

Поверхности нагрева, набираемые из отдельных труб, образуют пакеты, обтекаемые жидкостью или газом. Основными типами пакетов являются коридорный, шахматный (рис. 15.1) и пакеты с разрывами. Геометрически коридорные и шахматные пакеты однозначно определяются наружным диаметром цилиндров $D$, поперечным шагом $s_1$ и продольным $s_2$. Так как передние трубы турбулизуют поток, то интенсивность теплоотдачи повышается от ряда к ряду по направлению течения теплоносителя.

На рис. 15.2 показана схема обтекания труб в свободном коридорном пакете. Как видно из рис. 15.3, распределение статического давления вокруг одной из труб такого пакета, по измерениям А. Жукаускаса, В. Макарявичюса и А. Шланчяускаса, существенно более равномерно, чем при обтекании одиночного цилиндра. С увеличением продольного шага неравномерность поля давления увеличивается.

В тесных коридорных пакетах основное течение приближается к течению в каналах (рис. 15.4). При больших продольных шагах поток, проходя через узкое сечение данного ряда, начинает развиваться в кормовом пространстве как затопленная струя. Таким образом, в тесных пакетах все цилиндры, кроме первого ряда, обтекаются потоком с квазиструевым распределением скоростей (рис. 15.5).

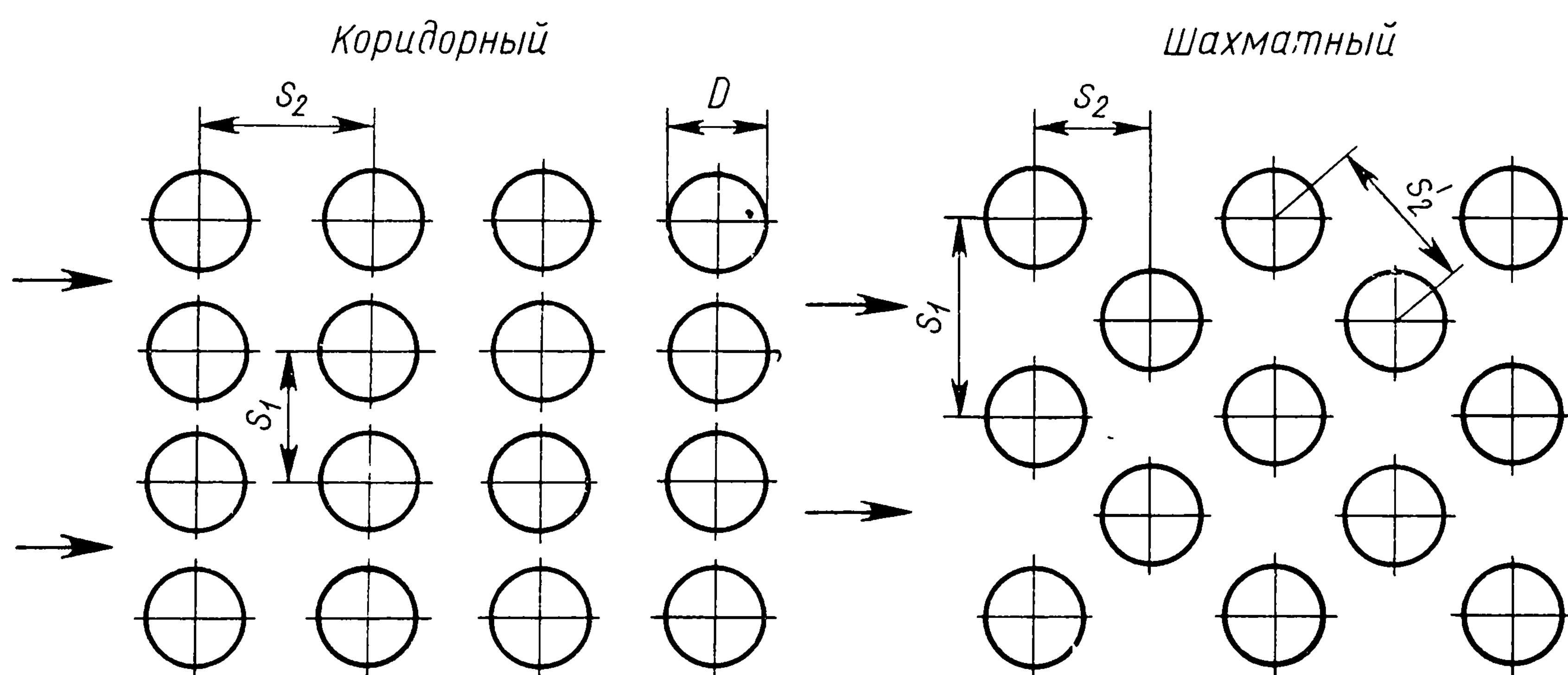



Рис. 15.1. Схемы расположения труб в пучке

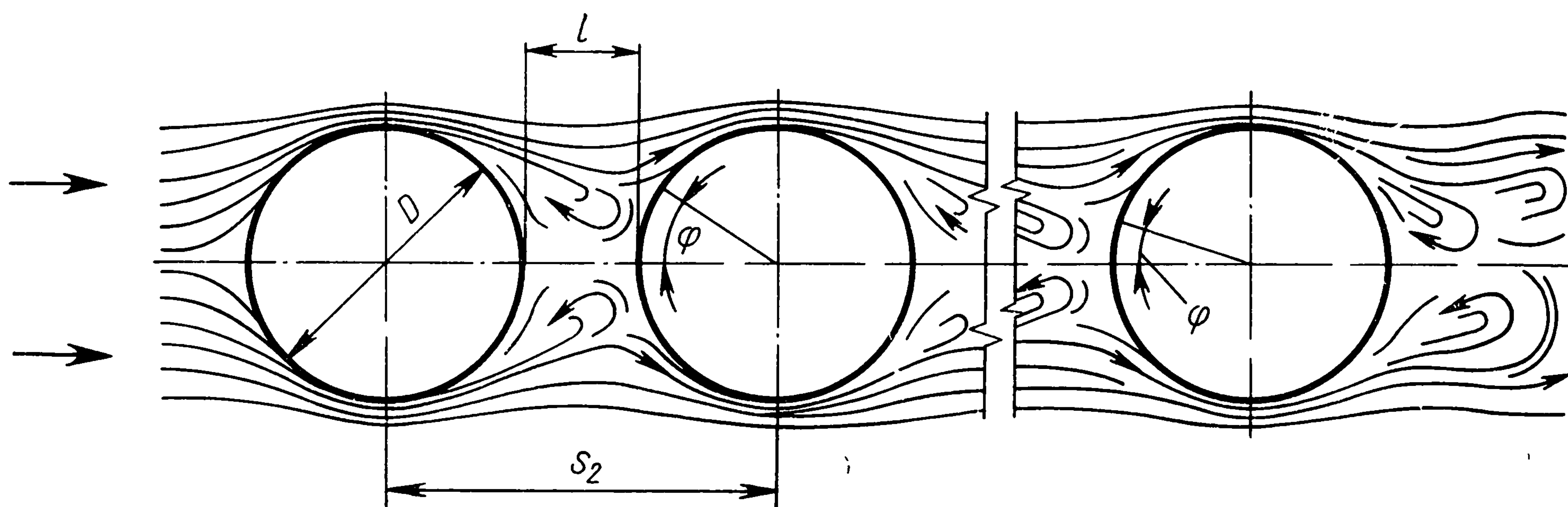



Рис. 15.2. Обтекание продольного ряда труб

На рис. 15.6 показаны, по опытам Г. А. Михайлова, эпюры коэффициентов теплоотдачи для труб, находящихся в коридорном пучке. Отчетливо видны взаимодействие последующих рядов труб с аэродинамическими следами предшествующих рядов и постепенная стабилизация условий обтекания после третьего-четвертого ряда.

Таким образом, коэффициент теплоотдачи пучка труб в квазиизотермическом потоке определяется некоторой функцией

$$\mathrm{Nu} = \Phi\,(\mathrm{Pr};\ \mathrm{Re};\ s_1/D;\ s_2/D;\ Z), \qquad (15.1.1)$$

где $Z$ — номер ряда по направлению течения.

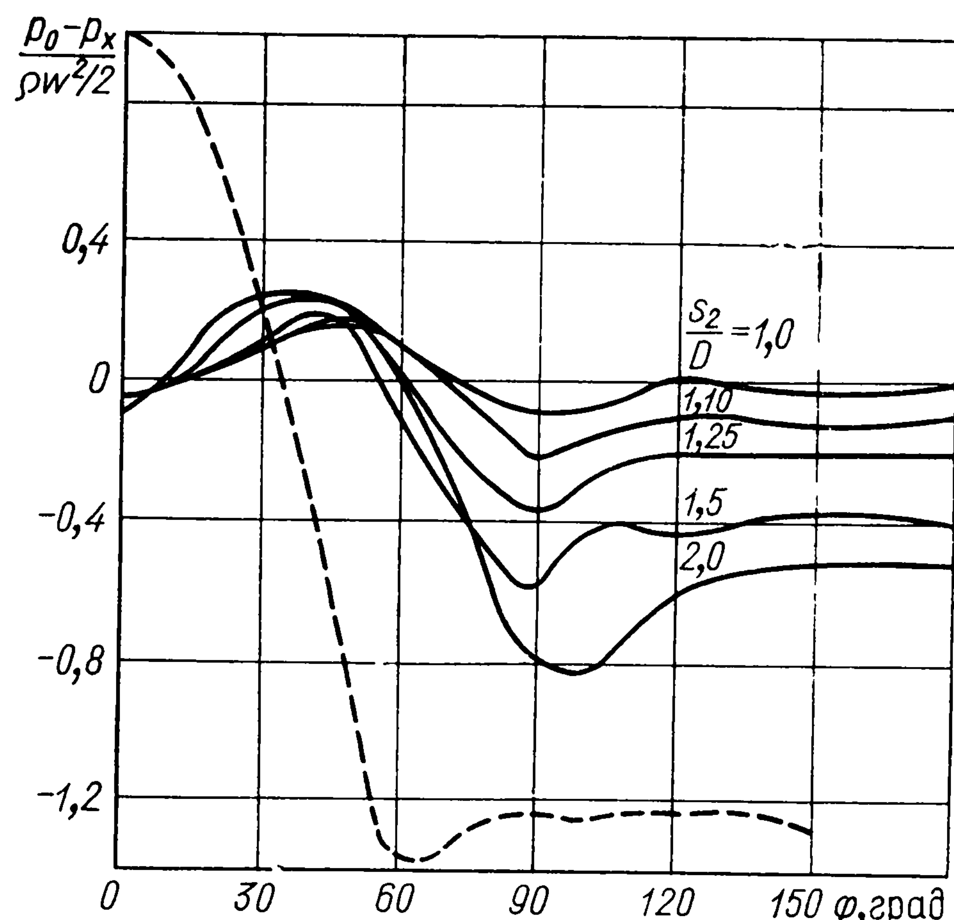



Рис. 15.3. Перепад статического давления вокруг трубы в продольном ряду (пунктирная линия соответствует обтеканию одиночного цилиндра идеальной жидкостью)

Первый ряд труб любого пучка находится в условиях, соответствующих обтеканию одиночного цилиндра. Исключение составляют только пучки с весьма тесным поперечным шагом, когда возникает взаимодействие пограничных слоев соседних труб. Последующие ряды труб в коридорном пучке попадают в вихревую область, образующуюся за впереди стоящими трубами. Условия омывания в этой области

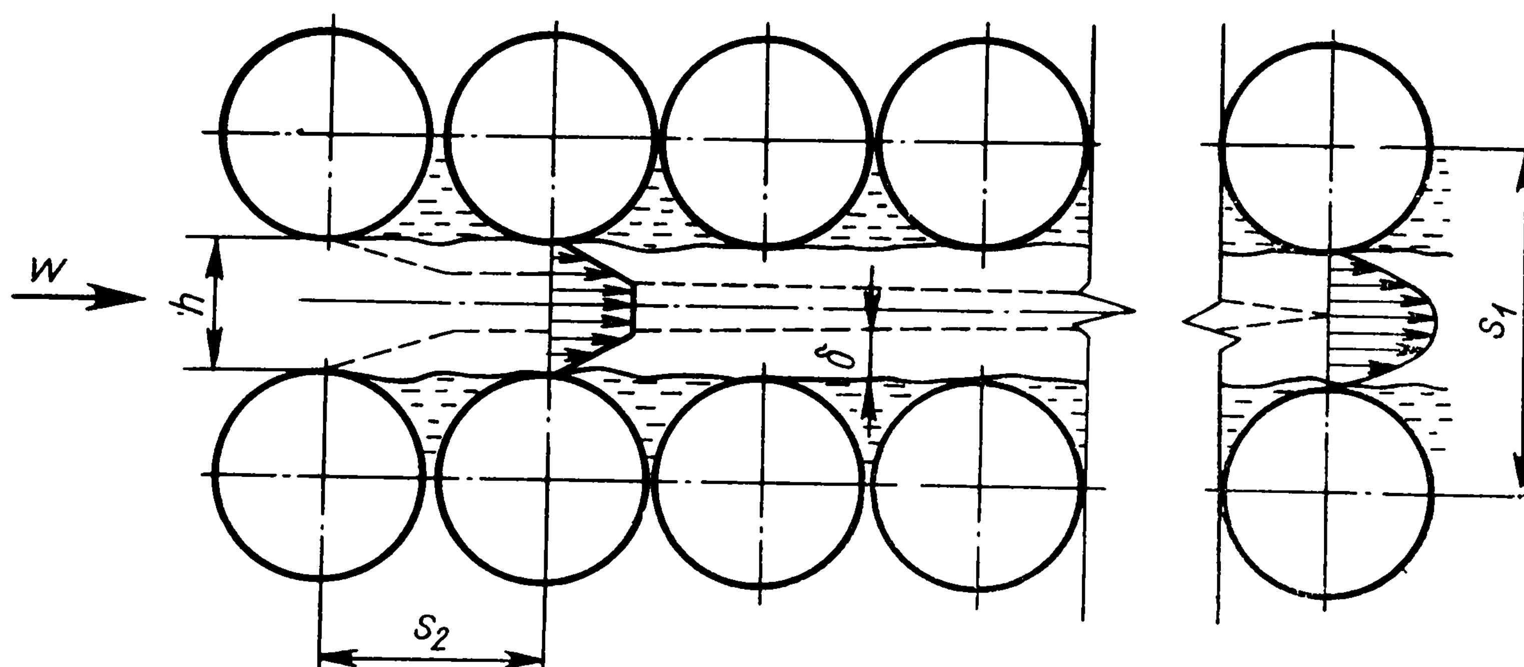



Рис. 15.4. Схема течения в сжатом коридорном пучке

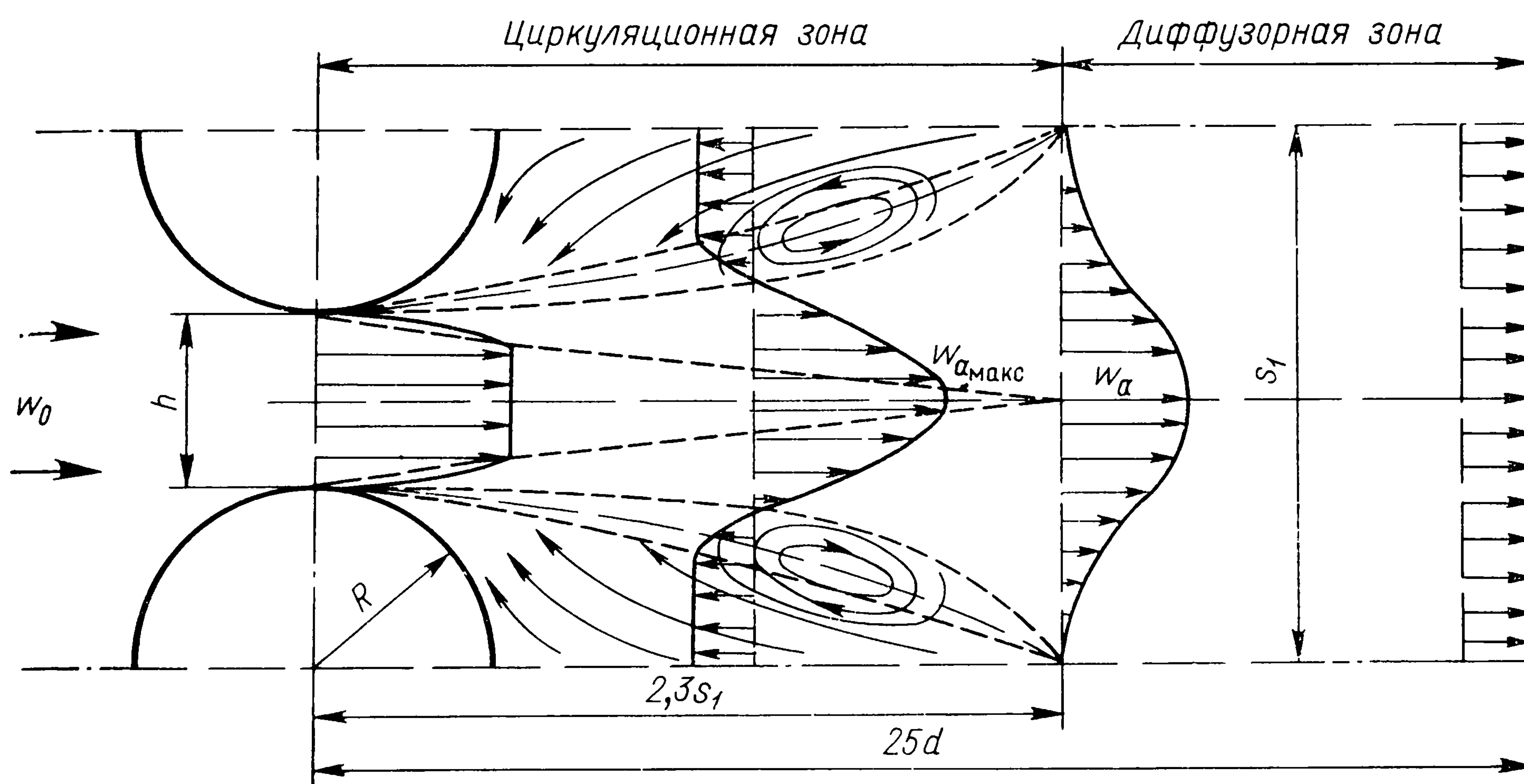



Рис. 15.5. Схема спутного течения за первым рядом

хуже, чем в лобовой части одиночной трубы, максимальное значение локального коэффициента теплоотдачи сдвигается вглубь по течению потока.

В шахматном пучке взаимодействующие трубы отстоят друг от друга на большем расстоянии, чем в коридорном пучке, и поэтому омывание глубоко расположенных труб мало отличается по характеру от омывания труб первого ряда.

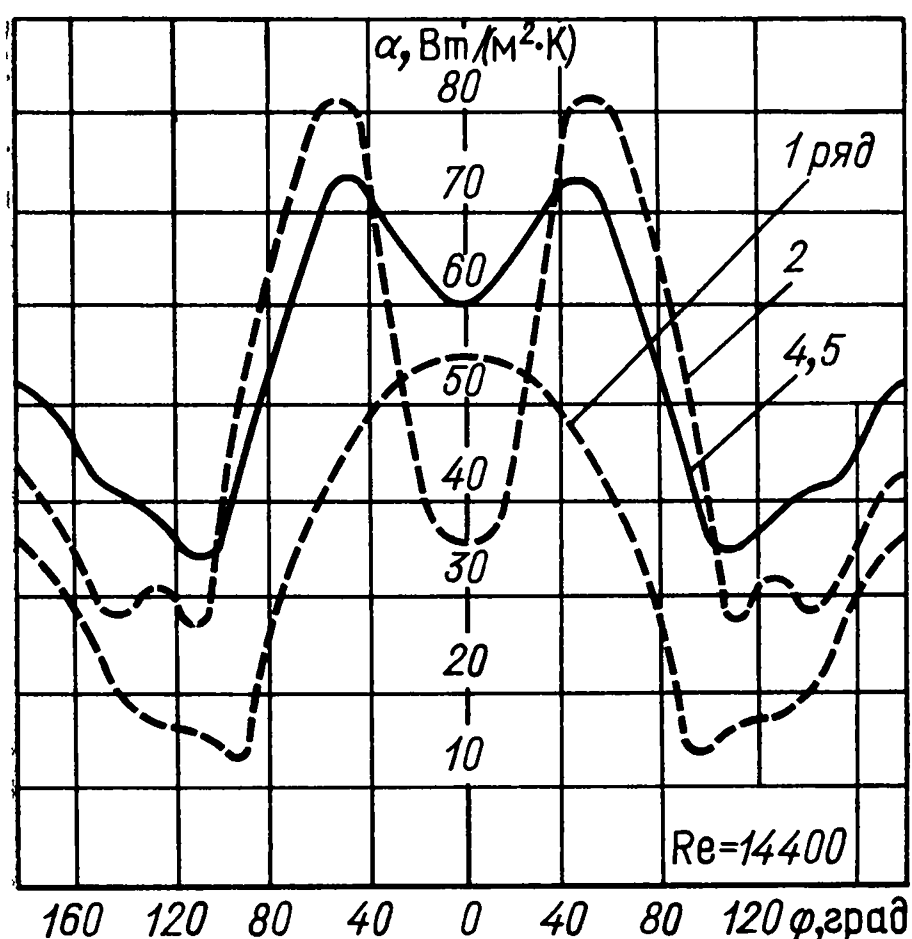


Рис. 15.6. Распределение теплоотдачи по окружности труб в коридорном пучке

Обширные исследования теплоотдачи от газа к пучкам труб были проведены В. М. Антуфьевым, Л. С. Казаченко и Г. С. Белецким, а также Н. В. Кузнецовым. Обзор последующих работ и новые результаты можно найти в монографии А. Жукаускаса, В. Макарявичюса и А. Шланчяускаса. Анализ показывает, что практически наиболее целесообразным оказывается метод обобщения при отнесении всех физических свойств к температуре потока и скорости течения, рассчитанной по узкому сечению пакета (ряда). Тогда формула для теплоотдачи в пучке имеет вид

$$\mathrm{Nu} = C \mathrm{Pr}^n \mathrm{Re}^m. \qquad (15.1.2)$$

За определяющий размер принят наружный диаметр трубы.

Обработка опытных данных, проведенная под руководством Н. В. Кузнецова, позволяет рекомендовать при $\mathrm{Re} > 6 \cdot 10^3$ следующие расчетные формулы (при $\mathrm{Pr} = 0{,}72$):

1) коридорные пучки

$$\mathrm{Nu} = 0{,}177\, C_z \mathrm{Re}^{0{,}64}, \qquad (15.1.3)$$

где $C_z$ — поправка на число рядов в продольном направлении; берется по графику рис. 15.7;

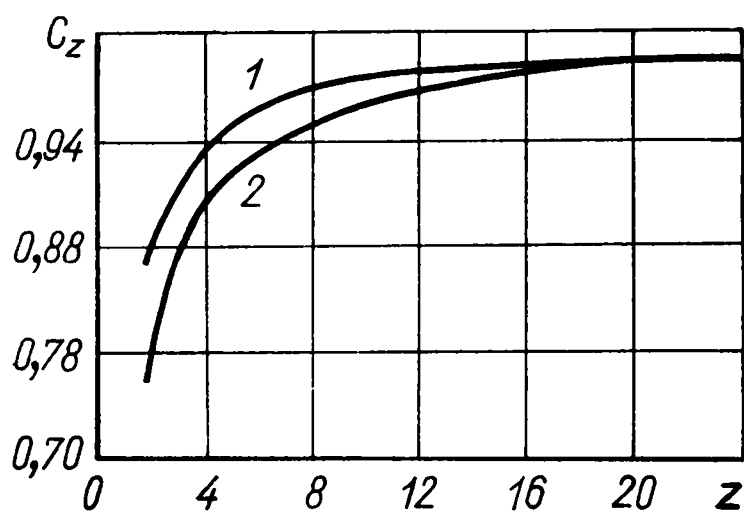


Рис. 15.7. Коэффициент $C_z$ для пакета труб коридорного (1) и шахматного (2) пучков

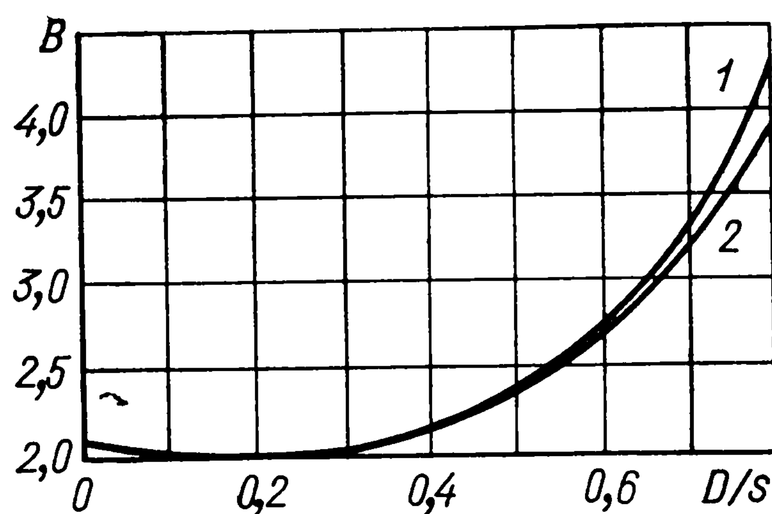


Рис. 15.8. Зависимость коэффициента $B$ от конфигурации и размеров коридорного (1) и шахматного (2) пучков труб

2) шахматные пучки при $(s_1 - D)/(s_д - D) < 0{,}7$

$$\mathrm{Nu} = 0{,}27\, C_z \mathrm{Re}^{0{,}6}; \qquad (15.1.4)$$

3) шахматные пучки при $(s_1 - D)/(s_д - D) > 0{,}7$

$$\mathrm{Nu} = 0{,}295 C_z \mathrm{Re}^{0{,}6} \left(\frac{s_1 - D}{s_д - D}\right)^{0{,}25}. \qquad (15.1.5)$$

где $C_z$ берется по графику рис. 15.7.

В этих формулах

$$s_д = D\sqrt{0{,}25\,(s_1/D)^2 + (s_2/D)^2}. \qquad (15.1.6)$$

По данным А. Жукаускаса и др., в пакетах труб $n \approx 0{,}36$, т. е. для неметаллических сред практически можно пользоваться формулой (10.14.3) при введении в нее соответствующего значения коэффициента $C$. При $\mathrm{Re} > 10^5$ показатель степени при числе Рейнольдса возрастает до 0,8.

В литературе имеются и другие эмпирические расчетные предложения. Для предельного случая металлических теплоносителей ($\mathrm{Pr} \to 0$), по расчетам Цесса и Грома, имеют место следующие зависимости:

$$\left.\begin{aligned} q &= \mathrm{const},\ \mathrm{Nu} = 0{,}946\sqrt{B\,\mathrm{Pe}};\\ T_{\text{ст}} &= \mathrm{const},\ \mathrm{Nu} = 0{,}718\sqrt{B\,\mathrm{Pe}}, \end{aligned}\right\} \qquad (15.1.7)$$

где значение коэффициента $B$ берется по графику (рис. 15.8).

На рис. 15.9 приведен ряд экспериментальных данных о теплообмене при поперечном обтекании пакетов труб щелочными металлами (Pe рассчитан по скорости потока в узком зазоре, $\mathrm{Pr} = 0{,}007 \div 0{,}02$).

Как видно, при таких значениях Pr конфигурация пакетов влияет относительно мало.

Широкое распространение имеют пакеты оребренных труб, главным образом в аппаратах с газовыми и жидкими теплоносителями, имеющими малые коэффициенты теплопроводности и теплоемкости или большую вязкость. При об-

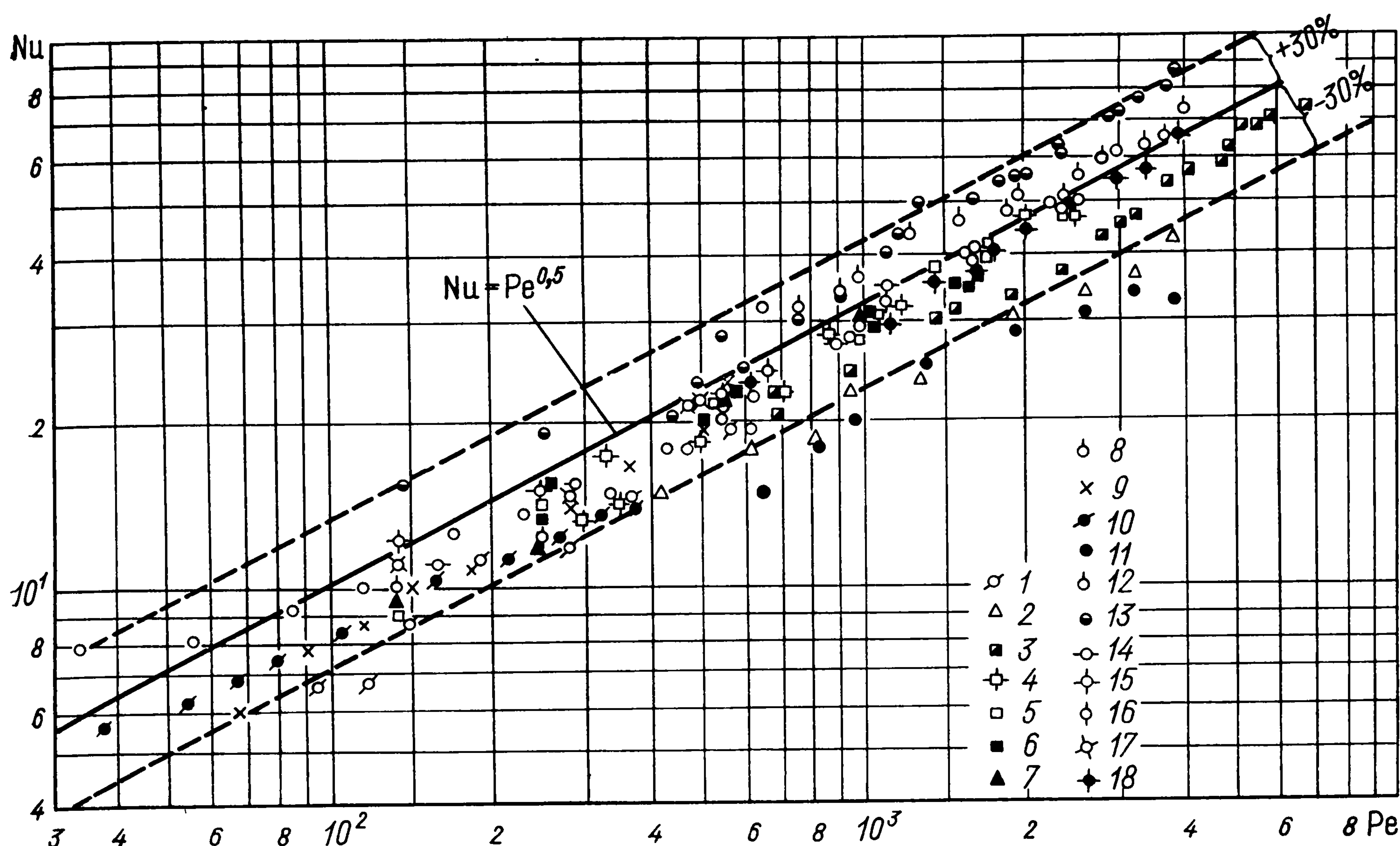



Рис. 15.9. Средняя теплоотдача при поперечном обтекании пучков труб жидким металлом:

*1—7* — коридорные пучки ($s_1/D = 1{,}13 \div 1{,}69$; $s_2/D = 1{,}13 \div 1{,}69$); *8—18* — шахматные пучки ($s_1/D = 1{,}13 \div 2{,}41$; $s_2/D = 0{,}613 \div 1{,}43$)

текании ребристых труб условия обтекания различных элементов поверхности теплообмена могут быть существенно неодинаковыми. Поэтому рассмотренные в гл. 7 задачи о теплопроводности в ребрах, на поверхности которых имеет место постоянное значение коэффициента теплоотдачи, далеко не всегда могут служить основанием для расчетов повышенной точности.

Кроме условий обтекания на теплообмен в оребренных поверхностях влияют и теплофизические свойства материалов ребер, например в стационарном режиме — их теплопроводность. Соотношения условий теплоотдачи к ребру и теплопроводности в самом ребре определяют поле температур на поверхности ребра и распределение тепловых потоков. Все это, а также многочисленность возможных конструкций оребрения делает невозможным построение универсальных зависимостей, связывающих значение коэффициента $C$ в формулах типа (15.1.2)

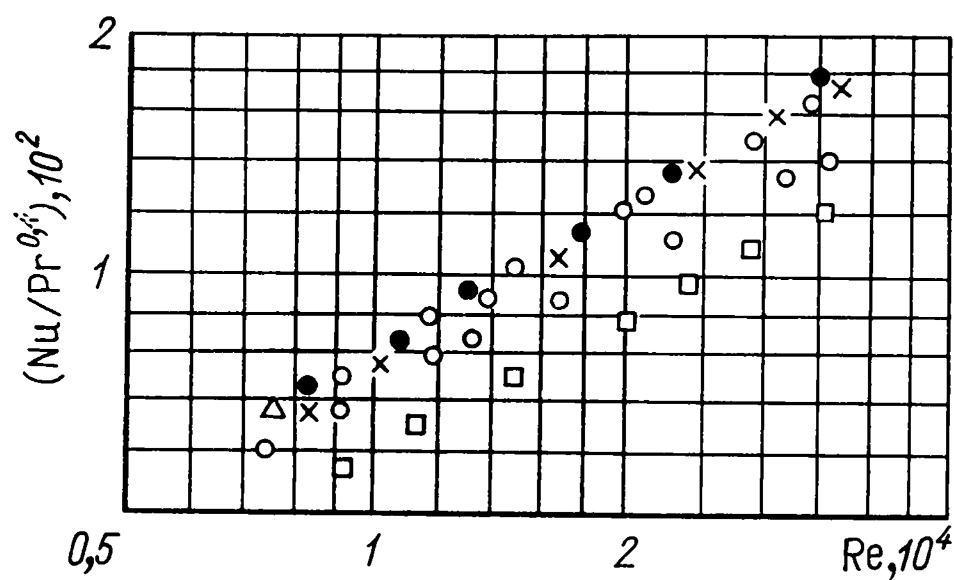



Рис. 15.10. Теплоотдача пучка труб из различных металлов:

□ — нержавеющая сталь; ○ — углеродистая сталь; △ — магний; × — алюминий; ● — медь

с геометрией и теплопроводностью ребристой поверхности.

Можно только считать, что показатель степени при числе Прандтля во всех случаях почти постоянен и равен 0,33—0,40.

На рис. 15.10 показаны результаты опытов В. Ф. Юдина и Л. С. Тохтаровой с пакетом труб, имеющих поперечное одновинтовое оребрение. Отчетливо видно влияние теплопроводности материала при $\lambda < 50$ Вт/(м · К). Действительным критерием этого влияния, конечно, является число Био, т. е. соотношение коэффициента теплоотдачи к ребру и его внутреннего термического сопротивления.

В литературе к главе указаны некоторые работы, позволяющие ориентироваться в данном вопросе.

## 15.2. ПРОДОЛЬНОЕ ОБТЕКАНИЕ ПАКЕТОВ ЦИЛИНДРОВ

При продольном обтекании цилиндров компоновка возможна от максимально тесной до весьма разреженной. В первом случае образуется система отдельных каналов сплошной конфигурации (рис. 15.11). Во втором случае имеет место практически независимое обтекание отдельных цилиндров (труб).

Для канала, образованного тремя дужками окружности, по опытам М. Х. Ибрагимова, В. И. Субботина и др., средний коэффициент теплоотдачи при турбулентном течении на 30—40% выше рассчитанного по формуле для круглой трубы при введении в качестве характерного линейного размера гидравлического диаметра

$$D_э = 4\Omega/P, \qquad (15.2.1)$$

где $P$ — периметр и $\Omega$ — площадь поперечного сечения канала.

Рис. 15.11. Продольное обтекание максимально тесной упаковки цилиндров

Для каналов с $1{,}15 < s/D < 1{,}25$ можно пользоваться расчетом по гидравлическому диаметру, не вводя в формулу для круглой трубы поправочного множителя. Однако здесь важно часто не столько знание среднего коэффициента теплоотдачи, сколько его локальные значения, особенно в застойных углах тесного канала. Для продольно омываемых пакетов труб по экспериментам Э. К. Калинина и Г. А. Дрейцера

$$\mathrm{Nu} = (0{,}032 s/D - 0{,}0144)\,\mathrm{Re}^{0{,}8}\,\mathrm{Pr}^{0{,}33}. \qquad (15.2.2)$$

Понятие среднего коэффициента теплоотдачи вообще может оказаться в ряде случаев бессодержательным. Кроме того, в каналах сплошной конфигурации значение $\bar{\alpha}$ существенно зависит от принятого закона осреднения температур.

Так, по данным В. К. Кошкина, Э. К. Калинина и др., в одном из узких продольно омываемых пакетов имело место соотношение условных средних коэффициентов теплоотдачи

$$1 < \frac{\int_0^{\varphi} \alpha(\varphi)\,d\varphi \left[\int_0^{\varphi} T_{ст}(\varphi)\,d\varphi - T_0\right]}{\varphi^2 q} < 2. \qquad (15.2.3)$$

В. И. Субботин с сотрудниками исследовали распределения температурного напора стенка—жидкость в тесном пучке труб (рис. 15.12) и коэффициентов теплоотдачи в пакетах с плотной упаковкой (рис. 15.13). Для продольно

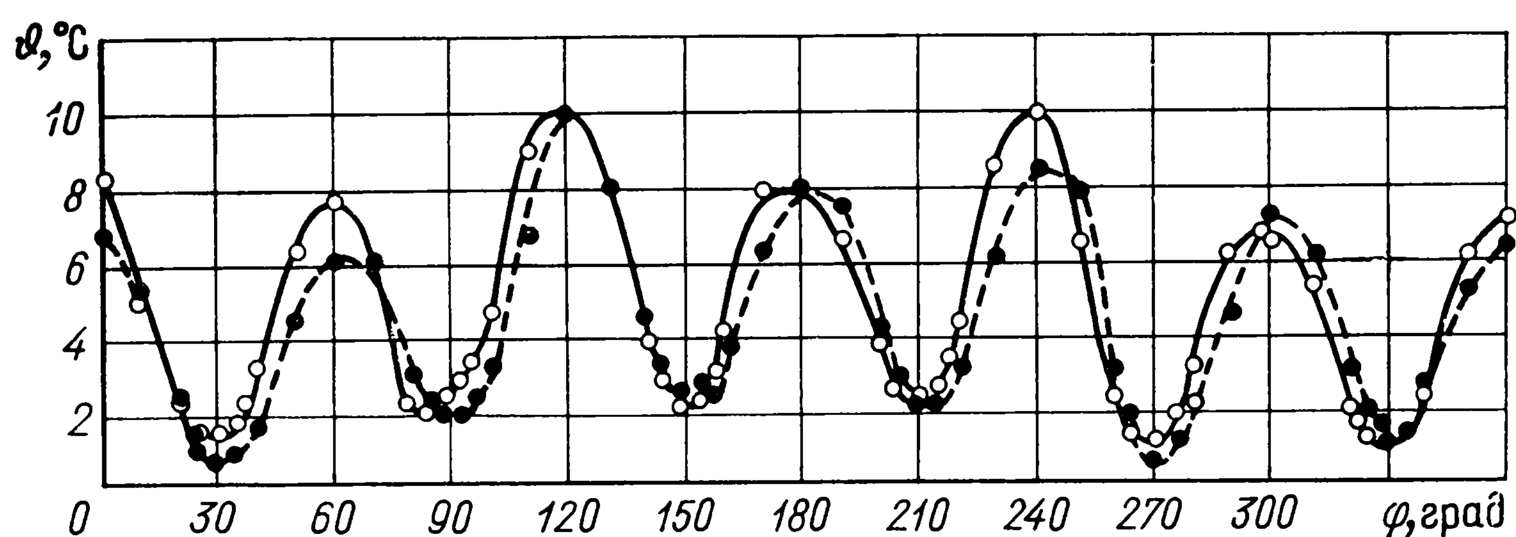



Рис. 15.12. Распределение температурного напора стенка—жидкость по периметру трубы в пучке ($s/D=1$)

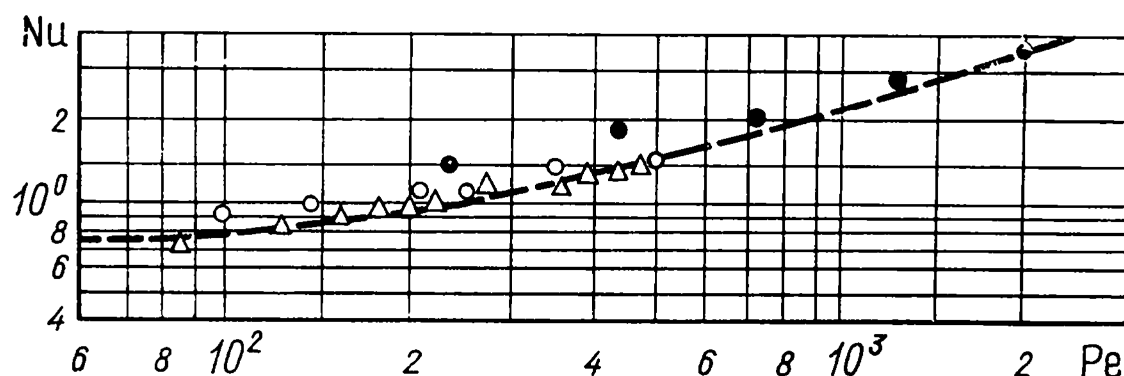



Рис. 15.13. Зависимость теплоотдачи от скорости в координатах $\mathrm{Nu}=f(\mathrm{Pe})$ для пучков различной геометрической конфигурации:

△—плотная шахматная упаковка, ртуть; ●—плотная коридорная упаковка, ртуть; ○—плотная коридорная упаковка, сплав 22%Na—78%K

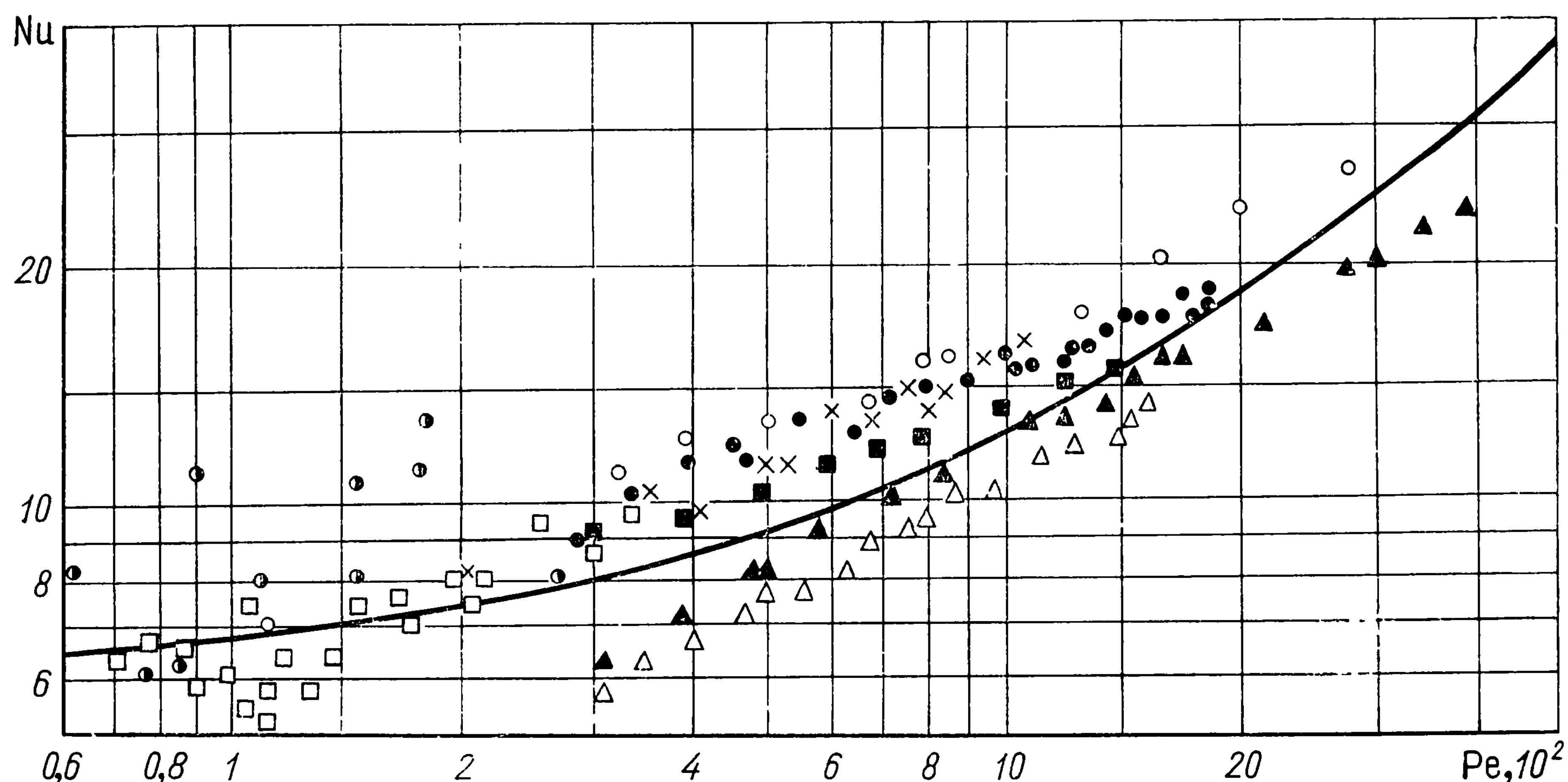



Рис. 15.14. Зависимость Nu от Pe при обтекании трубы жидкими металлами:
△, ▲, ●, ○—Pr=0,025; □, ◑—Pr=0,007; ■. ×—Pr=0,03

обтекаемых жидким металлом пакетов труб с $s/D = 1{,}2 \div 1{,}5$ ряд данных, получен В. М. Боришанским и его сотрудниками (рис. 15.14). Со значительным разбросом экспериментальные данные группируются вокруг простой линейной зависимости

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 6 + 0{,}006\,\mathrm{Pe}. \qquad (15.24)$$

Подробно данные о течении жидких металлов рассмотрены в монографии автора, В. М. Боришанского, И. И. Новикова и О. С. Федынского.

### 15.3. ПАКЕТЫ ШАРОВ

Схемы простых упорядоченных расположений шаров в пространстве могут быть различны (рис. 15.15). Во многих случаях применяются пакеты из тел других форм (призмы, короткие цилиндры, кольца и т. п.). Закрепленные слои таких тел мы будем называть пакетами или неподвижными слоями.

Пакет характеризуется геометрической формой составляющих его элементов, их характерными размерами, поверхностью и пористостью. Объемная пористость определяется формулой

$$\varphi = 1 - \rho_п/\rho_т, \tag{15.3.1}$$

где $\rho_п$ — плотность пакета (слоя, насыпки) и $\rho_т$ — плотность твердой компоненты (собственно тел, образующих пакет).

Пористость монодисперсного слоя шаров меняется от 0,476 при максимально рыхлой структуре до 0,259 при максимально плотной структуре. В первом

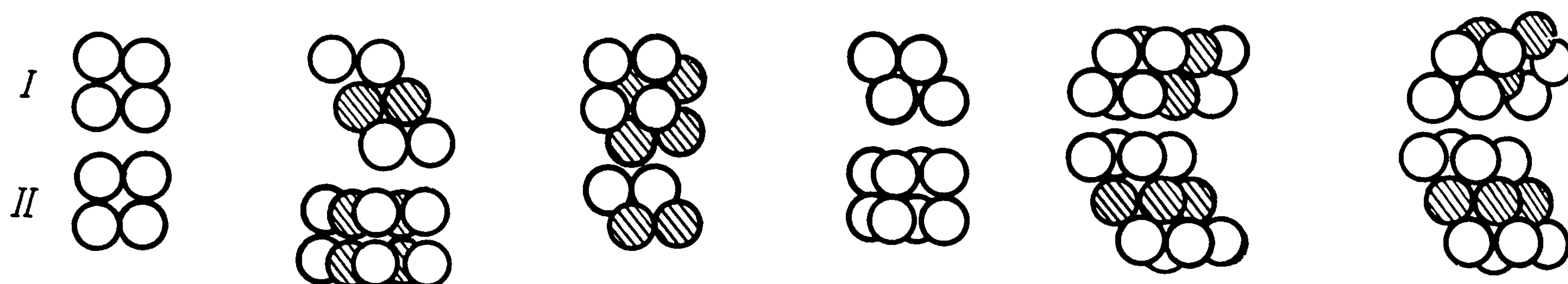



Рис. 15.15. Регулярные расположения шаров, поддерживающих друг друга, в пространстве:
*I* — вид сверху; *II* — вид спереди

приближении связь между пористостью слоя и числом мест контактов данного шара с соседними (координационное число $N_k$) линейна:

$$\varphi = 0{,}693 - 0{,}0372 N_k. \tag{15.3.2}$$

Средняя расходная скорость течения сквозь слой определяется как

$$\overline{w} = G/(\Omega\rho\varphi). \tag{15.3.3}$$

Здесь $G$ — массовый расход газа (жидкости) через поперечное сечение слоя площадью $\Omega$; $\rho$ — плотность текущей среды.

Средняя максимальная расходная скорость течения определяется по минимальному проходному сечению слоя $\psi$. Для монодисперсного слоя шаров

$$\overline{w}_{макс} \approx G/(\Omega\rho\psi). \tag{15.3.4}$$

Для кубической структуры слоя $\varphi = 0{,}476$ и $\psi = 0{,}215$; для тетраэдрической $\varphi = 0{,}259$ и $\psi = 0{,}0931$. Эквивалентный гидравлический диаметр слоя определяется формулой

$$D_э = 4\varphi/[f_0(1-\varphi)], \tag{15.3.5}$$

где $f_0$ — удельная поверхность частиц. Для шара $f_0 = 6/D$.

Многие расчетные формулы по сопротивлению и теплоотдаче в слоях частиц построены по эквивалентному диаметру и средней расходной скорости. Соответствующее выражение для градиента давления по толщине слоя имеет вид

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\zeta_э f_0}{2\varphi^3}\rho\overline{w}^2. \tag{15.3.6}$$

Для монодисперсного слоя шаров

$$-dp/dx = 3\zeta_э\rho\overline{w}^2/(\varphi^3 D). \tag{15.3.7}$$

Коэффициент гидравлического сопротивления в последней формуле определяется эмпирическими зависимостями:

$$\left.\begin{aligned} &0 < \mathrm{Re}_э < 2\cdot10^3;\ \zeta_э = 36{,}4/\mathrm{Re}_э + 0{,}45;\\ &2\cdot10^3 < \mathrm{Re}_э < 1\cdot10^5.\ \zeta_э = 1{,}09/\mathrm{Re}_э^{0{,}4}. \end{aligned}\right\} \tag{15.3.8}$$

При ламинарном режиме течения в слое коэффициент теплоотдачи от сферических частиц к протекающей жидкости может быть определен по формуле Пфеффера:

$$\mathrm{Nu} = f(\varphi)\,\mathrm{Re}^{1/3}, \tag{15.3.9}$$

где

$$f(\varphi) = \frac{1-(1-\varphi)^{5/3}}{2-3(1-\varphi)^{1/3}+3(1-\varphi)^{5/3}-2(1-\varphi)^2}.$$

На рис. 15.16 приведен ряд экспериментальных данных М. Э. Аэрова и О. М. Тодеса о зависимости Nu (Pr, Re) в области чисел Рейнольдса частицы

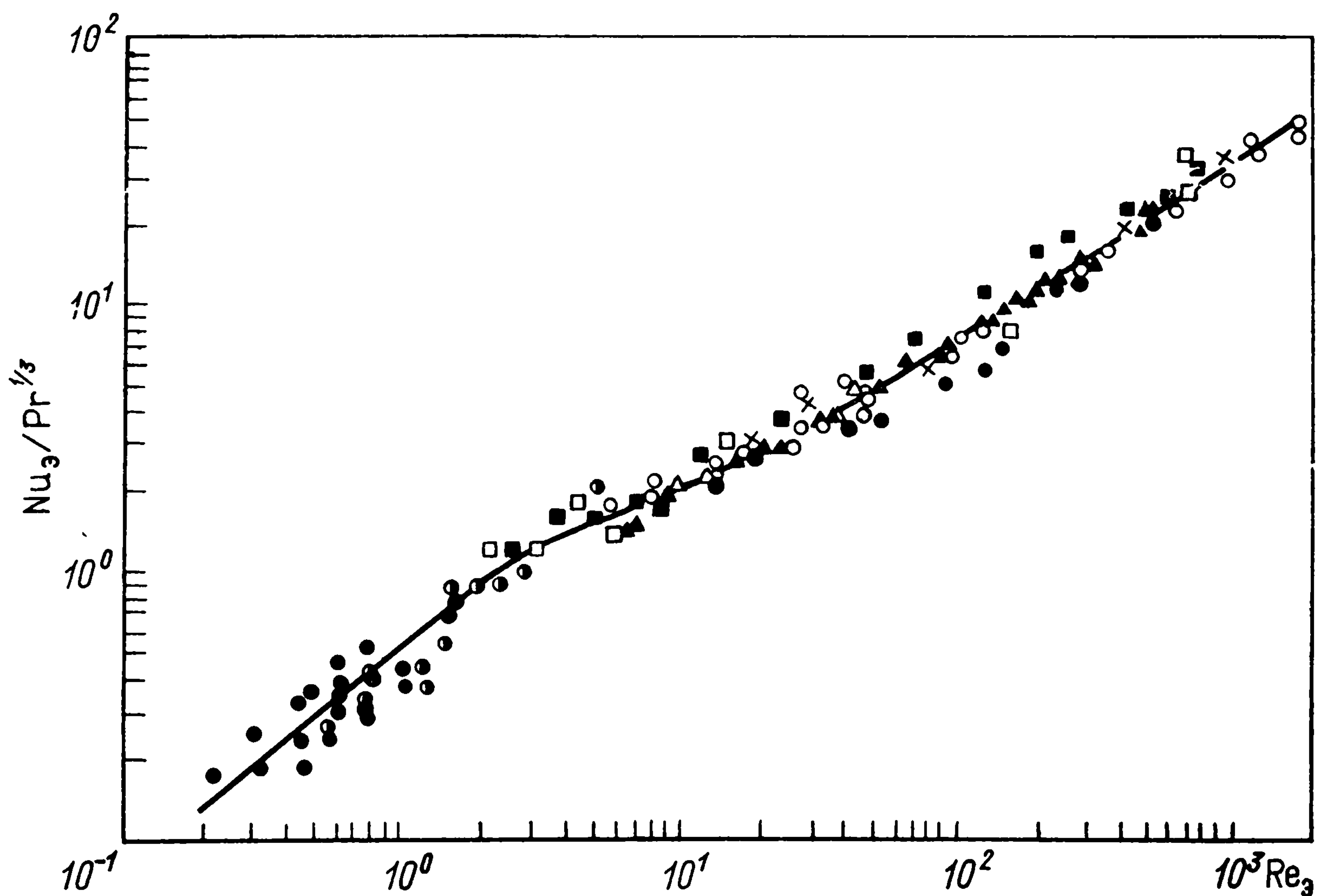



Рис. 15.16. Результаты опытов по испарению элементов зернистого слоя из нафталина в газ:

○, □, ■, ●, ◑ — стальные шарики ($D$ = 3,19÷19,35 мм); ×, ▲ — катализатор таблетки ($D$ = 6,65 мм, $H$ = 6,95 мм и $D$ = 9,1 мм, $H$ = 10,2 мм); △ — кольца Рашига ($D = H$ = 8 мм)

слоя от 0,2 до 1000. Эти опыты для различных областей изменения Re описываются зависимостями

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Re_э} < 2;\ \mathrm{Nu_э} = 0{,}51\,\mathrm{Pr}^{1/3}\,\mathrm{Re_э^{0,85}};\\ 2 < &\mathrm{Re_э} < 30;\ \mathrm{Nu_э} = 0{,}72\,\mathrm{Pr}^{1/3}\,\mathrm{Re_э^{0,47}};\\ &\mathrm{Re_э} > 30;\ \mathrm{Nu_э} = 0{,}39\,\mathrm{Pr}^{1/3}\,\mathrm{Re_э^{0,64}}. \end{aligned}\right\} \tag{15.3.10}$$

### 15.4. КИПЯЩИЙ СЛОЙ

Если слой частиц удерживается в неподвижном состоянии некоторой объемной силой (гравитационной, центробежной, магнитной), то при достижении определенного значения динамического напора текущей через слой жидкости наступает нарушение устойчивости и возникает так называемое псевдоожиженное состояние слоя твердых частиц. Такой взрыхленный динамическим воздействием жидкой среды слой называют также *кипящим*.

Возникновение кипящего слоя можно характеризовать первым критическим значением скорости течения жидкости через слой. Полное разрушение, сопровождающееся выносом всех или большинства частиц слоя, характеризуется второй критической скоростью течения жидкости через слой. В промежуточной области кипящий слой обладает механизмом саморегулирования, основанным на дисбалансе подъемной силы, действующей на частицы, и изменением скорости течения с изменением порозности слоя. Повышение динамического напора в какой-то части слоя приводит к увеличению свободного прохода для текущей

среды и, следовательно, к уменьшению ее скорости и динамического воздействия на твердые частицы.

Однако такой слой обладает рядом неустойчивостей, о которых кратко будет показано в соответствующем разделе этой главы. Пока что мы будем считать его достаточно однородным. Основным условием возникновения псевдоожиженного слоя является равенство градиента гидродинамического сопротивления в слое насыпному весу этого слоя (рис. 15.17).

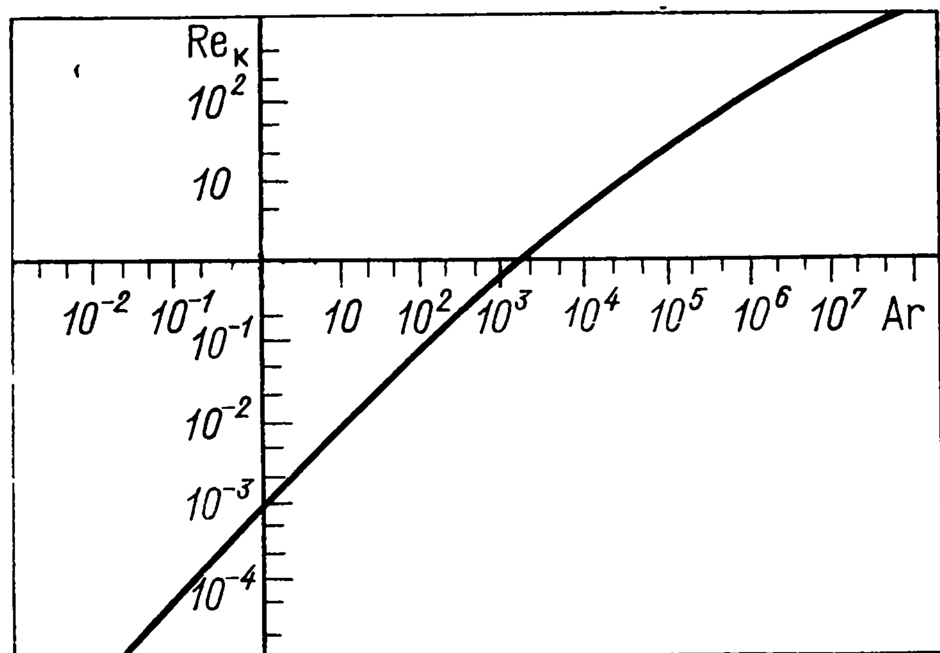



Рис. 15.17. Зависимость критического числа Рейнольдса начала псевдоожижения от числа Архимеда слоя

Эффективная модель однородного монодисперсного кипящего слоя шаров была предложена М. А. Гольдштиком. Геометрия такого слоя определяется формулами

$$\frac{s}{D}=\left(\frac{1-\varphi_0}{1-\varphi}\right)^{1/3}-1;$$

$$\psi=1-(1-\psi_0)\left(\frac{1-\varphi}{1-\varphi_0}\right)^{2/3}. \quad (15.4.1)$$

Здесь $s$ — расстояние между частицами слоя; $\varphi$ — порозность кипящего слоя; $\varphi_0$ — порозность плотного слоя с тем же расположением частиц; $\psi$ — минимальное проходное сечение; $\psi_0$ — минимальное проходное сечение в плотном слое. Для кипящего слоя можно принять

$$\psi\approx 1-1{,}17\,(1-\varphi)^{2/3}. \quad (15.4.2)$$

Двужидкостная модель кипящего слоя предполагает, что хаотическое движение твердых частиц аналогично движению молекул и, следовательно, в приближении элементарной (бернуллиевской) модели газа можно написать уравнение импульсов в следующем виде:

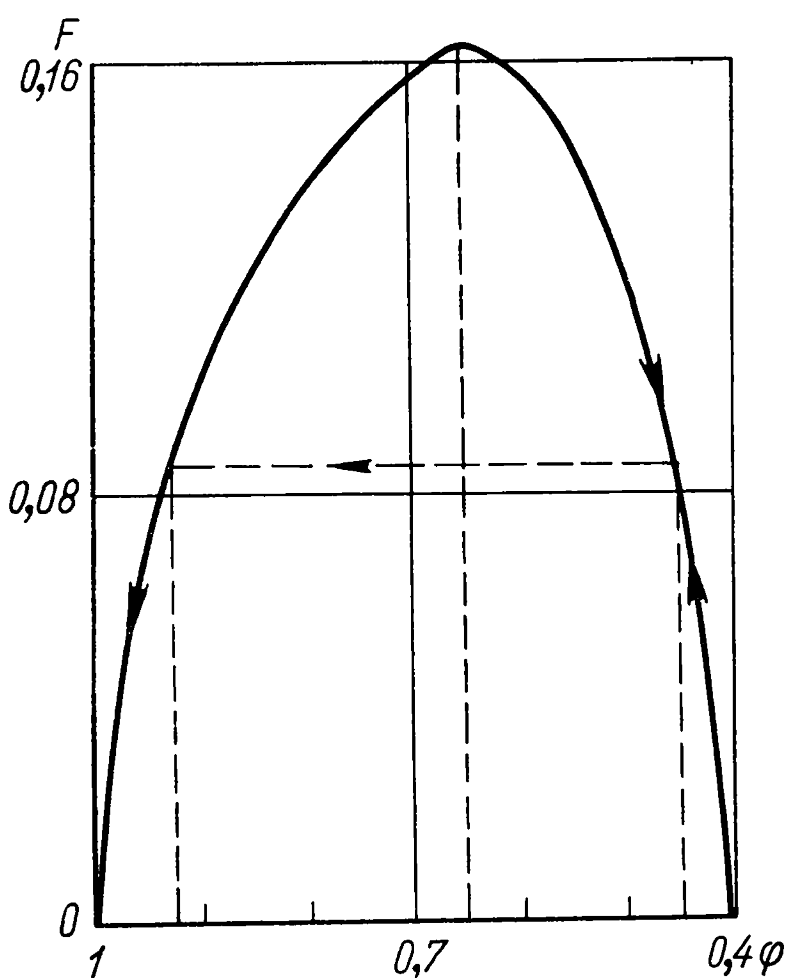



Рис. 15.18. Зависимость $F$ от порозности $\varphi$

$$\frac{dp_{\text{т}}}{dx}=(1-\varphi)\left[\frac{3\zeta\bar{w}^2\rho}{4D\psi^2}-g\,(\rho_{\text{т}}-\rho)\right], \quad (15.4.3)$$

где $p_{\text{т}}$ — парциальное давление «газа твердых частиц»; $x$ — координата, направленная против вектора силы тяжести.

В плотном кипящем слое частицы расположены так близко друг к другу, что в процессе их соударений с контрольной площадкой участвует лишь один ближайший слой (гипотеза монослойной экранировки взаимодействия частиц). Тогда парциальное давление «газа твердых частиц» определяется известным соотношением кинетической теории газов:

$$p_{\text{т}}=\frac{2D}{3l}\,(1-\varphi)\,\rho_{\text{т}}C^2, \quad (15.4.4)$$

где $C$ — средняя скорость хаотического движения частиц, а $l$ — расстояние между частицами, определяющие длину их свободного пробега. М. А. Гольдштик показал, что основную роль в генерации хаотического движения частиц кипящего слоя играет поперечная сила Магнуса, возникающая при обтекании вращающегося тела.

В результате представляется разумной следующая модель кипящего слоя. Возникновение движения обусловлено гидродинамической неустойчивостью

конфигурации покоя, возникающей при достижении критической скорости фильтрации. После возникновения движения решающую роль приобретает передача энергии от потока жидкости к слою частиц с помощью эффекта Магнуса. Этот эффект возникает вследствие вращения частиц, поддерживаемого в про-

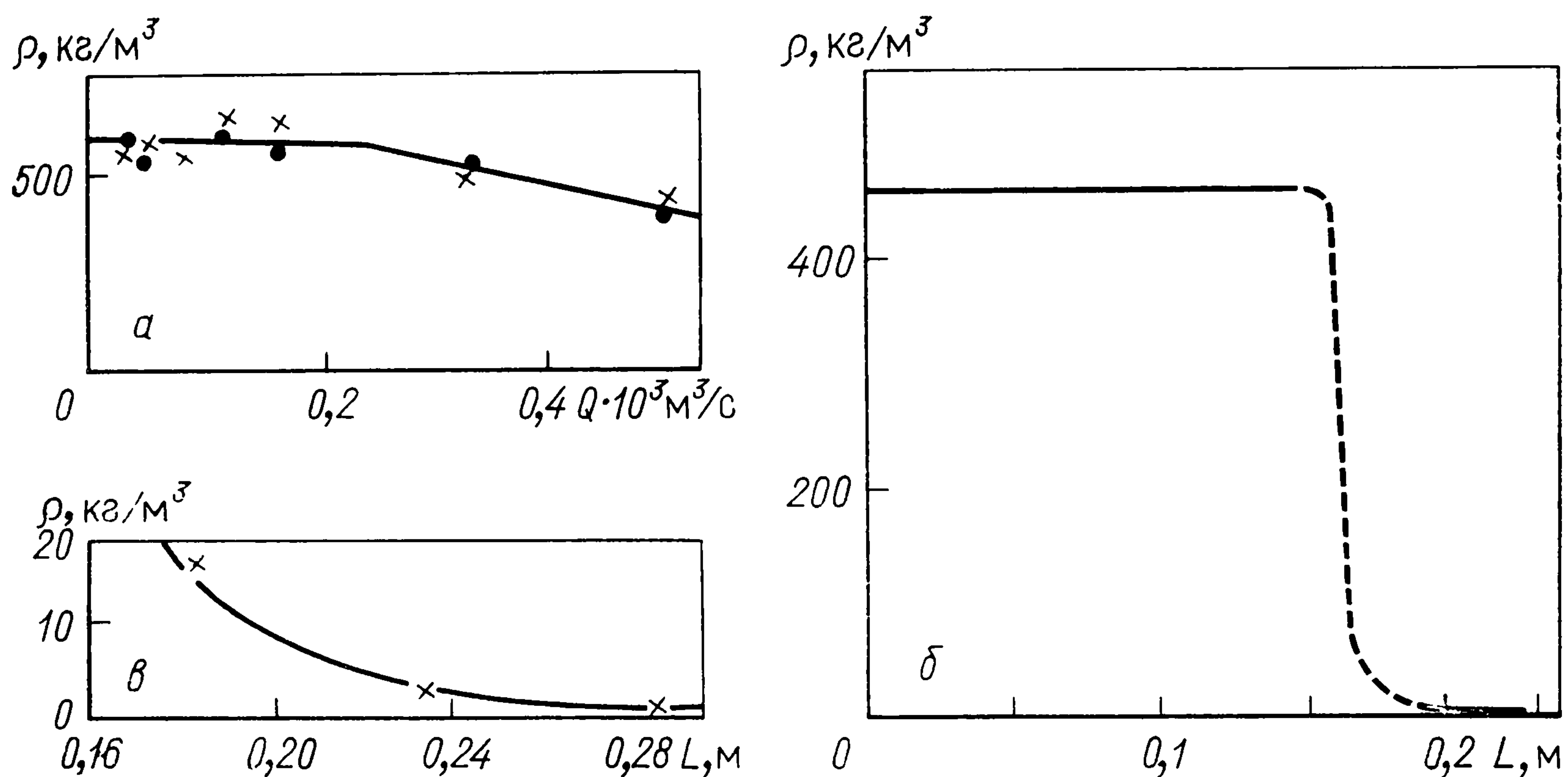



Рис. 15.19. Распределение плотностей в полидисперсном кипящем слое при различных скоростях потока (*а*), по высоте кипящего слоя (*б*) и по высоте кипящего слоя для зон малых плотностей (*в*)

цессах соударений друг с другом и стенкой. Сила взаимодействия потока с вращающимися частицами при $w \gg C$ может быть записана формулой

$$F_M = (\sqrt{10}/3)\,\rho\pi D^2 \overline{w}\, C. \qquad (15.4.5)$$

Окончательное выражение для импульса имеет вид

$$\left.\begin{aligned} p_{\text{т}} &= \frac{107\rho^2 w_0^2}{(1-k^2)^2 \rho_{\text{т}}} F(\varphi); \\ F(\varphi) &= \frac{1-\varphi}{\varphi^2}\left[\left(\frac{1-\varphi_0}{1-\varphi}\right)^{1/3} - 1\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (15.4.6)$$

Здесь $k$ — коэффициент восстановления для неупругого удара. Максимальное значение импульса имеет место при $\varphi = 0{,}65$ (рис. 15.18). Для устойчивости плотного слоя необходимо выполнение условия $dp_{\text{т}}/d(1 - \varphi) < 0$, что возможно при $\varphi < 0{,}65$.

Отсюда можно показать, что условием существования плотного слоя является неравенство

$$0{,}17 < \overline{w}/w_0 < 0{,}42, \qquad (15.4.7)$$

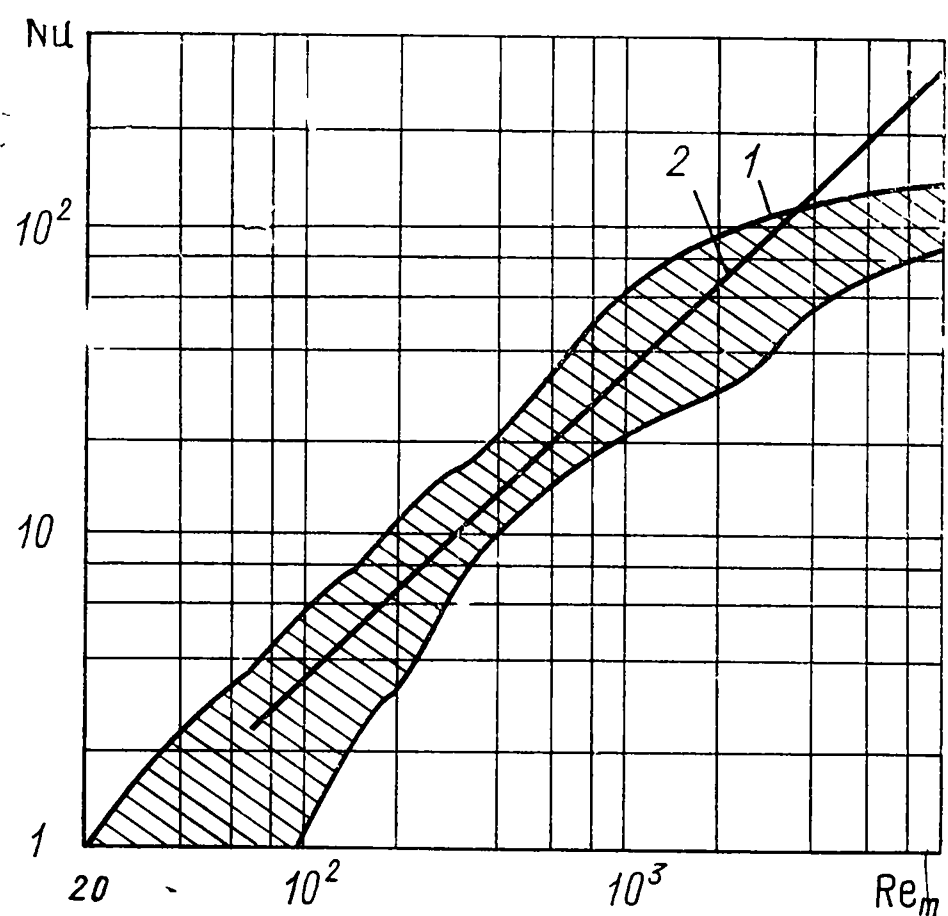



Рис. 15.20. Теплоотдача в кипящих слоях: *1* — область экспериментальных данных; *2* — расчетная зависимость

где $w_0$ — скорость свободного витания частицы.

Реальный переход от состояния плотного слоя к состоянию квазиравновесного витания определяется пунктирным прямоугольником на рис. 15.18. Эксперимент подтверждает, что над плотным слоем частиц может иметь место слой весьма малой концентрации, т. е. «пар» из частиц, выносимых из основного слоя. Скорость витания определяется известной формулой

$$w_0 = \sqrt{4\,(\rho_{\text{т}} - \rho)\, gD/3\rho\zeta_0}, \qquad (15.4.8)$$

где $\zeta_0$ — коэффициент гидравлического сопротивления твердой частицы. На рис. 15.19 приведены экспериментальные данные, подтверждающие эту модель для плотных слоев.

Как видно из рис. 15.20, в принятых координатах опытные данные имеют достаточно большой разброс, т. е. здесь еще далеко до однозначных результатов. Для оценок можно пользоваться формулой

$$\mathrm{Nu} \approx 0{,}03\mathrm{Pr}^{1/3}\,\mathrm{Re}_m. \tag{15.4.9}$$

## 15.5. НЕОДНОРОДНОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СЛОЕ ЧАСТИЦ

Здесь нет возможности сколь-либо подробно осветить эту важную технологическую проблему, и мы ограничимся только одним примером.

В неподвижных слоях возникают пристенный эффект и неоднородность плотности распределения частиц по слою. На рис. 15.21 приведены соответствующие данные для одного из реакторов по М. Э. Аэрову и О. М. Тодесу. Газораспределителем в данном случае служит перфорированная решетка.

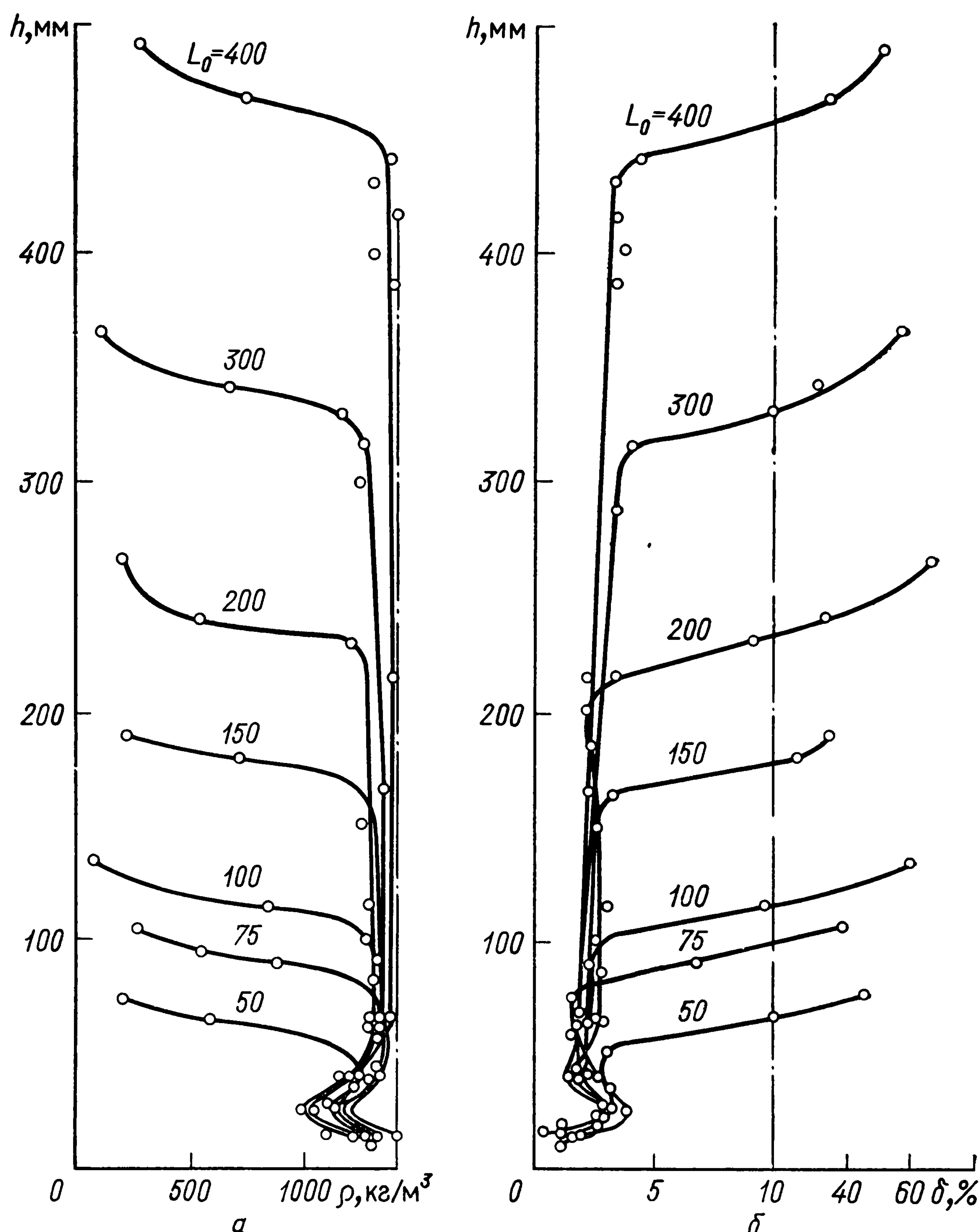



Рис. 15.21. Распределение локальной плотности $\bar{\rho}$ (*а*) и ее относительной пульсации $\delta$ (*б*) по оси колонки для разных значений высоты неподвижного слоя $L_0$, мм

В кипящем слое малой высоты поток жидкости (газа) может пробивать каналы, в результате чего значительная часть текучей среды проходит без взаимодействия с твердыми частицами.

В слое возможно образование пузырей, т. е. пространства, практически не заполненного твердыми частицами.

Во вращающихся неконцентрированных слоях возникают неустойчивости типа волн на внешней границе слоя, образования «рукавов», удивительно напоминающих фотографии спиральных галактик, собирание частиц в большие комки, совершающие индивидуальное вращение в закрученном потоке текущей среды.

Все эти эффекты влияют и на процессы теплообмена в слое.

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*


1. **Антуфьев В. М., Белецкий Г. С.** Теплоотдача и сопротивление трубчатых поверхностей в поперечном потоке. М., Машгиз, 1948.
2. **Антуфьев В. М.** Эффективность различных форм конвективных поверхностей нагрева. М.—Л., «Энергия», 1966.
3. **Аэров М. Э., Тодес О. М.** Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. Л., «Химия», 1968.
4. **Берман Л. Д.** Испарительное охлаждение циркуляционной воды. М., Госэнергоиздат, 1957.
5. **Гольдштик М. А.** Элементарная теория кипящего слоя.— «Журн. прикл. механ. и техн. физ.», 1972, № 6, с. 106.
6. **Жидкометаллические** теплоносители. М., Атомиздат, 1973. Авт.: В. М. Боришанский, С. С. Кутателадзе, И. И. Новиков, О. С. Федынский.
7. **Жаворонков Н. М.** Гидравлические основы скрубберного процесса и теплоотдача в скрубберах. М., «Сов. наука», 1944.
8. **Жукаускас А., Макарявичус В., Шланчяускас А.** Теплоотдача пучков труб в поперечном потоке жидкости. Вильнюс, «Минтис», 1968.
9. **Забродский С. С.** Гидравлика и теплообмен в псевдоожиженном слое. М.— Л., Госэнергоиздат, 1963.
10. **Карасина Э. С.** Теплообмен в пучках труб с поперечными ребрами. — «Изв. Всесоюз. теплотехн. ин-та», 1952, № 12, с. 12.
11. **Кошкин В. К., Калинин Э. К.** Теплообменные аппараты и теплоносители. М., «Машиностроение», 1971.
12. **Кузнецов Н. В., Щербаков А. З., Титова Е. Я.** Новые расчетные формулы для аэродинамического сопротивления поперечно обтекаемых трубных пучков.— «Теплоэнергетика», 1954, № 9, с. 27.
13. **Ляпин М. Ф.** Теплоотдача и аэродинамическое сопротивление гладкотрубных пучков при больших числах Re газового потока.— «Теплоэнергетика», 1956, № 9, с. 49.
14. **Методика** и зависимости для теоретического расчета теплообмена и гидравлического сопротивления теплообменного оборудования АЭС, РТМ 24 031 05—72. М., Минтяжмаш, 1972.
15. **Михайлов Г. А.** Конвективный теплообмен в пучках труб.— «Советское котлотурбостроение», 1939, № 12, с. 434.
16. **Петровский Ю. В., Фастовский В. Г.** Современные эффективные теплообменники. М.— Л., Госэнергоиздат, 1962. (Тр. ВЭИ, вып. 70).
17. **Сыромятников М. И., Васанова Л. К., Шиманский Ю. Н.** Тепло- и массообмен в кипящем слсе. М., «Химия», 1967.
18. **Тепловые** и гидравлические характеристики пучков из труб с поперечными ребрами при продольном обтекании — «Теплоэнергетика», 1973, № 6, с. 70. Авт. : О. С. Виноградов, П. И. Пучков, А. В. Иванова и др.
19. **Тепловой** расчет котельных агрегатов (нормативный метод). М.—Л., Госэнергоиздат, 1957.
20. **Шолохов А. А., Минашин В. Е.** Теплообмен при продольном течении жидкости в пучках стержней.— «Атомная энергия», 1968, т. 25, вып. 4, с. 280.
21. **Юдин В. Ф., Тохтарова Л. С.** Теплоотдача и сопротивление пучков оребренных труб с различными высотами и шагами ребер при больших числах Re.— «Энергомашиностроение», 1972, № 12, с. 21.
22. **Юдин В. Ф., Тохтарова Л. С.** Влияние теплопроводности ребер и теплоносителя на теплоотдачу пучков ребристых труб при поперечном омывании. — «Теплоэнергетика», 1971, № 9, с. 66.
23. **Siennicki S.** Prace Instituta techniki cieplnej, Lod 7, 1964.

# Глава 16 ГИДРОДИНАМИКА И ТЕПЛООБМЕН В СРЕДАХ С НЕЛИНЕЙНЫМ ЗАКОНОМ МОЛЕКУЛЯРНОГО ТРЕНИЯ

## 16.1. ЖИДКОСТИ С НЕЛИНЕЙНОЙ КРИВОЙ ТЕЧЕНИЯ

Кривой течения называют зависимость между касательными напряжениями и градиентом скорости в плоском одномерно ламинарном изотермическом потоке, когда скорость $w$ меняется только по нормали к направлению течения. У жидкостей, подчиняющихся закону трения Ньютона, в рассматриваемых условиях

$$\frac{\tau}{dw/dy} = \mu = \text{const} \tag{16.1.1}$$

и кривая течения линейна.

Идеальный газ является наиболее точной моделью ньютоновской жидкости. Практически таково поведение и реальных жидкостей с небольшими молекулами. Жидкости с большими молекулами имеют нелинейные кривые течения и могут быть разделены на несколько классов.

1. Жидкости с однозначной, но нелинейной связью между напряжением и скоростью сдвига в данной точке*. Мы будем называть их жидкостями со структурной вязкостью.

2. Жидкости с меняющейся во времени связью между напряжением и скоростью сдвига. Мы будем называть их жидкостями с нестационарным законом трения.

3. Жидкости вязкоупругие, т. е. проявляющие частичное упругое восстановление формы после снятия напряжения.

Системы, состоящие из мелких твердых частиц, в неньютоновской жидкости ведут себя в целом как среды с нелинейной кривой течения. В такого рода средах перестройка ориентации молекул и их взаимодействия в процессе течения влияет не только на коэффициент вязкости $\mu$, определяемый по формуле (16.1.1), но и на другие коэффициенты переносов. Однако во многих случаях коэффициент теплопроводности меняется существенно меньше, чем коэффициент вязкости.

Следует также отметить, что вследствие большой вязкости жидкостей с крупными молекулами их течение в практических условиях обычно является ламинарным.

Ниже мы рассмотрим главным образом некоторые вопросы гидродинамики и теплообмена жидкостей со структурной вязкостью.

## 16.2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ТЕКУЧЕСТЬЮ И КАСАТЕЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ СО СТРУКТУРНОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

Анализ экспериментальных данных показывает, что текучесть $\varphi = \mu^{-1}$ является более простой функцией касательных напряжений $\tau$, чем собственно динамический коэффициент вязкости.

Значительное число сложных эмпирических выражений, основанных на более или менее удачной аппроксимации нелинейной кривой течения в некотором интервале напряжений или скоростей сдвига, не нашло широкого использования, а наиболее распространенная степенная формула Оствальда, подку-

---

*
$$\frac{dw}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma},$$

$t$ — время, $\gamma = dx/dy$ — сдвиг и $\dot{\gamma}$ — скорость сдвига.

пая простотой последующих операций с нею, не выдерживает критики ни с точки зрения соответствия предельным свойствам $\varphi(\tau)$, ни с точки зрения размерности входящих в нее коэффициентов.

Ниже излагаются результаты, полученные автором совместно с Е. М. Хабахпашевой и В. И. Поповым. На рис. 16.1 схематично показана общая зависимость $\varphi(\tau)$ для случая $d\varphi/d\tau > 0$ при $\tau > \tau_1$ по экспериментальным данным ряда авторов. В области $\tau < \tau_0$ $\varphi = 0$ и жидкость проявляет так называемую условную упругость. В области $\tau_0 < \tau < \tau_1$ поведение жидкости характеризуется постоянной текучестью $\varphi_0$. Естественно, что в определении $\tau_1$ есть некоторая условность, ибо переход от постоянной текучести $\varphi_0$ к переменной осуществляется плавно на некотором отрезке $\Delta\tau$.

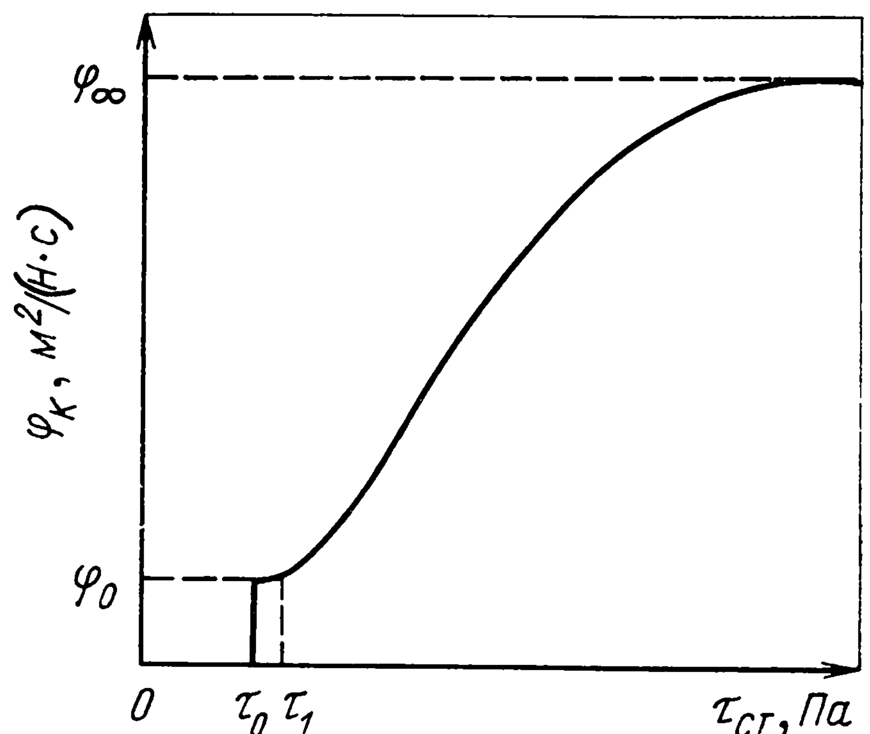


Рис. 16.1. Зависимость $\varphi$ от $\tau$

Величину $\tau_1$ назовем пределом устойчивости макроструктуры жидкости, а $\varphi_0$ — нулевой текучестью. Соответственно текучесть при $\tau \to \infty$ обозначим $\varphi_\infty$*. В качестве масштаба изменения текучести естественно выбрать разность $\varphi_\infty - \varphi_0$, а в качестве искомой переменной — дефект текучести $\varphi_\infty - \varphi$. Тогда из величин $\varphi$, $\varphi_0$, $\varphi_\infty$ и $\tau - \tau_1$ можно образовать два безразмерных комплекса, вводя некоторую величину $\Theta$, которая может служить мерой структурной стабильности жидкости:

$$\{\varphi_* = (\varphi_\infty - \varphi)/(\varphi_\infty - \varphi_0) \quad \text{и} \quad \tau_* = \Theta(\tau - \tau_1)/(\varphi_\infty - \varphi_0)\}. \qquad (16.2.1)$$

Зависимость $\varphi_*(\tau_*)$ имеет одинаковый характер для жидкостей как с возрастающей ($\varphi_\infty > \varphi_0$), так и с уменьшающейся ($\varphi_\infty < \varphi_0$) текучестью. При этом всегда $d^2\varphi_*/d\tau_*^2 > 0$, и текучесть жидкости можно формально описать уравнением

$$d\varphi_* = -\varphi^n \, d\tau_*. \qquad (16.2.2)$$

Соответственно

$$\text{при} \quad \tau_0 < \tau < \tau_1 \qquad \varphi_* = 1; \qquad (16.2.3)$$

$$\text{при} \quad \tau > \tau_1, \ n = 1 \qquad \varphi_* = \exp(-\tau_*); \qquad (16.2.4)$$

$$\text{при} \quad \tau > \tau_1, \ n \neq 1 \qquad \varphi_* = [1 - \tau_*(1 - n)]^{1/(1-n)}. \qquad (16.2.5)$$

Отсюда следует, что текучесть при $n = 1$ характеризуется набором пяти величин:

$$\{\tau_0; \quad \tau_1; \quad \varphi_0; \quad \varphi_\infty; \quad \Theta\}. \qquad (16.2.6)$$

В сильно структурированных жидкостях разрушение структуры под влиянием напряжения сдвига приводит к значительному изменению текучести. К таким жидкостям относятся расплавы полимеров, концентрированные суспензии, пасты, битумы и т. п. Для слабо структурированных жидкостей (растворов полимеров, низкоконцентрированных суспензий, эмульсий, латексов) под действием напряжения сдвига текучесть меняется сравнительно слабо.

При достаточно малых $\tau_*$ практически интересная область удовлетворительно описывается первыми двумя-тремя членами разложения уравнения (16.2.4)**. Переписав его с учетом уравнения (16.2.1) в виде

$$\varphi = \varphi_\infty - (\varphi_\infty - \varphi_0) \exp[-\Theta(\tau - \tau_1)/(\varphi_\infty - \varphi_0)], \qquad (16.2.7)$$

получим

$$\varphi = \varphi_0 + \Theta(\tau - \tau_1) - (\Theta^2/2)(\tau - \tau_1)^2/(\varphi_\infty - \varphi_0) + \ldots \qquad (16.2.8)$$

---

* У так называемых дилатантных жидкостей $d\varphi/d\tau < 0$.

** Следует также иметь в виду, что у большинства жидкостей $\tau_1 \approx 0$.

или, ограничиваясь двумя первыми членами разложения,

$$\varphi=\varphi_0+\dot{\Theta}(\tau-\tau_1). \quad (16.2.9)$$

Последняя формула весьма удобна для построения приближенных методов расчета течения жидкостей со структурной вязкостью. Поэтому целесообразно в теории выделить специальный подкласс жидкостей с линейным законом текучести. Для дилатантной жидкости перед вторым членом формулы (16.2.9) следует ставить знак минус.

## 16.3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРИ СТАБИЛИЗИРОВАННОМ ИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАКОНОМ ТЕКУЧЕСТИ

При ламинарном течении жидкости в цилиндрическом канале распределение касательных напряжений имеет вид

$$\tau=\tau_{ст}\,\xi, \quad (16.3.1)$$

где $\xi = R/R_0$ — безразмерный радиус.

При $\tau_0 = 0$ и $\tau < \tau_1$ в результате интегрирования уравнения

$$dw/dR = -\varphi(\tau-\tau_0), \quad (16.3.2)$$

где $\tau = -(R/2)(dp/dx)$, получим профиль скорости:

$$w=\frac{\tau_{ст}\varphi_0 R_0}{2}\left(1-\frac{R^2}{R_0^2}\right).$$

При $\tau_1 = 0$ и линейном законе текучести

$$\varphi=\varphi_0(1+\tau\Theta/\varphi_0) \quad (16.3.3)$$

получим

$$w=\frac{\tau_{ст}R_0\varphi_0}{2}\left[(1-\xi^2)+\frac{2}{3}\frac{\Theta}{\varphi_0}\tau_{ст}(1-\xi^3)\right]; \quad (16.3.4)$$

$$w_{макс}=\frac{\tau_{ст}R_0\varphi_0}{2}\left(1+\frac{2}{3}\frac{\Theta}{\varphi_0}\tau_{ст}\right); \quad (16.3.5)$$

$$\bar{w}=\frac{\tau_{ст}R_0\varphi_0}{4}\left(1+\frac{4}{5}\frac{\Theta}{\varphi}\tau_{ст}\right); \quad (16.3.6)$$

$$\omega=\frac{w}{\bar{w}}=2\,\frac{1-\xi^2+(2\Theta/3\varphi_0)\tau_{ст}(1-\xi^3)}{1+4\tau_{ст}\Theta/5\varphi_0} \quad (16.3.7)$$



Рис. 16.2. Распределение скоростей по формуле (16.3.7)

и

$$\omega_{макс}=\frac{w_{макс}}{\bar{w}}=2\,\frac{1+2\tau_{ст}\Theta/3\varphi_0}{1+4\tau_{ст}\Theta/5\varphi_0}, \quad (16.3.8)$$

где $w_{макс}$ — максимальная скорость на оси трубы; $\bar{w}$ — средняя расходная скорость.

Из рис. 16.2 следует, что при $\Theta > 0$ профиль скоростей более заполнен, чем при течении жидкостей с линейной кривой течения ($\Theta = 0$). При $\Theta < 0$ профиль менее заполнен.

В рассматриваемом случае число Рейнольдса потока целесообразно строить в виде

$$\mathrm{Re}_0 = \overline{w} D \varphi_0 \rho, \tag{16.3.9}$$

где $\varphi_0 = 1/\mu_0$ — нулевая текучесть (при $\tau \to 0$).

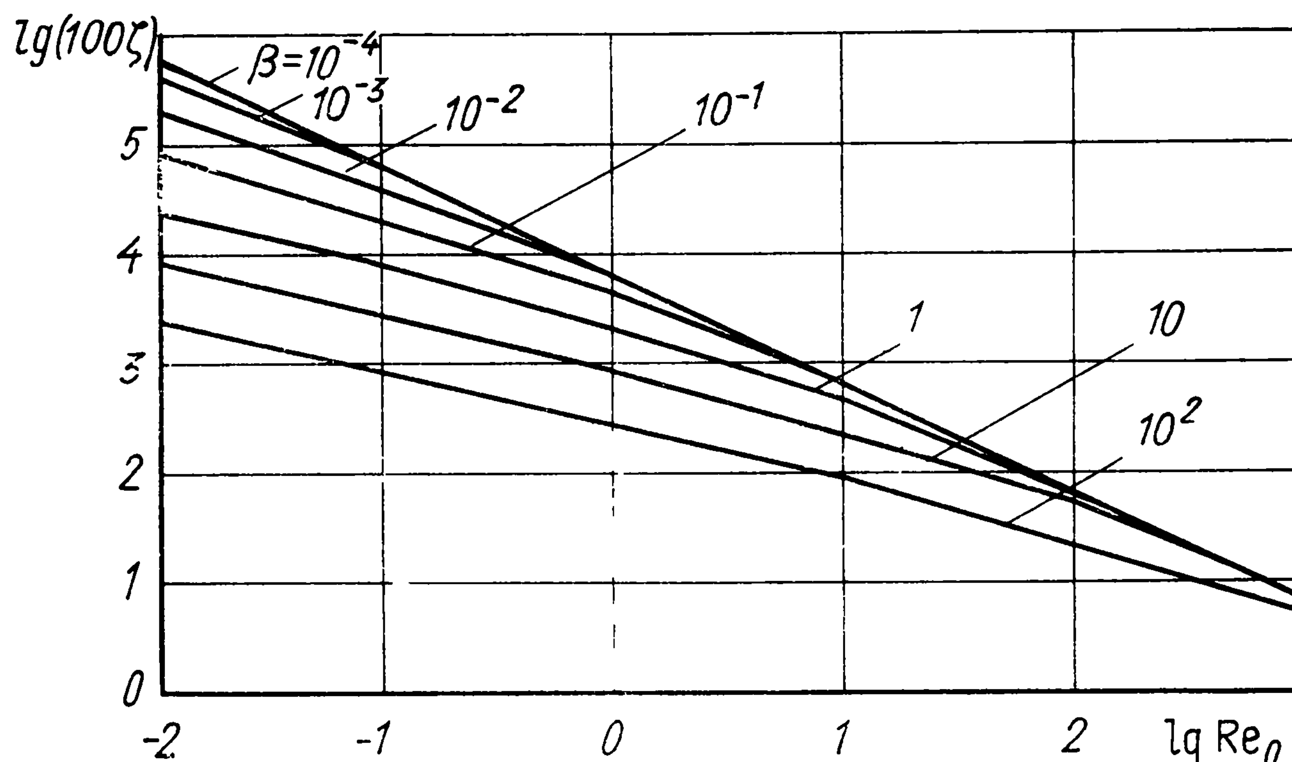



Рис. 16.3. Зависимость $\zeta$ от $\mathrm{Re}_0$ по формуле (16.3.10)

Учитывая формулу (16.3.6), находим, что

$$\zeta = \frac{8\tau_{\text{ст}}}{\rho \overline{w}^2} = \frac{5}{\beta}\left(\sqrt{1 + \frac{128\beta}{5\mathrm{Re}_D}} - 1\right), \tag{16.3.10}$$

где $\beta = \Theta\rho\overline{w}^2/\varphi_0$ (рис. 16.3).

## 16.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ОБТЕКАНИИ ПЛАСТИНЫ

В этом случае профиль касательных напряжений аппроксимируется формулой (см. гл. 9)

$$\tau \approx \tau_{\text{ст}}(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3). \tag{16.4.1}$$

Распределение продольной составляющей вектора скорости при линейном законе текучести определяется уравнением

$$dw_x/dy = \varphi_0 \tau + \Theta\tau^2. \tag{16.4.2}$$

Отсюда

$$w_x = \tau_{\text{ст}} \varphi_0 \delta \left[\xi - \xi^3 + \frac{\xi^4}{2} + \frac{\Theta}{\varphi_0}\tau_{\text{ст}}\left(\xi - 2\xi^3 + \xi^4 + \frac{9}{5}\xi^5 - 2\xi^6 + \frac{4}{7}\xi^7\right)\right]. \tag{16.4.3}$$

При $\xi = 1$ $w = w_0$, где $w_0$ — скорость набегающего потока, и, следовательно,

$$w_0 = \frac{\tau_{\text{ст}}\varphi_0\delta}{2}\left(1 + \frac{26}{35}\frac{\Theta}{\varphi_0}\tau_{\text{ст}}\right). \tag{16.4.4}$$

Тогда

$$\omega = \frac{w_x}{w_0} = \frac{2\left[\xi - \xi^3 + \frac{\xi^4}{2} + \frac{\Theta}{\varphi_0}\tau_{\text{ст}}\left(\xi - 2\xi^3 + \xi^4 + \frac{9}{5}\xi^5 - 2\xi^6 + \frac{4}{7}\xi^7\right)\right]}{1 + \frac{26}{35}\frac{\Theta}{\varphi_0}\tau_{\text{ст}}}. \tag{16.4.5}$$

Выражение для коэффициента трения с учетом фэрмулы (16.4.4) можно записать так:

$$c_f = \frac{2\tau_{ст}}{\rho w_0^2} = \frac{35}{26\beta}\left(\sqrt{1 + \frac{208\beta}{35\,\mathrm{Re}_\delta}} - 1\right), \qquad (16.4.6)$$

где $\mathrm{Re}_\delta = w_0\,\delta\varphi_0\,\rho$ и $\beta = \Theta\rho w_0^2/\varphi_0$.

### 16.5. СВЯЗЬ МЕЖДУ ИСТИННОЙ И КАЖУЩЕЙСЯ ТЕКУЧЕСТЬЮ

При экспериментальном определении реологических характеристик жидкости непосредственно вычисляется не истинный закон $\varphi(\tau)$, а связь между так называемой кажущейся текучестью $\varphi_к$ и касательным напряжением сдвига на стенке прибора $\tau_{ст}$. Так, например, в капиллярном вискозиметре по измеренному расходу жидкости $Q$ и падению давления $\Delta P$ находят величины

$$\varphi_к = 8LQ/\pi R_0^4\,\Delta p \text{ и } \tau_{ст} = R_0\,\Delta p/2L, \qquad (16.5.1)$$

где $R_0$ и $L$ — радиус и длина капилляра. В области $\tau < \tau_1$ $\varphi_к = \varphi_0$, а в области $\tau > \tau_1$ $\varphi(\tau) \neq \varphi_к(\tau)$. Из формул (16.5.1) следует:

$$\bar{w} = (1/4)\,\varphi_к\,\tau_{ст}\,R_0. \qquad (16.5.2)$$

Сопоставляя выражения (16.5.2) и (16.3.6), находим, что

$$\Theta_к = 0{,}8\Theta. \qquad (16.5.3)$$

Характер функций $\varphi(\tau)$ и $\varphi_к(\tau)$ аналогичен, а значение $\Theta$ может быть определено по $\Theta_к$ в соответствии с формулой (16.5.3). Поэтому проверку реологического уравнения (16.2.4) можно производить по данным вискозиметрических измерений, т. е. в виде $\varphi_к(\tau_{ст})$.

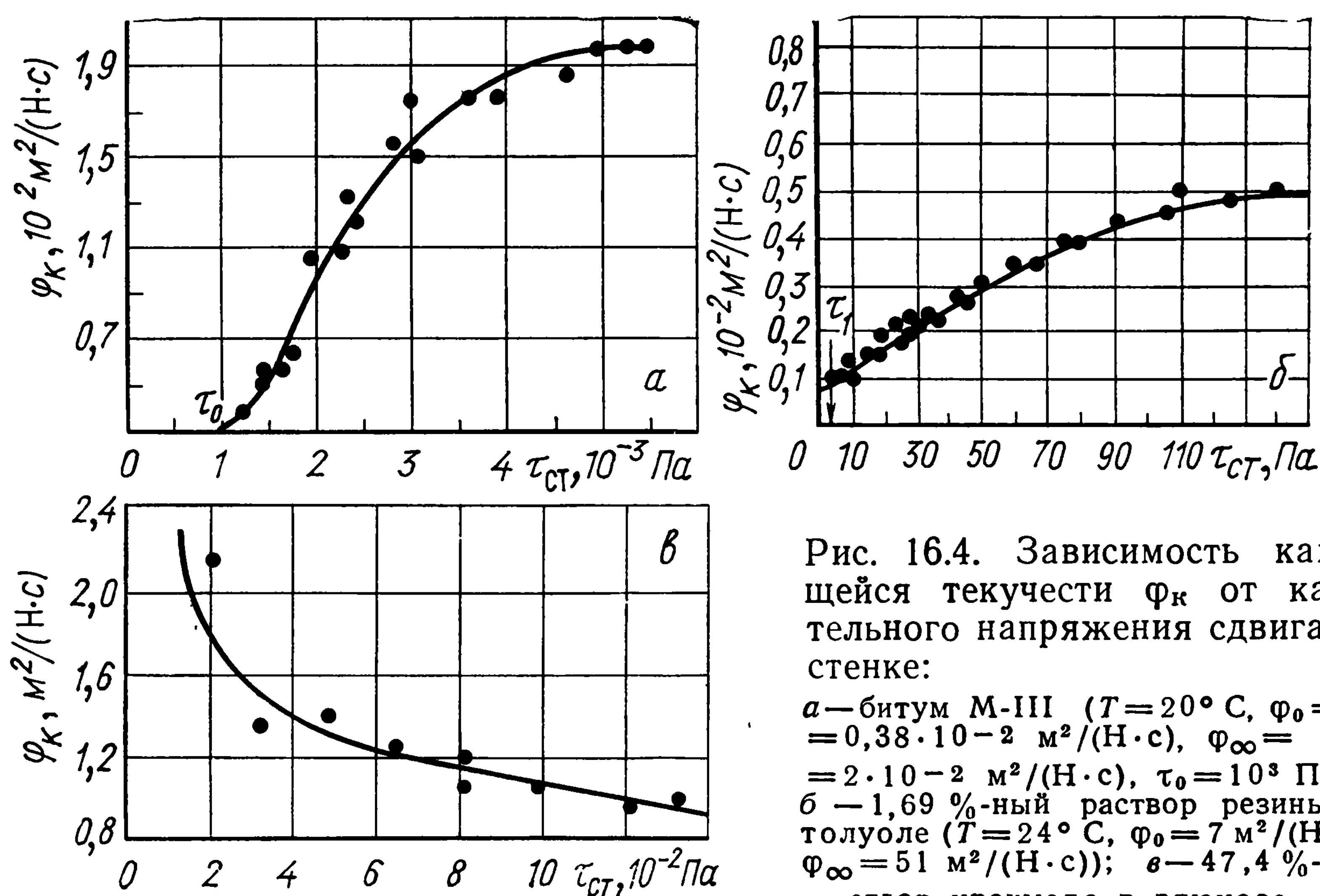



Рис. 16.4. Зависимость кажущейся текучести $\varphi_к$ от касательного напряжения сдвига на стенке:

*а* — битум М-III ($T = 20°$ С, $\varphi_0 = 0{,}38 \cdot 10^{-2}$ м²/(Н·с), $\varphi_\infty = 2 \cdot 10^{-2}$ м²/(Н·с), $\tau_0 = 10^3$ Па); *б* — 1,69 %-ный раствор резины в толуоле ($T = 24°$ С, $\varphi_0 = 7$ м²/(Н·с), $\varphi_\infty = 51$ м²/(Н·с)); *в* — 47,4 %-ный стюр крахмала в глюкозе

Как видно из рис. 16.4 и 16.5, в пределах точности опытов и оценки значений $\varphi_0$ и $\varphi_\infty$ реологический закон (16.2.7) проявляется совершенно отчетливо. Следует обратить внимание на то, что раствор крахмала в глюкозе является дилатантным. Из опытов также следует, что в интервале $10 \leqslant \tau \leqslant 100$ Па текучесть раствора резины в толуоле увеличивается с ростом $\tau$ практически по

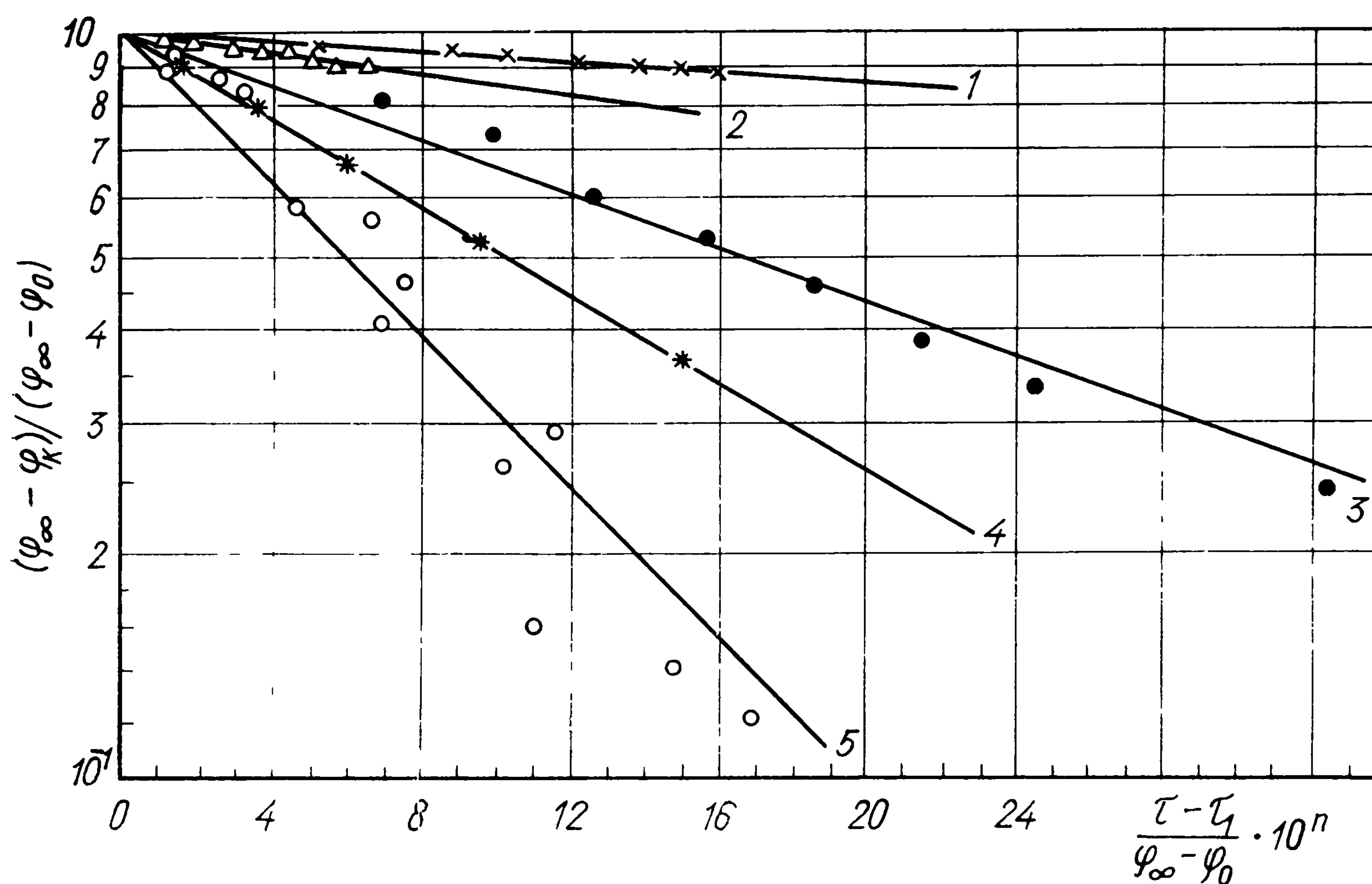



Рис. 16.5. Зависимость $\varphi_*$ от $\tau_*$:

*1* — поливиниловый спирт в воде — 2,5 %, $n = -1$, $\tau_1 = 0$, $\tau_0 = 0$; *2* — полиметакрилат в бензоле — 0,025%, $n = 1$, $\tau_1 = 0$, $\tau_0 = 0$; *3* — карбоксиметилцеллюлоза в воде — 1 %, $n = 0$, $\tau_1 = 5$ Па, $\tau_0 = 0$; *4* — резина в толуоле — 1,69 %, $n = -1$, $\tau_1 = 2{,}5$ Па, $\tau_0 = 0$; *5* — битум М-III, $n = -6$, $\tau_1 = 0$, $\tau_0 = 1{,}25 \cdot 10^3$ Па

линейному закону. Для битума область линейного закона текучести простирается до $\tau = 3000$ Па. Таким образом, экспериментальные данные подтверждают существование жидкостей с линейным законом текучести в практически интересном интервале напряжений сдвига.

## 16.6. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАКОНОМ ТЕКУЧЕСТИ

Рассмотрим случай течения жидкости в круглой трубе при небольших тепловых нагрузках, когда $\lambda$, $c_p$ и $\rho$ можно считать постоянными по сечению, а текучесть $\varphi$ — зависящей только от значения $\tau$. Тогда для гидродинамически установившегося потока при $\mathrm{Pe} > 10$ уравнение теплопереноса можно записать в виде

$$\partial^2 T/\partial R^2 + (1/R)\partial T/\partial R = (1/a)\, w_x \partial T/\partial x, \qquad (16.6.1)$$

где $w_x$ для жидкостей с линейным законом текучести определяется формулой (16.3.4).

Поскольку для жидкостей со структурной вязкостью число Прандтля, как правило, много больше единицы, то тепловой пограничный слой занимает лишь узкую пристенную область. Поэтому можно ввести новую переменную $y = R_0 - R$ и в области теплового пограничного слоя пренебречь членами с $\xi \approx y/R_0$ в степени выше первой. Тогда распределение скоростей вблизи стенки примет вид

$$w = \varphi_0 \tau_{\text{ст}} y (1 + \tau_{\text{ст}} \Theta/\varphi_0), \qquad (16.6.2)$$

или с учетом формулы (16.3.6)

$$w = 4\overline{w} \chi y/R_0, \qquad (16.6.3)$$

где

$$\chi = \frac{1 + \tau_{\text{ст}} \Theta/\varphi_0}{1 + 4\tau_{\text{ст}} \Theta/5\varphi_0} \qquad (16.6.4)$$

($\chi$ — коэффициент, учитывающий структурно-вязкие свойства жидкости).

При $\delta_т \ll R_0$ слой жидкости, участвующий в теплообмене, можно считать плоским и уравнение (16.6.1) записать в виде

$$\frac{4\bar{w}\chi}{R_0} y \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \qquad (16.6.5)$$

Результат решения аналогичной задачи для жидкостей с линейной кривой течения ($\chi = 1$) приведен в табл. 11.3. При $\chi \neq 1$ получим

$$Nu_x = 1{,}08 (\chi \, Pe \, D/x)^{1/3} \qquad (16.6.6)$$

и

$$\overline{Nu} = 1{,}61 (\chi \, Pe \, D/L)^{1/3}, \qquad (16.6.7)$$

где $\overline{Nu}$ — среднее значение числа Нуссельта на длине $L$. Аналогичные выражения можно получить и для граничных условий второго рода ($q_{ст}$ = const).

Таким образом, для граничных условий как первого, так и второго рода отношение коэффициентов теплоотдачи при ламинарном течении жидкостей с линейным законом текучести к коэффициентам теплоотдачи ньютоновских жидкостей при одинаковых значениях $PeD/x$ равно:

$$Nu/Nu_0 = \chi^{1/3}, \qquad (16.6.8)$$

где $\chi$ определяется формулой (16.6.4). Сопоставление с экспериментом показано на рис. 16.6.

Из формулы (16.6.4) следует, что $\chi$ изменяется в пределах от 1,0 до 1,25. Поэтому при малых тепловых потоках числа Нуссельта для жидкостей с линейным законом текучести будут отличаться от их значений для ньютоновских жидкостей не более чем на 10%.

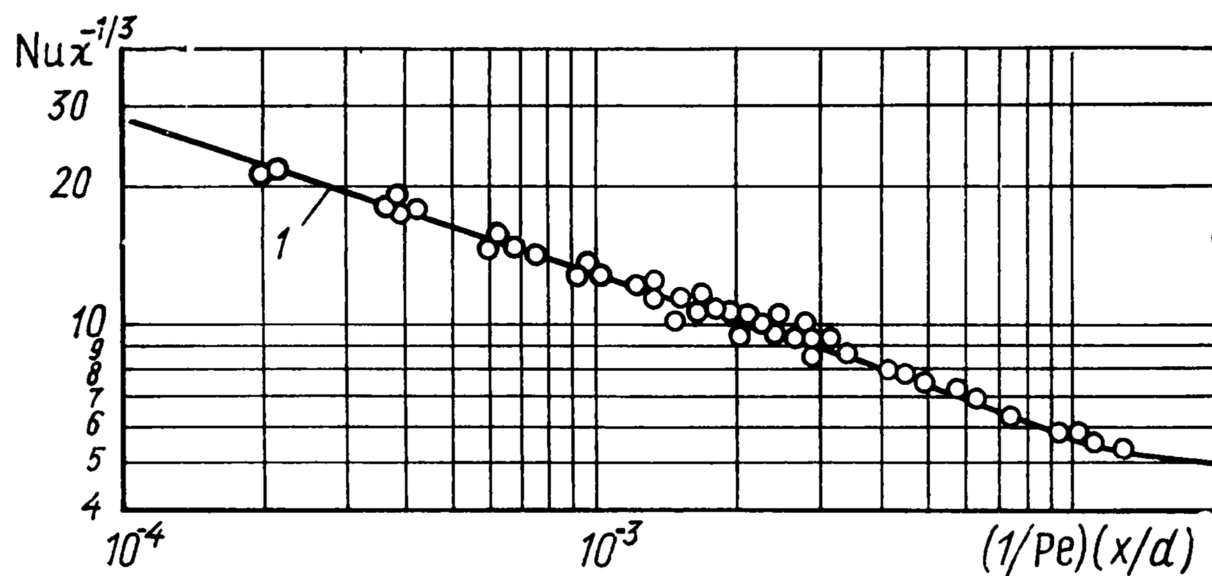



Рис. 16.6. Теплоотдача в круглой трубе для 1%-ного раствора полиакриламида (*1* — расчет для ньютоновской жидкости ($\chi=1$)

Следует отметить, что многие неньютоновские жидкости обладают значительной вязкостью. В ряде случаев это делает необходимым учет влияния на теплообмен диссипации механической энергии. Распределение теплоты трения определяется законами изменения скорости и реологических характеристик среды. В свою очередь, вязкость неньютоновских жидкостей не только зависит от градиента скорости, но и может сильно меняться с изменением температуры. Таким образом, распределение теплоты трения по сечению и длине канала не может быть задано наперед. Решение этой задачи о неизотермическом течении и теплообмене с учетом диссипации механической энергии проводится путем численного интегрирования системы дифференциальных уравнений движения и энергии и уравнений, описывающих зависимость реологических свойств жидкости от температуры.

Как указывалось в гл. 11, уравнения типа (16.6.6) и (16.6.7) справедливы для начального участка трубы, когда $PeD/x > 12$. Поскольку у жидкостей со структурной вязкостью число Прандтля велико, то в большинстве практических случаев эти уравнения справедливы по всей длине трубы.

## 16.7. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ СТРУКТУРНО-ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Если неньютоновское трение в жидкости не приводит к существенной деформации распределения компонент турбулентных пульсаций, то толщина вязкого подслоя остается малой по сравнению с диаметром трубы. В таком случае напряжение сдвига и текучесть в области $0 < y < y_1$ практически равны их значениям на стенке. При этом сохраняется критерий, характеризующий устойчивость вязкого подслоя ньютоновских жидкостей, т. е.

$$(v^* y/\nu)_1 = v^* y_1 \rho\varphi_c = \text{const}. \qquad (16.7.1)$$

В турбулентном ядре потока рейнольдсовы напряжения не зависят от молекулярной вязкости, т. е. турбулентные касательные напряжения автомодельны относительно зависимости $\varphi(\tau)$. Отсюда следует, что распределение скоростей в турбулентном потоке структурно-вязких жидкостей в безразмерных координатах совпадает с универсальным профилем скорости для ньютоновских жидкостей, если безразмерную координату определять по текучести на стенке. Аналогично коэффициент гидравлического сопротивления при турбулентном течении $\zeta$ можно определить по формулам для ньютоновских жидкостей, введя в число Re значение вязкости жидкости на стенке.

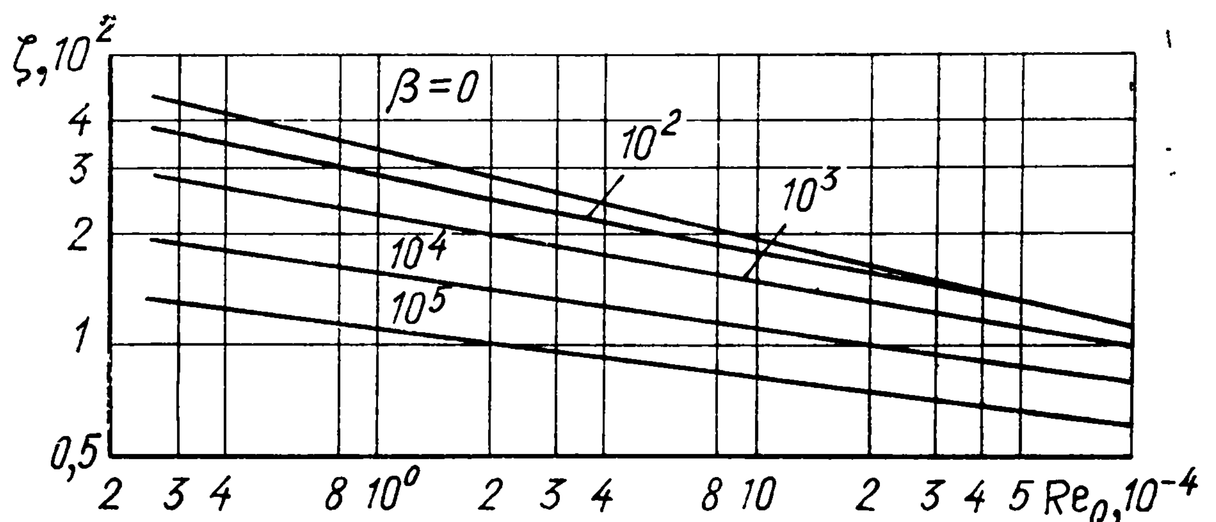



Рис. 16.7 Зависимость $\zeta$ от $\text{Re}_0$ при различных значениях $\beta$

Однако зависимостью коэффициента гидравлического сопротивления в виде $\zeta(\text{Re}_{\text{ст}})$ пользоваться неудобно, так как при заданных значениях средней скорости $\bar{w}$ и диаметра трубы $D$ для определения $\zeta$ необходимо применять метод итераций (задаваясь сначала значением $\tau_{\text{ст}}$, определять $\varphi_{\text{ст}}$ и $\text{Re}_{\text{ст}}$, а затем определив $\zeta$, уточнить $\tau_{\text{ст}} = \zeta\rho\bar{w}^2/8$ и т. д.).

Для структурно-вязких жидкостей с линейным законом текучести (16.2.9), подставив в формулу для определения коэффициента гидравлического сопротивления ньютоновских жидкостей

$$\text{Re}_{\text{ст}} = \text{Re}_0 (1 + \zeta\beta/8), \qquad (16.7.2)$$

получим

$$1/\sqrt{\zeta} = 0{,}88\left[\text{Re}_0 \sqrt{\zeta}(1 + \zeta\beta/8)\right] - 0{,}9. \qquad (16.7.3)$$

Зависимость $\zeta(\text{Re}_0, \beta)$ при турбулентном течении жидкости представлена на рис. 16.7. При $\beta > 100$ формула (16.7.3) может быть аппроксимирована выражением

$$\zeta = \zeta_0 - 0{,}11\,\text{Re}_0^{-0{,}3}(\ln\beta - 2), \qquad (16.7.4)$$

где $\zeta_0$ — коэффициент сопротивления, определяемый по формулам для ньютоновских жидкостей.

Аналогично при расчете коэффициента теплообмена жидкостей со структурной вязкостью можно воспользоваться обычными формулами для ньютоновских жидкостей, подставляя в них значения чисел Рейнольдса и Прандтля, вычисленные по вязкости на стенке. Однако в большинстве случаев для структурно-

вязких жидкостей числа Прандтля велики ($Pr > 100$), и практически все термическое сопротивление сосредоточено в пределах вязкого подслоя. В этом случае для определения безразмерного коэффициента теплообмена в предположении, что свойства жидкости не зависят от температуры, можно воспользоваться приближенной формулой

$$Nu = 0{,}035\, Re_c \sqrt{\zeta}\, Pr_c^{1/4} = 0{,}035\, Re_0\, Pr_0^{1/4} \sqrt{\zeta}\, (1 + \zeta\beta/8)^{3/4}, \quad (16.7.5)$$

где $Re_0$ и $Pr_0$ определяются по нулевой текучести.

## 16.8. ВЛИЯНИЕ ПОЛИМЕРНЫХ ДОБАВОК НА ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВОДЫ

В 1948 г. Томсом было обнаружено, что при турбулентном течении жидкости добавка полимера (полиметилметакрилата в монохлорбензол) снижает гидравлическое сопротивление потока. В дальнейшем были найдены полимеры, эффективно снижающие гидравлическое сопротивление при течении воды, причем эффект возрастал с увеличением молекулярной массы полимеров. При одинаковых молекулярных массах более эффективными оказываются полимеры, молекулы которых имеют линейную структуру с малым количеством боковых ветвей. Для некоторых полимеров было обнаружено существование оптимальных концентраций, при которых снижение сопротивления достигает насыщения (или максимума). Эти оптимальные концентрации малы и неодинаковы у различных полимеров. Слабые растворы высокополимеров проявляют эффект снижения сопротивления в турбулентном режиме не при всех числах Рейнольдса, а лишь при достижении определенного для каждого раствора значения скорости касательного напряжения на стенке.

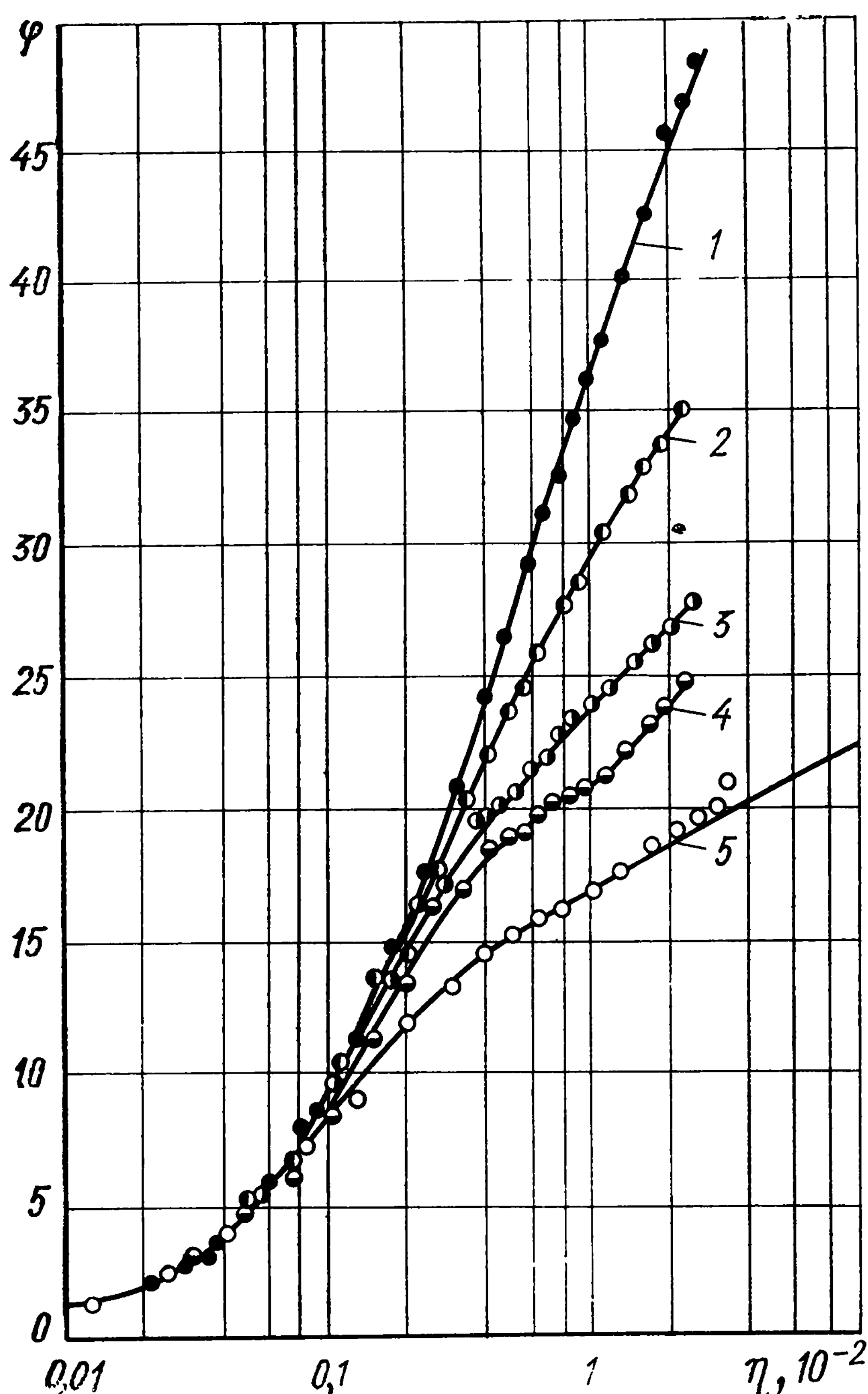



Рис. 16.8. Профили скоростей в безразмерных координатах:
*1, 4* — 0,007%-ный раствор полиэтиленоксида ($\zeta/\zeta_0 = 0{,}23$, $\zeta/\zeta_0 = 0{,}65$); *2, 3* — 0,012%-ный раствор полиакриламида ($\zeta/\zeta_0 = 0{,}35$, $\zeta/\zeta_0 = 0{,}54$); *5* — вода

Наибольшее внимание в последние годы было уделено таким высокомолекулярным веществам, как полиэтиленоксид, полиакриламид, гуаровая смола. Опыты показали, что в трубах малого диаметра снижение сопротивления может достигать 70%, в то время как концентрация полимера составляет лишь сотые или тысячные доли процента.

Введение в поток воды высокополимерных добавок изменяет структуру пристенной турбулентности. Как установлено в опытах Е. М. Хабахпашевой и Б. В. Перепелицы, основное действие высокомолекулярных добавок проявляется в снижении интенсивности поперечных компонент пульсационной скорости. Это приводит к деформации профиля средней скорости, причем промежуточная зона потока, в которой молекулярная и турбулентная вязкости соизмеримы по величине, увеличивается в размерах (рис. 16.8).

Снижение интенсивности турбулентного обмена в пристенной области течения вызывает увеличение термического сопротивления в потоке. При этом роль промежуточной зоны потока в процессе теплообмена сильно возрастает. Если при течении воды ($Re = 5 \cdot 10^4$, $Pr = 7$) термическое сопротивление вязкого подслоя составляет примерно 2/3 полного термического сопротивления потока, то в слабом растворе полимера (полиакриламида) термическое сопротивление промежуточной области может превысить сопротивление вязкого подслоя примерно в полтора раза. Отмеченные выше факты приводят к тому, что снижение гидравлического сопротивления путем введения высокополимерных добавок в поток воды сопровождается пропорциональным или более сильным снижением интенсивности теплообмена.

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*


1. **Кутателадзе С. С., Попов В. И., Хабахпашева Е. М.** К гидродинамике жидкостей с переменной вязкостью.— «Журн. прикл. механ. и техн. физ.», 1966, № 1, с. 45.
2. **Некоторые** вопросы гидродинамики и теплообмена структурно-вязких сред.— В сб.: Тепло-и массообмен в неньютоновских жидкостях. Под ред. А. В. Лыкова и Б. М. Смольского. М., «Энергия», 1968. Авт.: С. С. Кутателадзе, Е. М. Хабахпашева, В. Б. Лемберский, В. И. Попов.
3. **Рейнер М.** Деформация и течение. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
4. **Смольский Б. М., Шульман З. П., Гориславец В. М.** Реодинамика и теплообмен нелинейно вязкопластичных материалов. Минск, «Наука и техника», 1970.
5. **Уилкинсон У. Л.** Неньютоновские жидкости. Пер. с англ. М., «Мир», 1964.
6. **Хабахпашева Е. М.** Теплообмен при течении неньютоновских жидкостей в трубах.— В сб.: Реология (полимеры и нефть). Тр. Всесоюз. школы по реологии, 1977 г., Новосибирск. Под ред. Г. В. Виноградова и др. Новосибирск, 1977, с. 93.
7. **Шульман З. П.** Конвективный тепломассоперенос реологически сложных жидкостей. М., «Энергия», 1975.
8. **Экспериментальное** исследование пристенных турбулентных течений. Новосибирск, «Наука», 1975. Авт.: С. С. Кутателадзе, Б. П. Миронов, В. Е. Накоряков, Е. М. Хабахпашева.
9. **Metzner A. B.** Heat transfer in non-Newtonian fluids.—In: Advances in Heat Transfer. Vol. 2. New York, Acad. Press, 1965, p. 357—396.

# Глава 17 ТЕПЛООТДАЧА ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

## 17.1. СВОБОДНАЯ ТЕПЛОВАЯ КОНВЕКЦИЯ ОКОЛО ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Свободной конвекцией называется движение, возникающее вследствие различия плотностей неодинаково нагретых частей жидкой среды. Это определение следует уточнить в том смысле, что при свободной конвекции возникают специфические циркуляционные токи между поверхностью нагрева (или охлаждения) и ядром жидкой среды. Таким образом, в такое ограниченное понятие свободной конвекции не входят течения, хотя и обусловленные разностью плотностей в различных точках среды, но имеющие вполне определенное одностороннее направление, например движение газа при естественной тяге в дымовой трубе. В таких случаях хотя разность плотностей и является побудителем движения, но сам механизм процесса в значительной мере тождествен обычному вынужденному течению.

Фундаментальный вклад в исследования теплообмена при свободной тепловой конвекции был внесен Л. Лоренцем, В. Бекманом, В. С. Жуковским, М. А. Михеевым, Л. С. Эйгенсоном, Е. Шмидтом.

Фотографии движения воздуха около нагретой высокой плиты показывают, что на ее нижней части образуется утолщающийся ламинарный пограничный слой. На некотором расстоянии от нижнего среза плиты ламинарное течение нарушается и возникает специфическая тепловая турбулентность.

В области ламинарного пограничного слоя интенсивность теплоотдачи уменьшается с увеличением размера тела, так как возрастает толщина этого слоя. В области тепловой турбулентности условия теплообмена определяются беспорядочным движением, характер которого статистически одинаков для различных частей поверхности нагрева, достаточно протяженных по сравнению с размерами отдельных вихрей. В этой области коэффициент теплоотдачи не зависит от размера тела.

Если твердое тело, введенное в жидкую среду, холоднее последней, то картина движения получается обратной, т. е. более холодные частицы жидкости будут двигаться около поверхности охлаждения сверху вниз.

Рассмотрим свободную конвекцию в условиях, когда размеры тела, нарушающего тепловое равновесие, малы по сравнению с объемом окружающей его жидкости. В этом случае область теплового и гидродинамического возмущения локализуется около рассматриваемого тела. Вне этого пограничного слоя жидкость можно считать неподвижной. Градиент давления в неподвижной жидкости равен $\mathbf{g}\rho_0$, где $\rho_0$ — плотность невозмущенной среды. Соответственно в уравнении движения можно произвести подстановку:

$$\mathbf{g}\rho - \mathrm{grad}\, p = -\mathbf{g}(\rho\beta\Delta T - \rho_0) - \mathrm{grad}\, p = -\mathbf{g}\rho\beta\Delta T - \mathrm{grad}\, p_{\text{д}}, \quad (17.1.1)$$

где $p_{\text{д}} = p - p_0$ — динамическая составляющая давления, обусловленная свободной конвекцией жидкости в тепловом пограничном слое; $p_0$ — гидростатическое давление вне пограничного слоя. При не очень больших разностях температур, т. е. когда $\Delta T/T_0 \ll 1$, влиянием переменности плотности на уравнение сплошности и на вязкостные члены уравнения движения можно пренебречь. Система основных уравнений принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} &a\nabla^2 T = \partial T/\partial t + (\mathbf{w}, \mathrm{grad}\, T); \\ &-\mathbf{g}\beta\Delta T - (1/\rho)\,\mathrm{grad}\, p_{\text{д}} + \nu\nabla^2\mathbf{w} = \partial\mathbf{w}/\partial t + (\mathbf{w}, \mathrm{grad})\,\mathbf{w}; \\ &\mathrm{div}\,\mathbf{w} = 0; \\ &-\lambda(\partial T/\partial n)_{\text{ст}} = \alpha\Delta T. \end{aligned}\right\} \quad (17.1.2)$$

В более общем случае эти уравнения следует писать с учетом переменности $\rho$, $\mu$ и $\lambda$.

Условия однозначности рассматриваемой задачи включают в себя форму и размеры возмущающего тела, распределение температуры на его поверхности и ее абсолютный уровень, температуру невозмущенной жидкости, ее физические параметры ($\lambda$, $\alpha$, $\nu$, $\rho$, $\beta$) и значение ускорения $g$. Скорость течения среды $w$ является в данном случае функцией процесса, т. е. не входит в условия однозначности, а полностью определяется заданием перечисленных выше независимых переменных.

При этих условиях однозначности система уравнений (17.1.2) для стабилизированного течения дает два определяющих критерия: $\mathrm{Pr} \equiv \nu/a$ и $\mathrm{Gr} \equiv (gl^3/\nu^2)\beta\Delta T$. Таким образом, при свободной конвекции в неограниченном объеме при $\Delta T/T_0 \ll 1$ в общем случае

$$\mathrm{Nu} = \Phi\,(\mathrm{Pr};\ \mathrm{Gr}). \qquad (17.1.3)$$

Если предположить, что решающее значение для теплообмена при свободной конвекции имеет термическое сопротивление ламинарного слоя около возмущающего тела, то в уравнении движения можно отбросить инерционный член, т. е. положить $Dw/dt = 0$. При таком упрощении исходная система уравнений дает только один определяющий критерий — число Рэлея:

$$\mathrm{Ra} = (gl^3/\nu a)\,\beta\Delta T, \qquad (17.1.4)$$

представляющее собою произведение критериев Грасгофа и Прандтля, т. е. в этом случае

$$\mathrm{Nu} = \Phi_1\,(\mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr}). \qquad (17.1.5)$$

При свободной конвекции, когда собственное движение жидкости полностью определяется процессом теплообмена, нельзя раздельно рассматривать тепловой и гидродинамический пограничные слои. Однако общие соображения об относительной глубине распространения влияния молекулярного трения и молекулярной теплопроводности, характеризуемой отношением $\nu/a$, остаются справедливыми и в данном случае.

Следовательно, при $\mathrm{Pr} \gg 1$ область существенного проявления молекулярной теплопроводности равна или меньше области существенного проявления молекулярной вязкости. Именно для этих условий физически обосновано указанное выше упрощение уравнения движения в результате отбрасывания инерционного члена.

## 17.2. ТЕПЛООТДАЧА В ОБЛАСТИ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ $\mathrm{Pr} \geqslant 1$

Представленные на рис. 17.1 опытные данные показывают, что при $\mathrm{Pr} \approx 1$ основная область тепловых и гидродинамических возмущений при свободной конвекции действительно сосредоточена в относительно узком слое жидкости около поверхности теплообмена. Около вертикальной пластины такой пограничный слой будет плоским, а давление в каждом его горизонтальном сечении равно гидростатическому давлению в невозмущенной области. Распределение температур и скоростей в таком пограничном слое определится системой уравнений (17.1.2), упрощенной в соответствии с общими соображениями, изложенными в гл. 9:

$$\left.\begin{aligned} &a\partial^2 T/\partial y^2 = w_x\,\partial T/\partial x + w_y\,\partial T/\partial y;\\ &g\beta\Delta T + \nu\partial^2 w_x/\partial y^2 = w_x\,\partial w_x/\partial x + w_y\,\partial w_x/\partial y;\\ &\partial w_x/\partial x + \partial w_y/\partial y = 0;\\ &-\lambda\,(\partial T/\partial y)_{\text{ст}} = \alpha\Delta T. \end{aligned}\right\} \qquad (17.2.1)$$

Здесь координата $x$ направлена вверх вдоль пластины, а координата $y$—по нормали к пластине в глубь потока. Впервые эта задача была решена для воздуха Лоренцем. В дальнейшем для случая постоянной температуры стенки Польгаузен ввел новые переменные:

$$\eta = Cyx^{-1/4}; \quad \psi = 4\nu Cx^{3/4} f(\eta). \tag{17.2.2}$$

Здесь $\psi$ — функция тока ($w_x = \partial\psi/\partial y$; $w_y = -\partial\psi/\partial x$); $C = \sqrt[4]{g\beta\Delta T/4\nu^2}$. Компоненты вектора скорости в этом случае равны:

$$w_x = 4\nu x^{1/2} C^2 df/d\eta; \quad w_y = \nu Cx^{-1/2} (\eta df/d\eta - 3f). \tag{17.2.3}$$

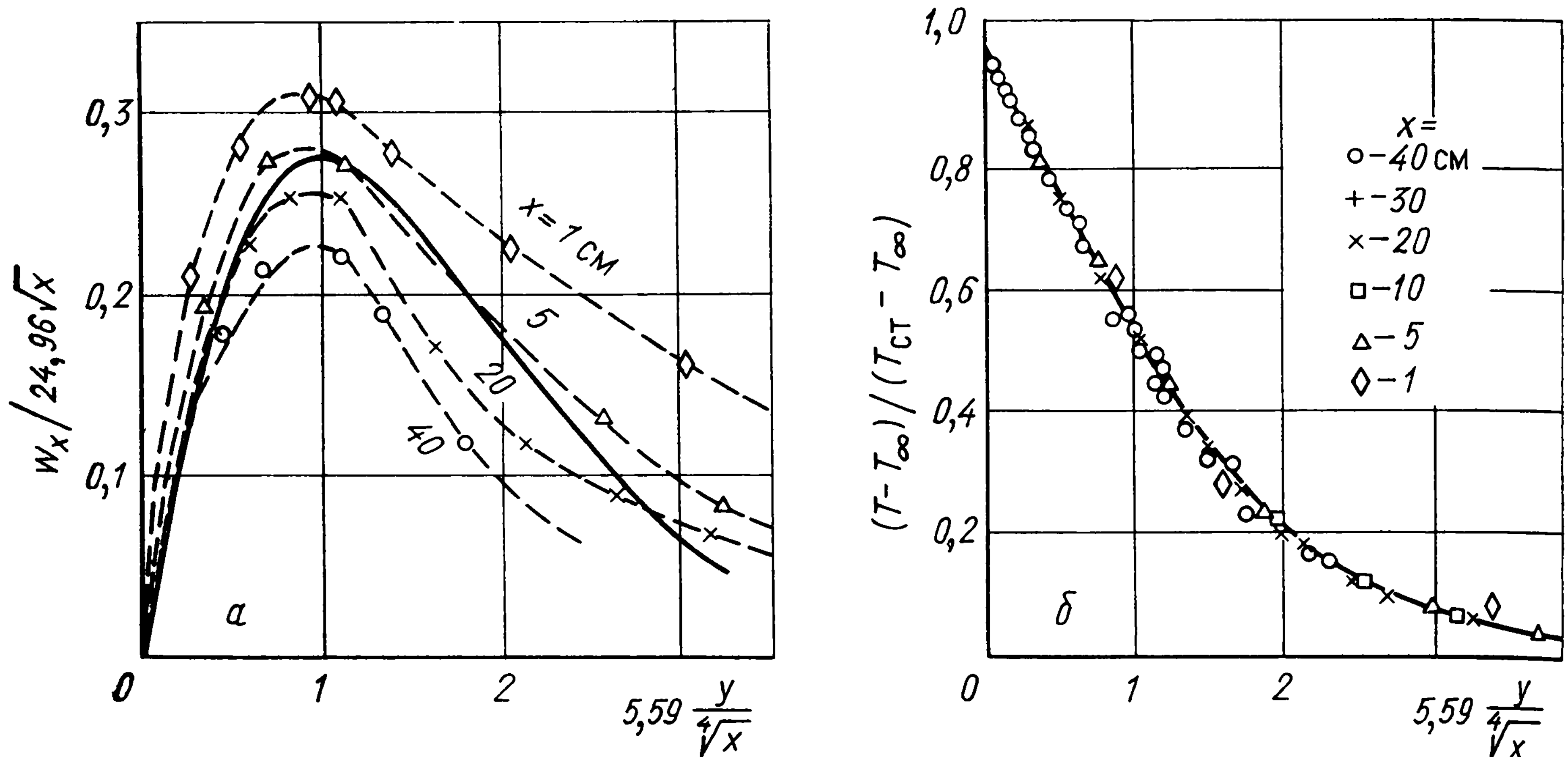



Рис. 17.1. Распределение скоростей (*а*) и температур (*б*) в воздухе около нагретой вертикальной пластины. (Точки — экспериментальные данные Шмидта и Бекмана; сплошная линия — решение Польгаузена)

Подставляя эти значения $w_x$ и $w_y$ в первые три уравнения системы (17.2.1), после соответствующих преобразований получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &f''' + 3ff'' - 2f'^2 + \vartheta = 0; \\ &\vartheta'' + 3\,\mathrm{Pr}\, f\vartheta' = 0, \end{aligned}\right\} \tag{17.2.4}$$

где $\vartheta \equiv (T - T_0)/(T_{ст} - T_0)$ — безразмерная температура. Граничные условия принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\eta = 0; \quad \vartheta = 1; \quad f = f' = 0; \\ &\eta = \infty, \quad \vartheta = 0; \quad f' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{17.2.5}$$

Соответственно

$$\alpha = -\lambda Cx^{-1/4}\,\vartheta'_{ст}. \tag{17.2.6}$$

Среднее значение коэффициента теплоотдачи по всей пластине

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L}\int_0^L \alpha dx.$$

Эти уравнения решаются численными методами.

Для случая постоянного теплового потока аналогичным образом могут быть введены переменные:

$$\left.\begin{aligned} &\eta = (g\beta q/5\lambda\nu^2)^{1/5}\, yx^{-1/5} \\ &F(\eta) = \psi\lambda^{1/5}/(5^4 g\beta q\nu^3 x^4)^{1/5}; \\ &\vartheta(\eta) = (g\beta\lambda^4/5\nu^2 q^4 x)^{1/5}\,(T - T_0). \end{aligned}\right\} \tag{17.2.7}$$

При этом

$$\bar{\alpha} = q\left[\frac{1}{L}\int_0^L (T_{\text{ст}} - T_0)\,dx\right]^{-1}.$$

Результаты расчетов, выполненных Польгаузеном, Шу, Саундерсом, Григгом и Сперроу, приведены в табл. 17.1.

Таблица 17.1

**Результаты точного решения системы уравнений (17.2.1) для ламинарного пограничного слоя на вертикальной пластине при свободной конвекции в неограниченном объеме**

| Pr | $T_{\text{ст}} = \text{const}$ | | $q = \text{const}$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $\overline{Nu}\,Gr^{-1/4}$ | $\overline{Nu}\,(GrPr)^{-1/4}$ | $\overline{Nu}\,Gr^{-1/4}$ | $\overline{Nu}\,(GrPr)^{-1/4}$ |
| 0,1 | 0,219 | 0,389 | 0,237 | 0,421 |
| 1 | 0,535 | 0,535 | 0,573 | 0,573 |
| 10 | 1,10 | 0,616 | 1,17 | 0,655 |
| 100 | 2,07 | 0,655 | 2,18 | 0,690 |

Как видно, интенсивность теплоотдачи с поверхности пластины при постоянной плотности теплового потока примерно на 7% выше, чем в случае постоянной температуры, а упрощенная функциональная связь типа (17.1.5) выполняется отнюдь не точно. При этом в случае $Pr < 1$ погрешность возрастает весьма значительно. Так, например, при изменении числа Pr от 1 до 10 значение комплекса $\overline{Nu}\,(Gr \cdot Pr)^{-1/4}$ изменяется на 15%, а при изменении числа Pr от 1 до 0,1 — на 27%.

В области $1 \cdot 10^{-3} < GrPr < 5 \cdot 10^2$, когда приближение пограничного слоя становится недействительным, опытные данные при $Pr \geqslant 1$ удовлетворительно описываются эмпирической формулой М. А. Михеева:

$$\overline{Nu} = 1{,}18\,(Gr\,Pr)^{1/8}. \tag{17.2.8}$$

При $GrPr < 10^{-3}$ начинает заметно сказываться форма тела. При этих значениях GrPr для тонких проволочек опытами найдено значение $Nu = 0{,}45$, хотя по модели чистой теплопроводности для цилиндра и пластины при $Gr \to 0$ $Nu \to 0$. Для шара минимальное значение Nu, как известно из предыдущих глав, равно 2.

Физические свойства в рассмотренных формулах рекомендуется относить к средней расчетной температуре, равной $(T_{\text{ст}} + T_0)/2$.

## 17.3. ГИДРОДИНАМИКА И ТЕПЛООБМЕН В ОБЛАСТИ РАЗВИТОЙ ТЕПЛОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ $Pr \geqslant 1$

Как уже указывалось в начале этой главы, при возникновении свободной тепловой турбулентности наблюдается автомодельность теплоотдачи относительно линейного размера поверхности теплообмена. Этому факту соответствует закон теплоотдачи вида

$$Nu = C\,(GrPr)^{1/3}. \tag{17.3.1}$$

Опытные данные, полученные для газов и неметаллических жидкостей, дают среднее значение множителя пропорциональности $C \approx 0{,}130$. Эта формула применима при значениях $GrPr > 2 \cdot 10^7$. Сводка экспериментальных данных по теплоотдаче при свободной тепловой конвекции дана на рис. 17.2.

Первая модель тепловой турбулентности была предложена автором в 1935 г. в виде пристенного квазиламинарного течения с постоянным собственным значением числа Рейнольдса и внешнего струйного турбулентного движения.

Проведенные в дальнейшем измерения полей скорости и температуры подтвердили основные идеи этой модели и дали отчетливое представление о деталях свободной тепловой турбулентности. При обтекании вертикальной пластины средой с переменной плотностью и постоянными другими свойствами в непосредственной окрестности поверхности теплообмена ($y < y_1$) возникает вяз-

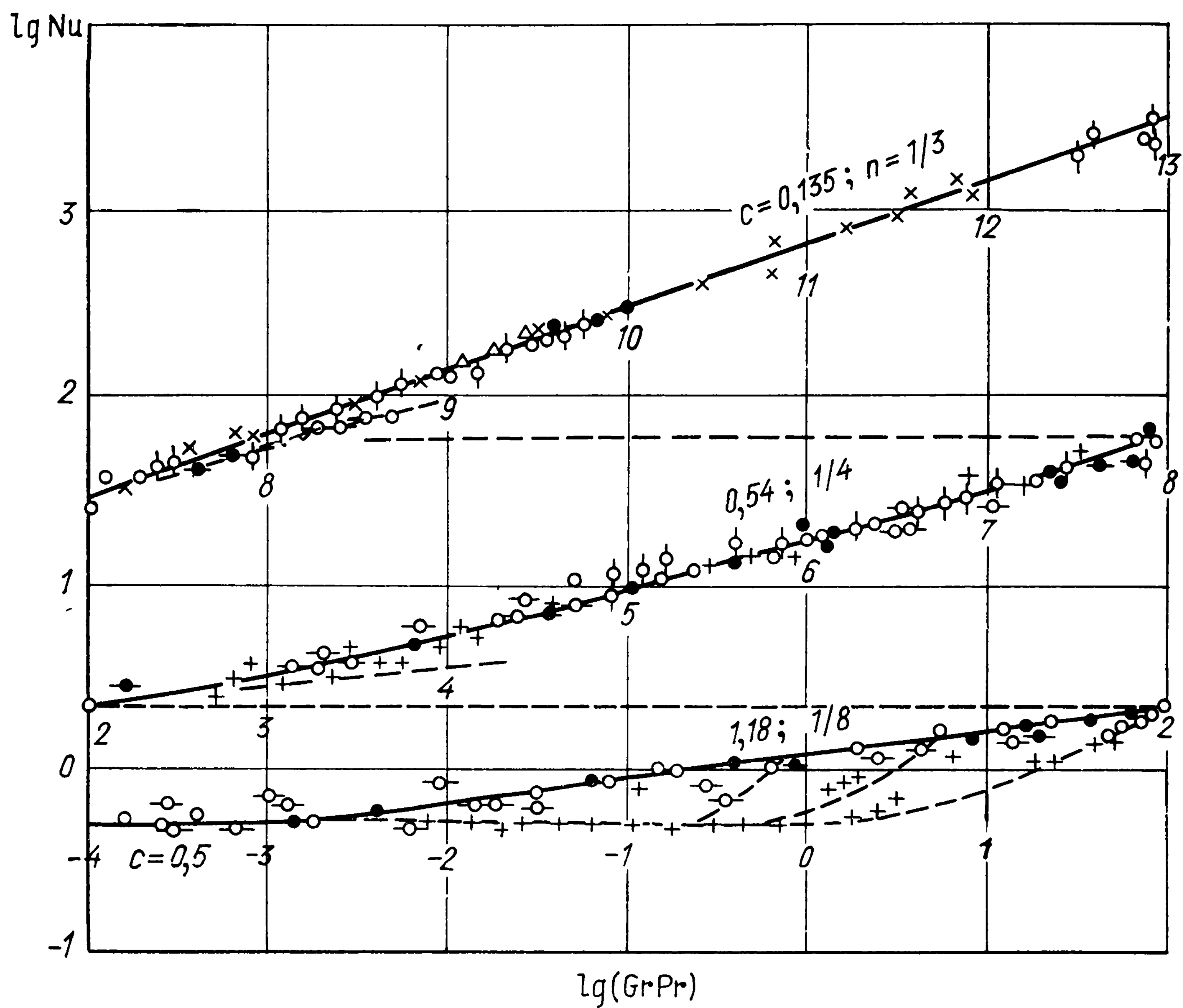



Рис. 17.2. Зависимость критерия Nu от критерия GrPr для горизонтальных проволок и труб (штриховые линии) и шаров, вертикальных проволок и труб (сплошные линии) по опытам с газами и жидкостями при Pr$\geqslant$1

кий подслой с линейным изменением средней температуры $T$ ($y$). При этом $\partial T/\partial x = 0$. Пренебрегая величиной $\rho\overline{V_x V_y}$, можем записать:

$$\left.\begin{aligned} &\partial^2 T/\partial y^2 = 0;\ \nu\partial^2 w_x/\partial y^2 = -g\beta(T - T_\infty);\\ &w_x(0) = 0;\ w_x(y_1) = w_{x,1};\ T(0) = T_{\text{ст}};\ T(y_1) = T_1. \end{aligned}\right\} \quad (17.3.2)$$

Отсюда следует, что при $y < y_1$

$$\left.\begin{aligned} &T_{\text{ст}} - T = (T_{\text{ст}} - T_\infty)\, y/y_1;\\ &\frac{w_x}{w_{x,1}} = \frac{y}{y_1}\left[1 + \left(\frac{\text{Gr}}{\text{Re}}\right)_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\,\frac{T_{\text{ст}} - T_1}{T_{\text{ст}} - T_\infty}\right)\right] -\\ &-\left(\frac{\text{Gr}}{\text{Re}}\right)_1 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{y}{y_1}\right)^2 - \frac{1}{6}\,\frac{T_{\text{ст}} - T_1}{T_{\text{ст}} - T_\infty}\left(\frac{y}{y_1}\right)^3\right]. \end{aligned}\right\} \quad (17.3.3)$$

Здесь

$$\left(\frac{\text{Gr}}{\text{Re}}\right)_1 = \frac{g\beta(T_{\text{ст}} - T_0)}{\nu w_{x,1}}\, y_1^2.$$

По экспериментальным данным, при изменении числа Прандтля от 0,7 до 17 отношение собственных чисел Грасгофа и Рейнольдса вязкого подслоя и относительная разность температур в нем остаются постоянными с точностью до нескольких процентов. Практически можно полагать, что при $0{,}7 < \text{Pr} < 20$ в вязком подслое

$$w_x/w_{x,1} = 1{,}4\,(y/y_1) - 0{,}5\,(y/y_1)^2 + 0{,}1\,(y/y_1)^3. \quad (17.3.4)$$

Средняя толщина вязкого подслоя при течении около вертикальной пластины, по экспериментальным данным А. Г. Кирдяшкина, В. П. Ивакина и Чизрайта, равна

$$\delta_1 = 3{,}9\,(\nu^2/g\beta\Delta T)^{1/3}\,\mathrm{Pr}^{1/6}. \qquad (17.3.5)$$

Во внешней части пограничного слоя ($y > y_m$, где $y_m$ — координата максимальной скорости $w_{x,\,m}$) течение имеет общие черты с затопленными турбулентными струями (рис. 17.3), а именно:

$$y > y_m;\ \partial w_x/\partial y \approx \mathrm{const};$$
$$\overline{W_x'^2} \approx \mathrm{const}. \qquad (17.3.6)$$

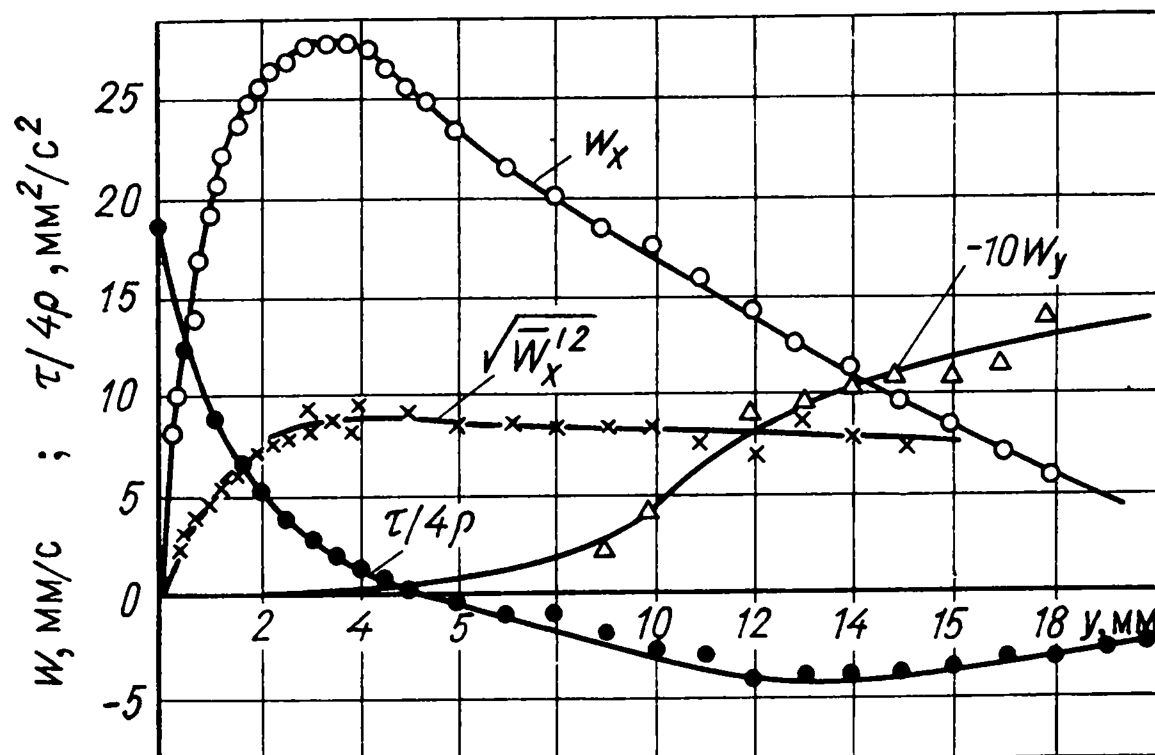



Рис. 17.3. Распределение параметров пограничного слоя при свободной тепловой турбулентности

Наблюдается линейная зависимость толщины внешней части пограничного слоя от продольной координаты $x$, т. е. линейные изотахи $u/u_m$ пересекаются в полюсе

$$x_0 \approx x_{\text{кр}}\,(1 - \alpha_{\text{л}}/\alpha_{\text{т}}). \qquad (17.3.7)$$

Здесь $x_{\text{кр}}$ — координата начала турбулентного пограничного слоя: $\alpha_{\text{л}}$, $\alpha_{\text{т}}$ — соответствующие средние значения коэффициентов теплоотдачи ламинарной и турбулентной свободной конвекции.

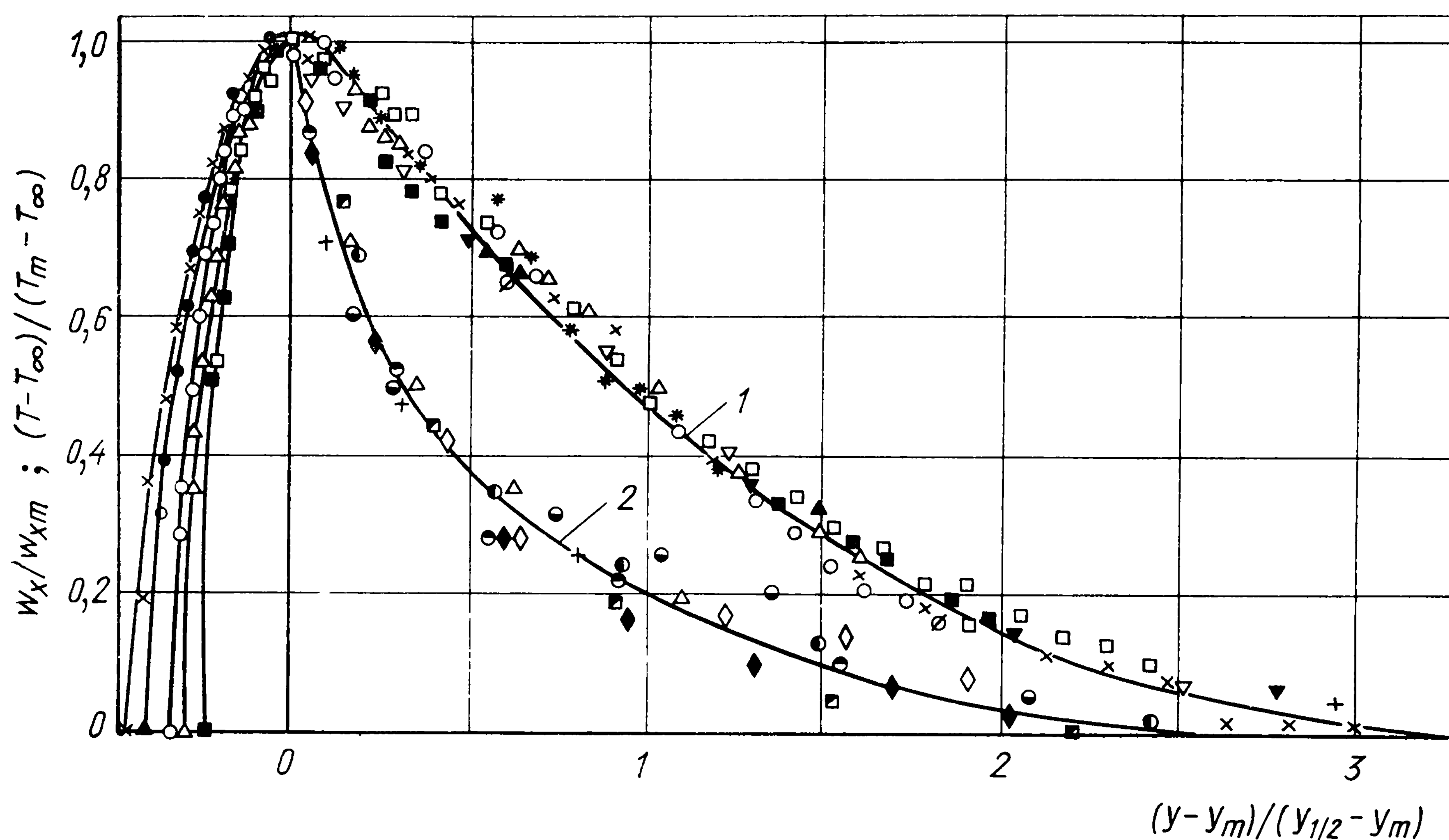



Рис. 17.4. Профили продольной компоненты осредненной скорости течения (1) и средней температуры (2) в турбулентном пограничном слое при свободной тепловой конвекции у вертикальной пластины $2\cdot10^{10} < \mathrm{Ra} < 4\cdot10^{11}$ (экспериментальные данные Чизрайта; А. Г. Кирдяшкина и В. П. Ивакина)

Координата изотахи $w_{x,\,1/2} = 0{,}5\,w_{x,\,m}$ определяется формулой

$$y_{1/2} - y_m \approx 0{,}02\,(x - x_0). \qquad (17.3.8)$$

Как видно из данных рис 17.4, профили скоростей и температур:

$$\left.\begin{aligned} w_x/w_{x,\,m} &= f\,[(y-y_m)/(y_{1/2}-y_m)];\\ (T-T_\infty)/(T_m-T_\infty) &= f\,[(y-y_m)/(y_{1/2}-y_m)] \end{aligned}\right\} \qquad (17.3.9)$$

аффинно-подобны во внешней части пограничного слоя.

Для области $y > y_m$ интегральные соотношения импульсов и энергии можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{y_m}^{\infty} (\partial w_x^2/\partial x - \beta g \vartheta)\, dy + \tau_m/\rho - (w_x w_y)_m = 0; \\ &q_m/c_p \rho - \int\limits_{y_m}^{\infty} (\partial w_x \vartheta/\partial x)\, dy + (w_y \vartheta)_m = 0. \end{aligned}\right\} \quad (17.3.10)$$

Здесь $\vartheta = (T - T_\infty)/(T_m - T_\infty)$ — безразмерная температура; $\tau_m$ — касательное напряжение в точке $y_m$. Если принять условия:

$$\left.\begin{aligned} &T_m - T_\infty \sim (x - x_0)^m;\ w_{x,\,m} \sim (x - x_0)^n;\ \tau_m \sim (x - x_0)^k; \\ &dy_m/dx = \text{const};\ q_m = q_{\text{ст}}, \end{aligned}\right\} \quad (17.3.11)$$

то из анализа интегральных соотношений (17.3.10) следует, что $n = 1/3$, $m = -1/3$, $k = 2/3$, и если пренебречь членом $\tau_m/\rho$, то

$$\left.\begin{aligned} &w_{x,\,m} \approx C_1 [q_{\text{ст}} \beta g (x - x_0)/c_p \rho]^{1/3}; \\ &T_m - T_\infty \approx C_2 q_{\text{ст}}^{2/3}/(c_p \rho)^{2/3} [\beta g (x - x_0)]^{1/3}. \end{aligned}\right\} \quad (17.3.12)$$

По опытам, проведенным автором совместно с А. Г. Кирдяшкиным и В. П. Ивакиным, константы в этих формулах равны: $C_1 \approx 2{,}1$, $C_2 \approx 16{,}4$.

## 17.4. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ $\Pr \ll 1$

К свободной конвекции жидких металлов приведенные выше расчетные формулы неприменимы. При отношении $\nu/a \ll 1$ существенное влияние молекулярной теплопроводности при свободной или вынужденной конвекции распространяется далеко в область потока, охваченную беспорядочным турбулизованным течением жидкости. В этом случае при сохранении представления о решающем влиянии молекулярного переноса на собственно процесс теплопроводности следует считаться с тем, что скоростное поле в пределах большей части теплового пограничного слоя зависит главным образом от инерционных сил.

Отбрасывая во втором уравнении системы (17.1.2) третий (вязкий) член, получаем один определяющий критерий

$$(gl^3/a^2)\, \beta \Delta T = \text{Gr}\Pr^2. \quad (17.4.1)$$

Следовательно, при $\Pr \ll 1$ опытные данные должны лучше обобщаться уравнением

$$\text{Nu} = \Phi_2 (\text{Gr}\Pr^2). \quad (17.4.2)$$

Следует заметить, что эта зависимость была предложена Буссинеском еще до предложения Нуссельтом зависимости (17.1.5). Однако обе формулы предлагались для одних и тех же сред, т. е. вводились чисто формально.

Данный нами выше анализ связи между критериями Gr и Pr в зависимости от областей значений критерия Pr позволяет физически обосновать применимость каждой из этих предельных функций к соответствующим группам реальных жидкостей. Опыты с рядом жидких металлов подтвердили эти выводы. При этом в области $\Pr^2\text{Gr}$ от 10 до $10^4$

$$\overline{\text{Nu}} \approx 0{,}53 (\text{Gr} \Pr^2)^{1/4}. \quad (17.4.3)$$

## 17.5. ТЕПЛООТДАЧА В ЖИДКИХ И ГАЗОВЫХ СЛОЯХ

В горизонтальных слоях, подогреваемых снизу, возникают условия, при которых более холодная жидкость расположена над более теплой. В жидкостях и газах, плотность которых уменьшается с увеличением температуры, это ведет к неустойчивому состоянию. Когда перепады температуры между двумя твер-

дыми поверхностями, ограничивающими слой жидкости или газа, достаточно малы, так что число $\mathrm{Ra} < 1700$, слой неподвижен. Когда же число $\mathrm{Ra} \gtrsim 1700$, в слое возникают периодические ячеистые течения вида валиков или полигональных структур.

Вид устойчивых ячеистых течений зависит от изменения физических свойств жидкости с температурой. При слабой зависимости свойств жидкости от температуры устойчивой является валиковая структура течения. Для этилового спирта в стационарном режиме теплообмена конвективное течение имеет валиковую структуру при $\mathrm{Ra}_{\text{кр}} \leqslant \mathrm{Ra} < 10\mathrm{Ra}_{\text{кр}}$. Выбор длин волн для устойчивой валиковой структуры имеет случайный характер.

При значительных количествах твердых частиц в слое и слабой нестационарности, создаваемой оседанием частиц, устойчивыми являются трехмерные полигональные структуры до значений числа Рэлея $\mathrm{Ra} \approx 5 \cdot 10^4$, а далее они сменяются неустойчивыми валиками с коротковолновым течением по оси последних. Относительный размер ячеек ($\bar{l}'/l \approx 2$) больше, чем у валиковых структур ($\bar{l}'/l = 1{,}2$, где $l$ — толщина слоя, а $\bar{l}'$ — средний размер валика).

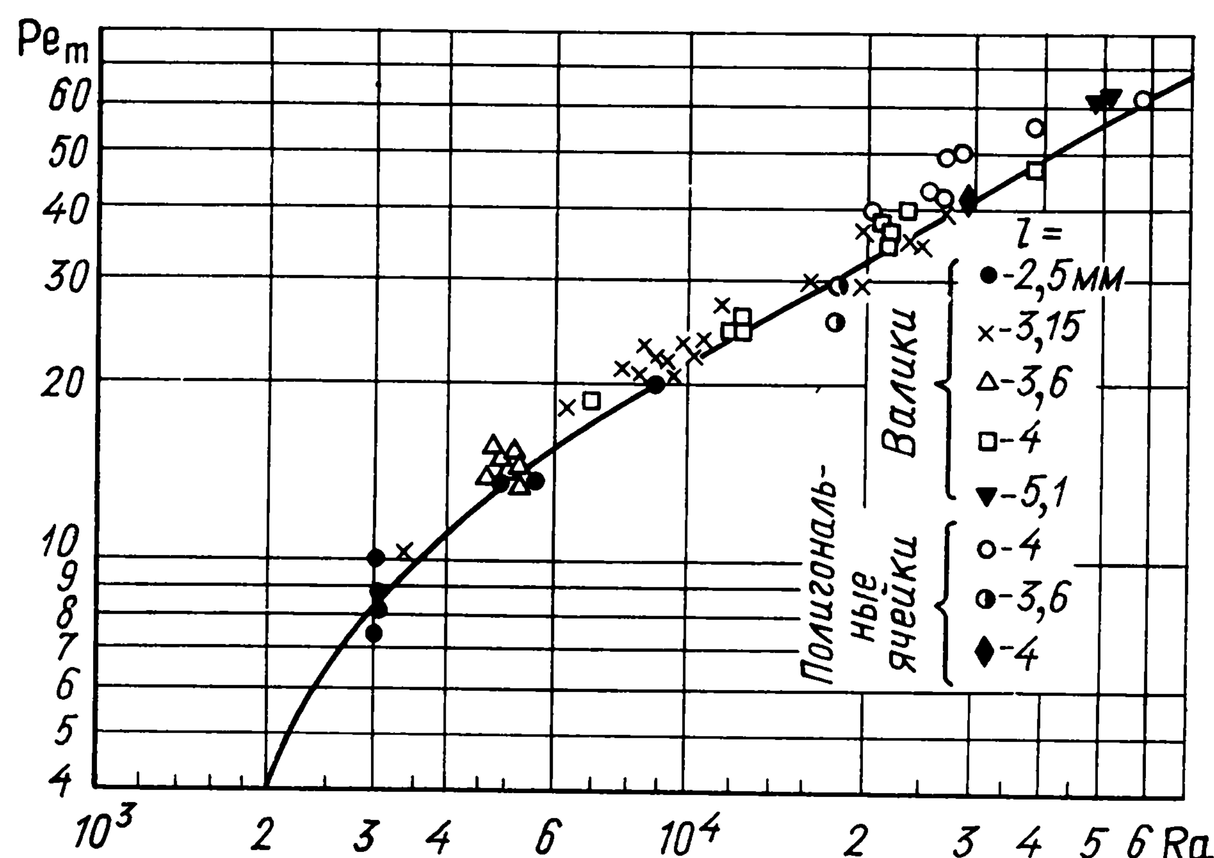



Рис. 17.5. Зависимость $\mathrm{Pe}_m$ от Ra для валиков и полигональных ячеек при различных высотах слоя $l$ ($\mathrm{Pr} \approx 16$)

По мере увеличения числа Ra горизонтальный размер валика возрастает, подъемный и опускной потоки локализуются по вертикальным образующим валика. По большей части валика ($x/l' = 0{,}3 \div 0{,}75$) вертикальная составляющая скорости валика мала и течение близко к плоскопараллельному.

На рис. 17.5 представлены полученные В. С. Бердниковым и А. Г. Кирдяшкиным экспериментальные значения числа Пекле ($\mathrm{Pe}_m = w_{x,\,m}\, l/a$), определенного по максимальной горизонтальной скорости $w_{x,\,m}$ в отдельных ячейках, при различных значениях числа Ra. В области чисел $\mathrm{Ra}_{\text{кр}} \leqslant \mathrm{Ra} < 5 \times \times 10^4$ имеет место зависимость

$$\mathrm{Pe}_m = 0{,}24\,(\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_{\text{кр}})^{1/2}, \qquad (17.5.1)$$

характерная для надкритической области, как это показано в общем случае Л. Д. Ландау.

Значение $\mathrm{Pe}_m$ не зависит от вида ячеистого течения. В области малой надкритичности ($\mathrm{Ra}_{\text{кр}} \leqslant \mathrm{Ra} < 4 \cdot 10^3$) согласно экспериментам Сильвестона имеет место зависимость

$$\mathrm{Nu} = 1 + 1{,}4\,(1 - \mathrm{Ra}_{\text{кр}}/\mathrm{Ra}). \qquad (17.5.2)$$

В диапазоне значений числа Рэлея $4 \cdot 10^3 \leqslant \mathrm{Ra} < 10^5$, где течение имеет квазиячеистый характер,

$$\mathrm{Nu} = 0{,}23\ \mathrm{Ra}^{1/4}. \qquad (17.5.3)$$

В области же течения, имеющего турбулентный характер ($10^5 < \mathrm{Ra} < 10^9$), опытные данные Мулля и Райера, Сильвестона, Глоуба и Дропкина аппроксимируются зависимостью

$$\mathrm{Nu} = 0{,}085\mathrm{Ra}^{1/3}. \qquad (17.5.4)$$

В горизонтальном слое жидкости со свободной верхней границей тепловой гравитационной конвекции может сопутствовать термокапиллярная, вызванная изменением поверхностного натяжения от температуры. При изменении температуры вдоль свободной поверхности возникает термокапиллярная сила, направленная в сторону уменьшения температуры. Трение на свободной поверхности из-за термокапиллярных сил можно записать в форме

$$\tau_0 = \frac{\partial \sigma}{\partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 = \mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)_0. \qquad (17.5.5)$$

Соотношение между термокапиллярной силой и силой молекулярного трения может быть охарактеризовано безразмерным комплексом — числом Марангони:

$$\mathrm{Ma} = bl\Delta T/\mu a, \qquad (17.5.6)$$

где $b = \partial\sigma/\partial T$.

Механизм неустойчивости подогреваемого снизу слоя жидкости со свободной границей зависит от толщины слоя. В тонком слое ($l \ll l_b = \sqrt{b/\rho g \beta}$) возникновение конвективного течения определяется главным образом термокапиллярными силами. В слое же с $l \gg l_b$ основную роль в возникновении неустойчивости играют термогравитационные силы. Для многих жидкостей $l_b = 2 \div 5$ мм.

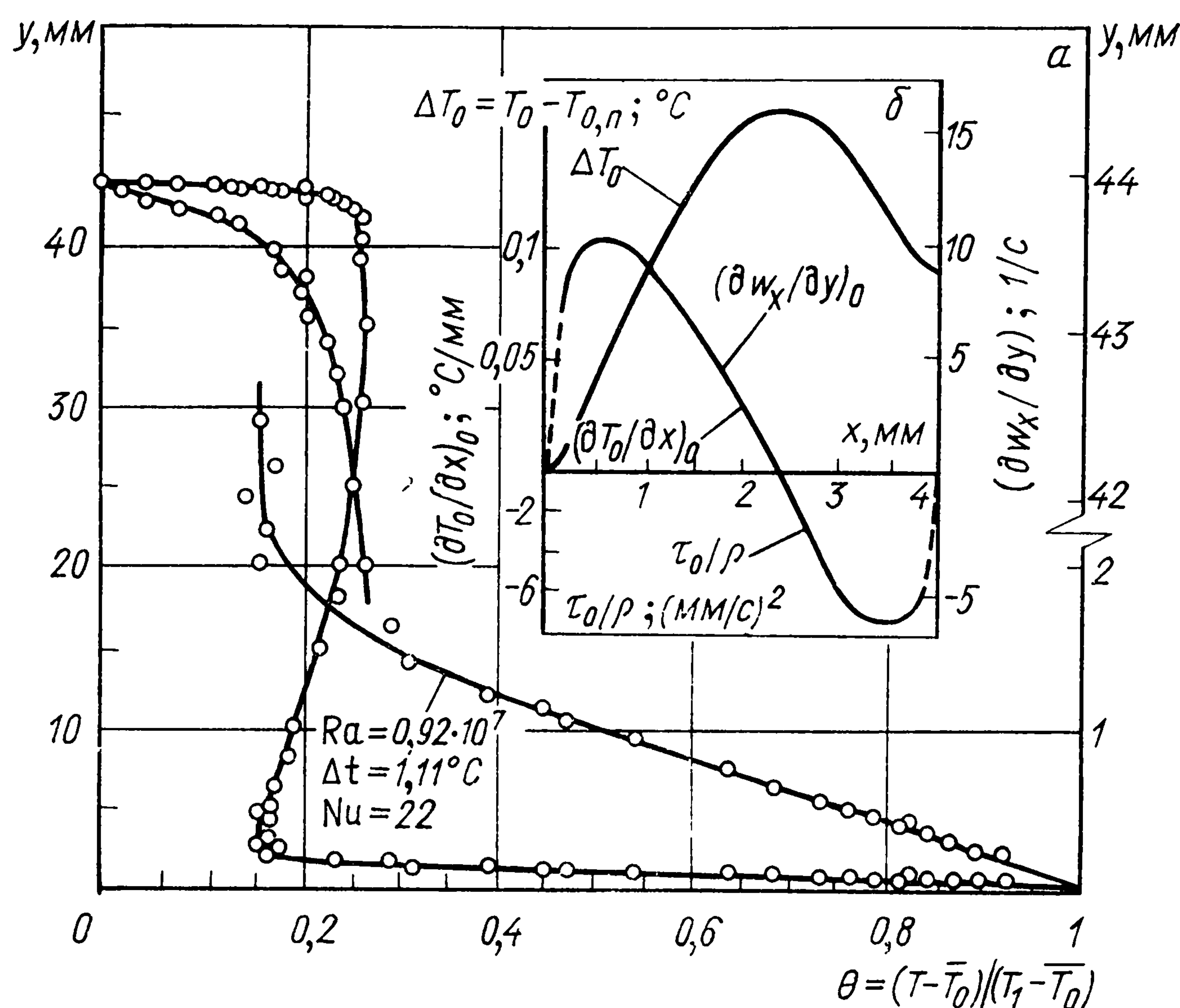



Рис. 17.6. Распределения средней температуры по высоте слоя (*а*) (профили вблизи поверхностей теплообмена показаны в большем линейном масштабе координаты $y$ — шкала справа) и температуры и трения вдоль свободной поверхности в отдельной мелкомасштабной приповерхностной ячейке (*б*) горизонтального слоя этилового спирта в турбулентном режиме ($\mathrm{Ra}=0{,}92\cdot10^7$; $\Delta T=1{,}11°$ С, $\mathrm{Nu}=22$). Экспериментальные данные В. С. Бердникова и А. Г. Кирдяшкина

Исследования коэффициентов теплообмена, а также структуры потока у свободной поверхности при турбулентном режиме течения показали, что в горизонтальных слоях этилового спирта с $l \gg l_b$ наблюдается увеличение интенсивности процессов переноса вблизи свободной поверхности из-за термокапиллярной конвекции.

Коэффициент теплообмена, определенный по перепаду температуры в пограничном слое, у свободной поверхности примерно в три раза больше, чем у жесткой нижней (рис. 17.6, *а*). Визуальные исследования показали, что вбли-

зи свободной поверхности существуют мелкомасштабные ячеистые течения на фоне крупномасштабных, соизмеримых с толщиной слоя (рис. 17.7). Мелкомасштабные ячейки зарождаются в области подъемных потоков крупномасштабных течений и «дрейфуют» с осредненной скоростью крупномасштабных движений. Наиболее вероятная длина волны мелкомасштабного течения обычно много меньше высоты слоя ($\bar{l}'/l \approx 0{,}03 \div 0{,}06$ при $l = 40$ мм для этилового спирта).

На рис. 17.6, *б* показаны профиль температуры вдоль свободной поверхности в отдельной мелкомасштабной ячейке, градиент температуры вдоль поверхности $(\partial T/\partial x)_0$, а следовательно, и трение $\tau = (\partial \sigma/\partial T)\ (\partial T/\partial x)_0 = \mu\ (\partial w_x/\partial y)_0$, возникающее из-за изменения поверхностного натяжения от температуры.

Соотношение между термокапиллярными и термогравитационными силами в ячеистом слое у свободной поверхности можно оценить, предполагая, что

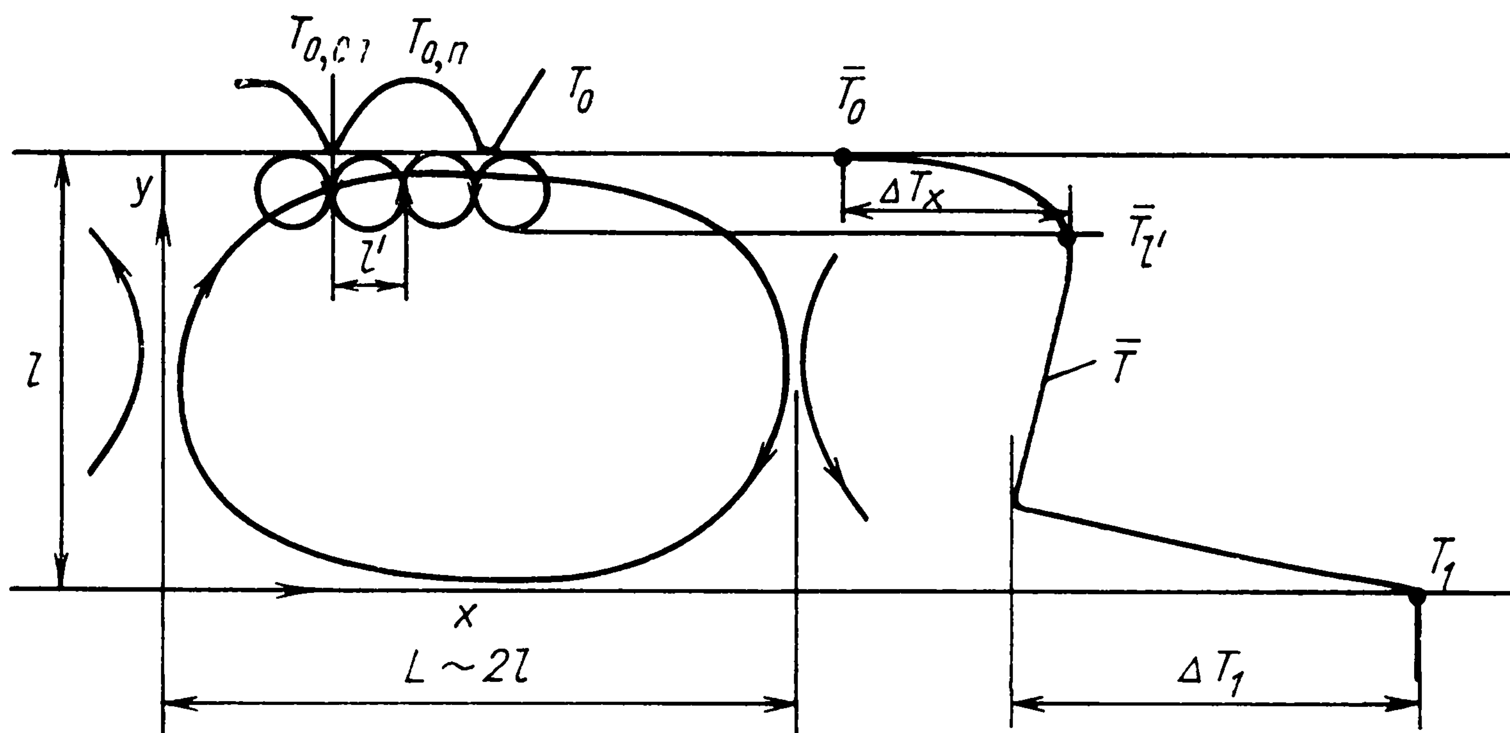



Рис. 17.7. Схема течения в турбулентном горизонтальном слое жидкости со свободной поверхностью теплообмена

глубина его соизмерима с горизонтальным масштабом ячейки. Так как числа Рэлея и Марангони пропорциональны перепаду температуры, что при фиксированных значениях толщины слоя и физических параметров жидкости связь между ними линейная ($\mathrm{Ra} = \mathrm{Ma}\beta\rho g l^2/b$). Действие термогравитационных сил будет соизмеримо с действием термокапиллярных, если значения чисел Марангони и Рэлея одного порядка.

Различие в интенсивности переноса в пограничных слоях вблизи свободной и жесткой поверхностей теплообмена объясняется тем, что у свободной поверхности работают совместно термогравитационный и термокапиллярный механизмы переноса.

На рис. 17.8 представлены зависимости числа Nu от числа Ra для слоев с одной свободной границей теплообмена и для слоев с жесткими поверхностями. Наблюдается увеличение коэффициента теплоотдачи через слой жидкости при наличии свободной поверхности теплообмена на 30% из-за термокапиллярного переноса.

В вертикальных слоях жидкости, теплоизолированных по торцам, существует подъемное течение вблизи горячей поверхности теплообмена и опускное у холодной. Для $\mathrm{Ra} < 10^3$ в слоях жидкости $H/l \gg 1$ при наличии конвективных токов профиль температуры по толщине слоя линейный, т. е. имеет место режим теплопроводности и $\mathrm{Nu} = 1$. При дальнейшем увеличении числа Рэлея образуются пограничные слои вблизи каждой поверхности теплообмена (режимы пограничного слоя). В этом случае коэффициент теплопередачи зависит и от параметра $H/l$. Из-за многообразия возникающих вторичных течений при потере устойчивости первичного потока хороших данных о зависимости $\overline{\mathrm{Nu}}_l \sim \Phi\ (H/l)$ при фиксированных значениях Ra и Pr пока нет.

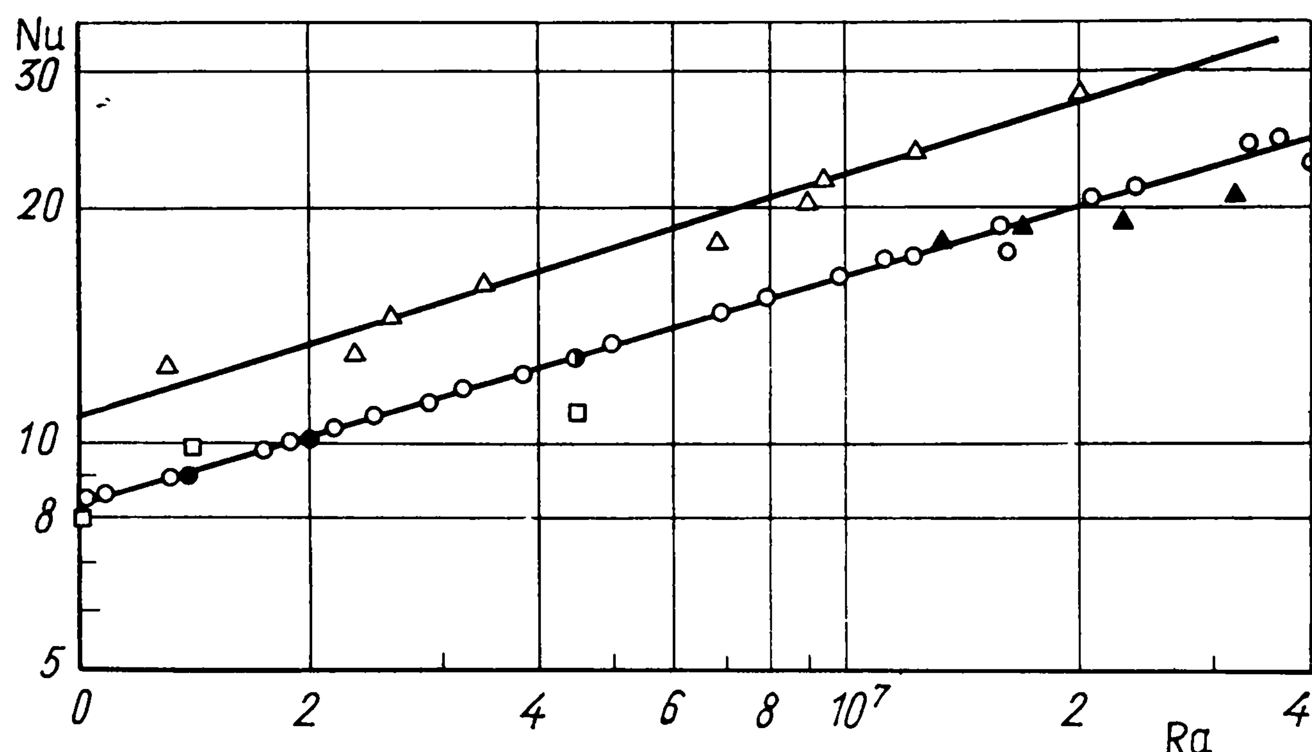



Рис. 17.8. Зависимость Nu от Ra для горизонтальных слоев жидкости:

Δ — эксперименты В. С. Бердникова и А. Г. Кирдяшкина для слоев этилового спирта со свободной поверхностью теплообмена (Pr = 16); ○ — вода, Шу, Гольдштейн; ● — вода, Россби; ▲ — вода, Гарон; ◑ и □ — эксперименты Глоуба и Дропкина для значений $Pr = 10^4$ и 350 соответственно

Для области параметров $0{,}02 < Pr < 11\,560$, $5 < H/l < 18$, $5 \cdot 10^4 < Ra < 7 \cdot 10^8$ экспериментальные данные Дропкина и Сомерскейлза можно описать формулой

$$\overline{Nu} = C(\alpha)\, Ra^{0{,}33}\, Pr^{0{,}074}, \qquad (17.5.7)$$

где $C(\alpha)$ — коэффициент, зависящий от угла наклона ($\alpha = 0$ — горизонтальное положение) при подогреве снизу. Его значения в зависимости от $\alpha$ приведены ниже:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$, град . . . . . . . . | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 |
| $C(\alpha)$ . . . . . . . . . . | 0,07 | 0,065 | 0,06 | 0,057 | 0,05 |

## 17.6. СОВМЕСТНОЕ ВЛИЯНИЕ СВОБОДНОЙ И ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

При малых скоростях вынужденного движения жидкой среды и заметных разностях температур скорость свободной конвекции оказывается соизмеримой со скоростью течения, обусловленной внешним побудителем. В этом случае интенсивность теплоотдачи зависит как от критерия Gr, так и от критерия Re. При этом в последний критерий входит скорость вынужденного течения. Таким образом, в общем случае (при заданной геометрии)

$$Nu = \Phi\,(Pr;\ Gr;\ Re). \qquad (17.6.1)$$

По опытам Д. Н. Ляховского, обобщенным в виде графика на рис. 17.9, совместное воздействие вынужденной и свободной конвекции на теплоотдачу шаров наблюдается при $Re < 150$. Влияние тепловой гравитационной конвекции на поле скорости и температуры при течении жидкости и газа в каналах различной конфигурации наблюдается уже при относительно небольшой плотности теплового потока в ламинарных и турбулентных режимах течения.

Для вертикальных труб при совпадении направления вынужденной и свободной конвекции в области установившегося теплового потока ($x/D > 40$) экспериментальные данные Б. С. Петухова и Б. К. Стригина описываются с погрешностью $\pm$ 10% следующими формулами:

для $Ra_a/Re^2 \leqslant 10^{-4}$

$$Nu/Nu_0 = [1 + 720\,(Ra_a/Re^2)]^{-1}, \qquad (17.6.2)$$

для $Ra_a/Re^2 > 10^{-4}$

$$Nu/Nu_0 = 3{,}97\,(Ra/Re^2)^{1/3}. \qquad (17.6.3)$$

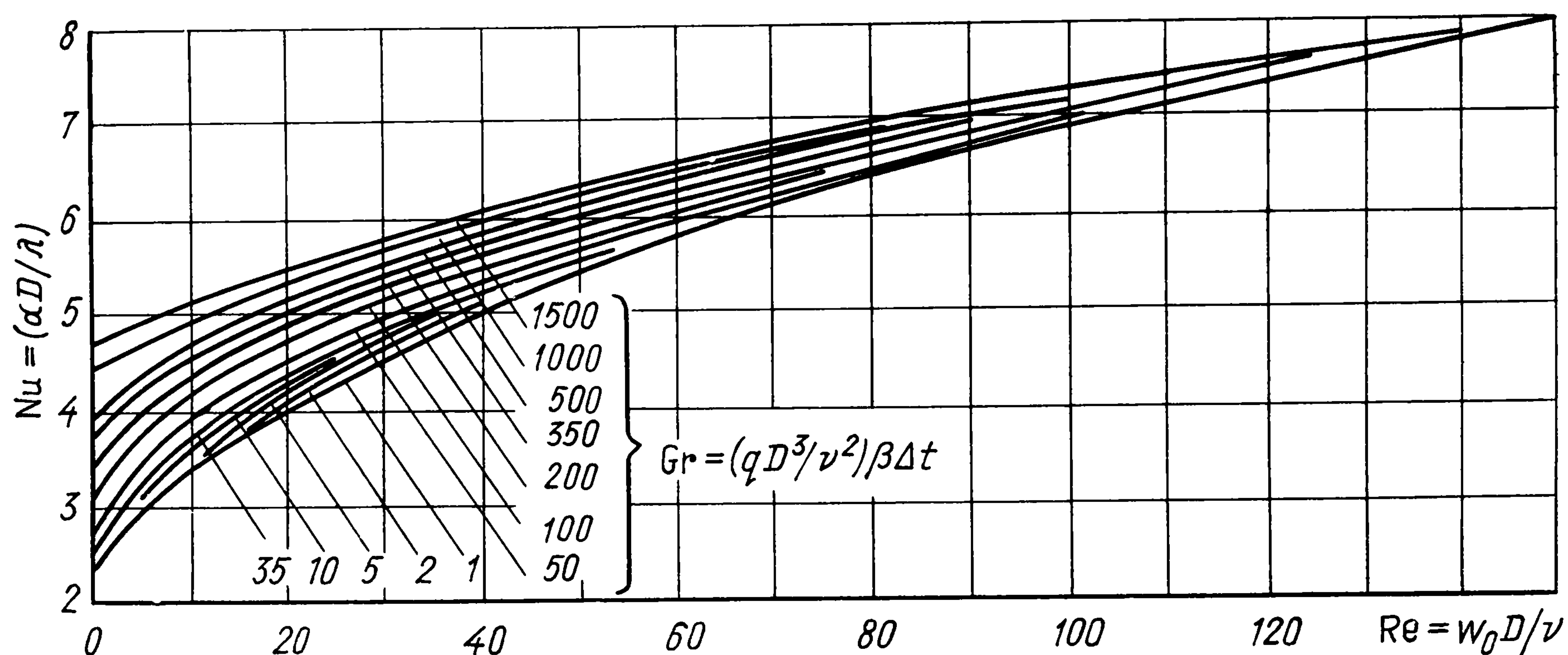



Рис. 17.9. Совместное влияние вынужденной и свободной конвекции на теплоотдачу шара при Pr=0,72

Здесь

$$Nu_0 = (\xi/8)\,Re\,Pr/K + 1{,}27\sqrt{\xi/8}\,(Pr^{2/3} - 1), \qquad (17.6.4)$$

где $\xi = (1{,}82\ \lg Re - 1{,}64)^{-2}$ — коэффициент трения;

$$K = 1 + 900/Re;\quad Ra_a = \frac{\beta g d^4\ \partial T_{ж}/\partial x}{\nu a};\quad Re = \overline{w}d/\nu.$$

Эти формулы описывают экспериментальные данные в области значений параметров $300 \leqslant Re \leqslant 3\cdot10^4$, $5\cdot10^3 \leqslant Ra_a \leqslant 8\cdot10^6$ и $2 \leqslant Pr \leqslant 6$. При $Ra_a/Re^2 \leqslant 10^4$ наблюдается снижение теплоотдачи, связанное, по-видимому, с некоторым уменьшением интенсивности турбулентности под влиянием свободной конвекции.

При противоположном направлении свободной и вынужденной конвекций Б. С. Петуховым и Б. К. Стригиным получено следующее соотношение, описывающее их эксперименты с погрешностью ±10%:

$$Nu/Nu_0 = [1 + 0{,}031\,(Ra_a/Re)]^{1/3} - 0{,}15\exp\{-2\,[(Ra_a/Re - 8)]^2\}. \qquad (17.6.5)$$

Второй член в правой части этого уравнения пренебрежимо мал при $Ra_a/Re \geqslant 16$. Уравнение (17.6.5) справедливо в области значений критериев подобия: $300 \leqslant Re \leqslant 2{,}5\cdot10^4$, $5\times10^3 \leqslant Ra_a \leqslant 1{,}3\cdot10^7$ и $2 \leqslant Pr \leqslant 6$.

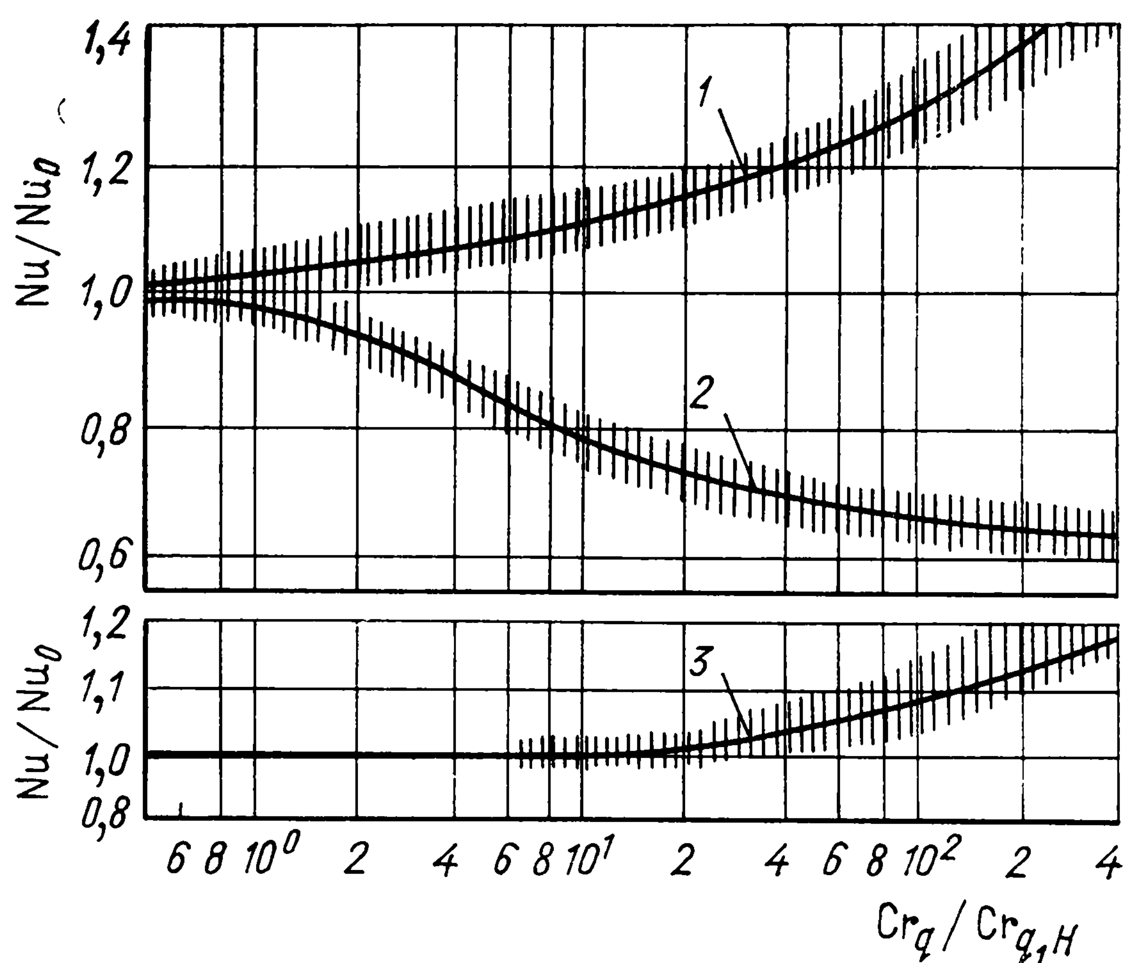



Рис. 17.10. Совместное влияние вынужденной и свободной конвекций на теплообмен в горизонтальных трубках [12]:

*1* — низ трубы; *2* — верх трубы; *3* — среднее значение по периметру трубы

В горизонтальной подогреваемой трубе совместное действие тепловой гравитационной и вынужденной конвекции приводит к существенному различию коэффициента теплообмена по периметру трубы. Наименьшее значение теплообмена наблюдается в верхней части канала. Это расхождение в локальных коэффициентах теплообмена, как следует из эксперимента Б. С. Петухова, А. Ф. Полякова, Ю. А. Шехтера и В. А. Кулешова (рис. 17.10), возрастает с увеличением отношения числа Грасгофа данного

течения $Gr_q = g\beta q_{ст} d^4/\nu^2\lambda$ к числу Грасгофа, при котором возникает тепловая-гравитационная конвекция в вынужденном потоке:

$$Gr_{q,H} = 3\cdot 10^{-5}\ Re^{2,75}\ Pr^{0,5}[1 + 2,4(Pr^{2/3} - 1)Re^{-1/8}]. \qquad (17.6.6)$$

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*


1. **Бояринцев Д. М.** Теплопередача через жидкостные и газовые прослойки.— «Журн. техн. физ.», 1950, т. 20, № 9, с. 1084.
2. **Дропкин Д., Сомерскейлз Е.** Теплоотдача путем естественной конвекции в жидкостях, ограниченных двумя параллельными плоскими поверхностями, которые располагаются под различными углами наклона к горизонтали.— «Тр. амер. об-ва инж.-мех., сер. С. Теплопередача», 1965, № 1, с. 94.
3. **Жидкометаллические** теплоносители. Изд. 2-е. М., Атомиздат, 1967. Авт.: С. С. Кутателадзе, В. М. Боришанский, И. И. Новиков, О. С. Федынский.
4. **Кирпичев М. В., Михеев М. А., Эйгенсон Л. С.** Теплопередача. М.— Л., Госэнергоиздат, 1940.
5. **Кутателадзе С. С., Кирдяшкин А. Г., Ивакин В. П.** Турбулентная естественная конвекция у вертикальной изотермической пластины.— «Докл. АН СССР», 1974, т. 217, № 6, с. 1270.
6. **Кутателадзе С. С., Кирдяшкин А. Г., Бердников В. С.** Поле скорости в конвективной ячейке горизонтального слоя жидкости при тепловой гравитационной конвекции.— «Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана», 1974, т. 10, № 2, с. 137.
7. **Кутателадзе С. С., Кирдяшкин А. Г., Бердников В. С.** Влияние термокапиллярных сил на процессы переноса у свободной поверхности жидкости в горизонтальном слое при турбулентной тепловой гравитационной конвекции. — «Докл. АН СССР», 1976, т. 231, № 2, с. 309.
8. **Ляховский Д. Н.** Конвективный теплообмен сферических взвешенных частиц с окружающей средой.— «Котлотурбостроение», 1947, № 5.
9. **Михеев М. А.** Основы теплопередачи. М.— Л., Госэнергоиздат, 1956.
10. **Петухов Б. С.** Турбулентное течение и теплообмен в трубах при существенном влиянии термогравитационных сил. — В кн.: Труды Международного семинара по турбулентной свободной конвекции. Дубровник, СФРЮ, 1976, с. 701.
11. **Чизрайт Р.** Естественная турбулентная конвекция на вертикальной плоской поверхности.— «Труды амер. об-ва инж.-мех., сер. С. Теплопередача», 1968, т. 90, № 1, с. 1—9.
12. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. Пер. с нем. М., «Наука», 1969.
13. **Hermann R. von.** Wärmeübergang bei freier Konvektion. — «Phys. Z.», 1932, Jrg. 33, N 11, S. 425.

Глава **18**

# ТЕПЛООБМЕН В РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗАХ

## 18.1. ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

Вопросы теплообмена в разреженном газе имеют серьезное значение в технологических процессах при глубоком вакууме и в расчетах теплового режима тел, летающих в верхних слоях атмосферы. Согласно молекулярно-кинетической теории газов кинематическая вязкость, характеризующая скорость распространения сдвиговых возмущений,

$$\nu \sim \bar{l}\,\bar{v} \sim v/\rho, \tag{18.1.1}$$

а температуропроводность, характеризующая скорость распространения тепловых возмущений,

$$a \sim \bar{l}\,\bar{v}\,c_v \sim (1/\rho)\,\bar{v}c_v. \tag{18.1.2}$$

Здесь $\bar{l}$ — средняя длина свободного пробега молекул, а $\bar{v}$ — средняя арифметическая скорость молекул.

Следствием этих соотношений является увеличение толщины пограничного слоя с уменьшением плотности. При этом возможны такие условия, когда допущения в выводе уравнений пограничного слоя становятся неприемлемыми: течение даже при больших скоростях может стать ползущим.

Когда плотность газа столь мала, что средняя длина свободного пробега молекул $\bar{l}$ соизмерима с характерным линейным размером $L$ тела или толщиной пограничного слоя, ударной волны и т. п., газ нельзя рассматривать как сплошную среду. Отношение средней длины свободного пробега к характерному линейному масштабу называется числом Кнудсена и характеризует степень разреженности газа. Дискретность структуры газа проявляется при значениях числа $\mathrm{Kn} > 0{,}01$.

При числах $\mathrm{Kn} \gg 1$ процессы переноса в газах практически перестают зависеть от столкновения между молекулами. Такой режим физических переносов в газе называется свободно-молекулярным. Между континуумным и свободно-молекулярным режимами существуют промежуточные режимы, специфические особенности которых определяются условиями течения. Область разреженных газов охватывает для покоящегося газа диапазон значений $0{,}01 < \mathrm{Kn} < \infty$, для движущегося — режимы от весьма вязкого ламинарного течения до свободно-молекулярного.

Число Кнудсена имеет глубокую связь с газодинамическими параметрами M и Re. Из кинетической теории газов следует, что

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Re}} = \frac{\bar{l}}{L}\sqrt{\frac{2}{k\pi}}. \tag{18.1.3}$$

Таким образом, если характерным размером является размер тела (свободно-молекулярный поток), то

$$\mathrm{Kn} = 1{,}25\sqrt{k}\,(\mathrm{M}/\mathrm{Re}), \tag{18.1.4}$$

если же толщина ламинарного пограничного слоя, то

$$\mathrm{Kn} = \bar{l}/\delta \sim \mathrm{M}/\sqrt{\mathrm{Re}}. \tag{18.1.5}$$

Следовательно, при $\mathrm{M}/\sqrt{\mathrm{Re}} \ll 1$ поток сплошной, при $\mathrm{M}/\sqrt{\mathrm{Re}} \gg 1$ — свободно-молекулярный.

## 18.2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОЛЕКУЛ С ПОВЕРХНОСТЬЮ. СВОБОДНО-МОЛЕКУЛЯРНЫЙ ПЕРЕНОС ТЕПЛА

Кроме плотности газа в свободно-молекулярном потоке для процессов переноса существенны также обмен энергией и импульсом при столкновении молекул со стенкой и распределение скоростей молекул. Полнота энергообмена молекул на стенке характеризуется коэффициентом термической аккомодации

$$\alpha=(e_{п}-e_{о})/(e_{п}-e_{ст}), \qquad (18.2.1)$$

где $e_{п}$, $e_0$ — потоки энергии падающих и отраженных молекул; $e_{ст}$ — поток энергии, который уносился бы от стенки при полном энергообмене, т. е. при условии, когда энергия отраженных молекул соответствует температуре стенки.

По экспериментальным данным, для воздуха и конструкционных материалов коэффициенты термической аккомодации изменяются в пределах от 0,87 до 0,97. Для газов с небольшой молекулярной массой коэффициент аккомодации на поверхности специально очищенных металлов имеет малое значение. Например, для пары гелий — вольфрам $\alpha \approx 0{,}02$.

Обмен касательным импульсом характеризуется коэффициентом аккомодации касательного импульса

$$\sigma=(\overline{w}_{п}-\overline{w}_0)/\overline{w}_{п}; \qquad (18.2.2)$$

индексы «п» и «о» относятся к падающим и отраженным молекулам, $\overline{w}$ — осредненное значение тангенциальной скорости. Если $\sigma = 0$, отражение молекул от стенки полностью зеркальное, если $\sigma = 1$ — диффузное.

Для небольших скоростей молекул (порядка сотен метров в секунду) известно, что аккомодация касательного импульса совершенна, $\sigma \approx 1$ и можно использовать представление о диффузном рассеянии.

Расчеты процессов переноса тепла у элемента поверхности при установившемся течении проведены Эпштейном для малых скоростей, Столдером и Жуковым, Цзяном и другими исследователями для больших скоростей. Результаты теории свободно-молекулярного переноса тепла изложены далее согласно Цзяну, Шаафу, Пробстину.

Плотность теплового потока при свободно-молекулярном течении

$$q_{св{\cdot}м}=\alpha\,(e_{п}-e_{ст}). \qquad (18.2.3)$$

В одноатомном газе поверхностью воспринимается только энергия поступательного движения молекул. Поэтому

$$e_{п}=e_{пост}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{2}\,mv^2\,v_x f\,dv_x\,dv_y\,dv_z. \qquad (18.2.4)$$

Здесь $v$ — полная скорость молекулы в пространстве $x$, $y$, $z$; $m$ — масса молекул и $f$ — функция распределения скоростей, численно выражающая плотность молекул в единице объема пространства скоростей. Первым приближением в рассматриваемой проблеме является принятие равновесного или максвелловского распределения скоростей.

При наличии невозмущенной скорости потока газа

$$f=\frac{\rho_0}{m\,(2\pi RT_0)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(v_x-w\sin\theta)^2+(v_y+w\cos\theta)^2+c^2}{2RT_0}\right]. \qquad (18.2.5)$$

Для многоатомных газов необходимо учитывать внутреннюю энергию молекул, равномерно распределенную по степеням свободы в случае термодинамического равновесия. Поток внутренней энергии молекул на поверхность

$$e_{вн}=jN_{п}\,mRT_0/2. \qquad (18.2.6)$$

Здесь $j = (5 - 3k)/(k - 1)$ — число степеней свободы, принимающих участие в энергообмене; $N_п$ — число молекул, падающих на единицу поверхности в единицу времени:

$$N_п = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} v_x f dv_x \, dv_y \, dv_z. \qquad (18.2.7)$$

Таким образом, для многоатомных газов

$$e_п = e_{пост} + e_{вн}. \qquad (18.2.8)$$

Можно показать, что поток энергии отраженных молекул многоатомного газа

$$e_{ст} = (4 + j) N_п mRT_{ст}/2. \qquad (18.2.9)$$

Подставляя значения $e_п$ и $e_{ст}$ в уравнение (18.2.3) и принимая аккомодацию энергии одинаковой по всем степеням свободы, после интегрирования получаем

$$q_{св.м} = \alpha \rho_0 RT_0 \sqrt{\frac{RT_0}{2\pi}} \left[ \left[ S^2 + \frac{k}{k-1} - \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{T_{ст}}{T_0} \right] \{\exp[-(S \sin\theta)^2] + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\pi} S \sin\theta [1 + \operatorname{erf}(S \sin\theta)]\} - \frac{1}{2} \exp[-(S \sin\theta)^2] \right]. \qquad (18.2.10)$$

Здесь $S = w/\sqrt{2RT_0} = M\sqrt{k/2}$; $\theta$ — угол атаки.

Из формул (18.2.10) можно получить значение равновесной температуры стенки. При $S \gg 1$

$$q_{св.м} \approx \frac{1}{2} \alpha \rho_0 w^3 \sin\theta \times$$
$$\times \left[ 1 - \frac{k+1}{2(k-1)} \frac{T_{ст}}{T_0} \right]. \qquad (18.2.11)$$

Отсюда следует, что при $q_{св.м} = 0$ и больших числах Маха отношение адиабатической температуры стенки к температуре торможения потока равно

$$T^*_{ст}/T^* \approx 2k/(k+1). \qquad (18.2.12)$$

Таким образом, в свободно-молекулярном потоке $T^*_{ст} > T^*$, т. е. коэффициент восстановления больше его значения в сплошном потоке газа. Он не зависит от коэффициента аккомодации в том случае, когда теплообмен только конвективный.

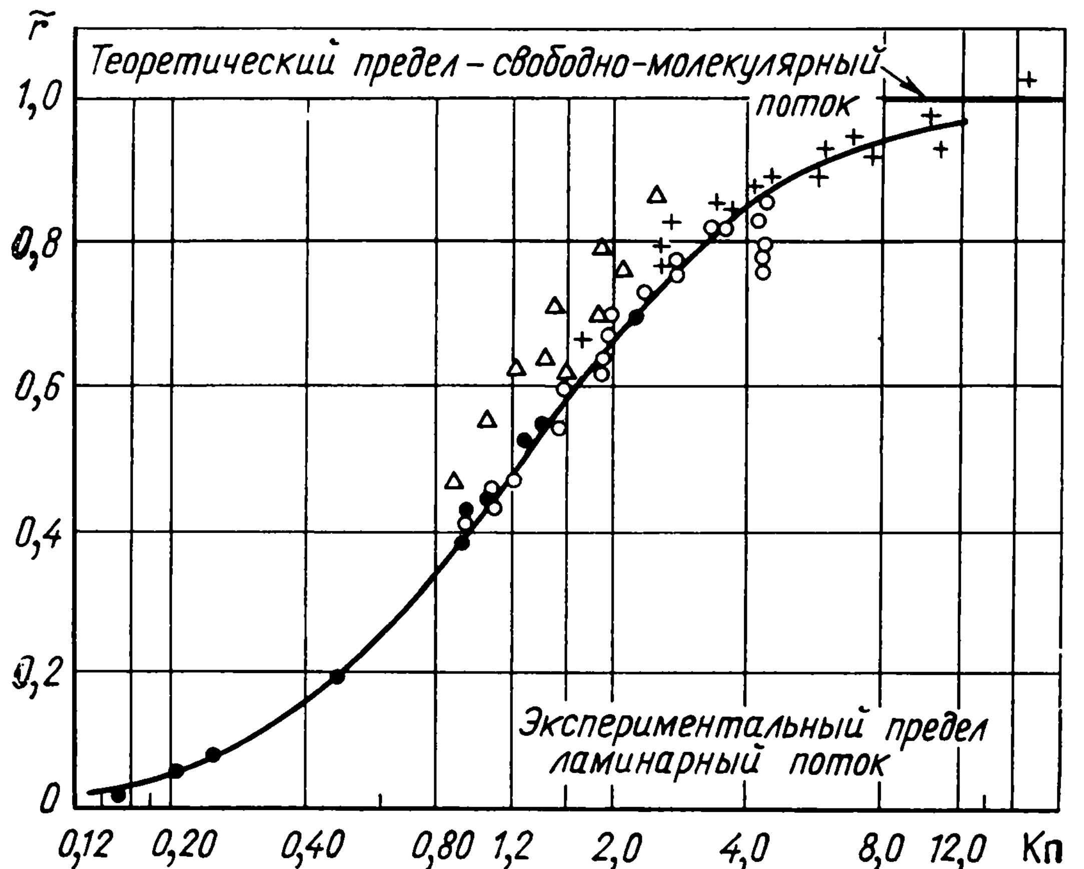



Рис. 18.1. Экспериментальные данные о коэффициенте восстановления температуры при обтекании цилиндра:

○ — Дьюи, M = 5,8; ● — Лауфер и Маккелелан, M = 3,0; + — Шерман, M = 2 и 4; Δ — Столдер и др., M = 1,9 ÷ 3,2

Из формулы (18.2.11) для сильно охлаждаемого тела ($S \gg T_{ст}/T_0$) и при полной аккомодации ($\alpha = 1$) получим

$$q = (1/2) \rho_0 w^3 \sin\theta. \qquad (18.2.13)$$

Это значение теплового потока — предельное при свободно-молекулярном переносе — составляет половину рассеиваемой энергии, приходящейся на единицу поверхности и вычисленной по сопротивлению тела в потоке с большими числами M.

На рис. 18.1 изображена экспериментально полученная зависимость относительного коэффициента восстановления $\tilde{r}$ от числа Кнудсена при обтекании цилиндра воздухом:

$$\tilde{r} = (r - r_л)/(r_{св.м} - r_л), \qquad (18.2.14)$$

где $r_л$ — коэффициент восстановления в ламинарном потоке (здесь принято $r_л = 0{,}94$). Из графика видно, что свободно-молекулярный режим имеет место при $Kn > 10$.

Интегрируя уравнение (18.2.10) по поверхности, можно получить суммарный тепловой поток для выпуклого тела любой формы. В частности, для цилиндра, сферы и плоской пластины с углом атаки $\theta = 0$ на рис. 18.2 по расчетам Оппенгейма дана зависимость числа $\beta St$ от $S$:

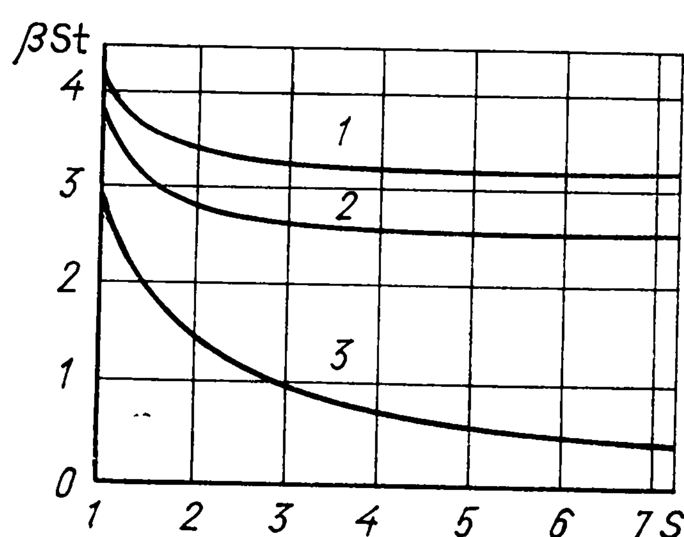



Рис. 18.2. Теплообмен в свободно-молекулярном потоке:
1 — цилиндр; 2 — сфера; 3 — пластина

$$\beta\, St = \frac{2k}{\alpha\,(k+1)} \frac{Q}{\rho_0 F w c_p (T^*_{ст} - T_{ст})}, \qquad (18.2.15)$$

где $F$ — общая поверхность тела. Множитель $\beta = 2k/\alpha\,(k+1)$ взят для удобства сравнения с числом St в сплошном потоке ($\alpha$ — коэффициент термической аккомодации). Из рис. 18.2 видно, что при $S = \sqrt{k/2}\, M > 3$ закон теплообмена для цилиндра и сферы практически не зависит от числа $M$ и тепловой поток определяется параметрами $\rho_0$ и $w$. Для пластины число St принимает предельное значение, равное нулю при весьма больших скоростях, согласно зависимости $\beta St = 1/\sqrt{2k\pi} M$.

Для теплообмена в неподвижном газе ($S = 0$) с температурой $T$ уравнение (18.2.10) для выпуклых тел принимает вид

$$q_{св.т} = \alpha \rho c_v \frac{k+1}{2} \sqrt{RT/2\pi}\,(T - T_{ст}). \qquad (18.2.16)$$

Для тела в неограниченном объеме

$$Q_{св.м} = \alpha \rho c_v \frac{k+1}{2} \sqrt{RT/2\pi}\,(T - T_{ст})\, F. \qquad (18.2.17)$$

Простейшим случаем теплообмена в ограниченном объеме является перенос между двумя параллельными пластинами, когда влиянием краевых эффектов можно пренебречь. Если пластины имеют коэффициенты аккомодации $\alpha_1$ и $\alpha_2$ и температуры $T_1$ и $T_2$, то

$$q_{св.м} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 - 1} \frac{\sqrt{RT_1 T_2}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}} \rho c_v \frac{k+1}{2} (T_1 - T_2). \qquad (18.2.18)$$

При рассмотрении переноса тепла в объеме более сложной формы интегрирование уравнений для молекулярного перёноса энергии существенно усложняется, так как необходимо при этом учитывать взаимное расположение элементов поверхностей, участвующих в тепловом взаимодействии.

Определенная выше граница свободно-молекулярного режима ($Kn \approx 10$) справедлива для газа, движущегося с малой скоростью или покоящегося, а также для неохлаждаемого тела при гиперзвуковых скоростях. Если тело сильно охлаждается, то при высоком коэффициенте аккомодации скорость отраженных молекул будет намного меньше скорости налетающих, и плотность потока молекул от тела будет столь большой, что возможные столкновения между молекулами вблизи тела будут играть существенную роль. В этом случае критерием свободно-молекулярного режима является число Кнудсена, найденное по средней длине свободного пробега отраженных молекул:

$$Kn_{ст} = \bar{l}_{ст}/L \gg 1. \qquad (18.2.19)$$

Величина $\bar{l}_{ст}$ имеет порядок $\bar{l}_0 \bar{v}_{ст}/w$. Здесь $\bar{l}_0$ — средняя длина свободного пробега молекул перед ударной волной.

Решение интегрально-дифференциального уравнения Больцмана в кинетической теории газов для случая почти свободно-молекулярного потока, когда

необходимо учитывать первые столкновения отраженных молекул, показывает, что относительное значение теплового потока на стенке

$$q/q_{\text{св.м}} = 1 - \varkappa/\text{Kn}_{\text{ст}}, \qquad (18.2.20)$$

где в частном случае сферы $\varkappa = 0{,}38 + 2{,}26\, \bar{v}_{\text{ст}}/w$. Эта формула справедлива в диапазоне $1 < \text{Kn}_{\text{ст}} < 5$.

## 18.3. ТЕЧЕНИЕ СО СКОЛЬЖЕНИЕМ И ТЕМПЕРАТУРНЫМ СКАЧКОМ

На расстоянии от стенки, равном средней длине свободного пробега молекул, процессы переноса можно считать свободно-молекулярными, и в этой области возникают скачки скорости (скольжение) и температуры.

Молекулярно-кинетическая теория газов с точностью до множителя, близкого к единице, дает значение скольжения и температурного скачка у стенки в виде

$$\bar{w}_S = \frac{2-\sigma}{\sigma}\, \bar{l} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{\text{ст}} + \frac{3}{4}\, \bar{l} \sqrt{\frac{2R}{\pi T}} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{\text{ст}}; \qquad (18.3.1)$$

$$\Delta T_S = T_{\text{г.ст}} - T_{\text{ст}} = 2\, \frac{2-\alpha}{\alpha}\, \frac{k}{k+1}\, \frac{1}{\text{Pr}}\, \bar{l} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{\text{ст}}. \qquad (18.3.2)$$

Здесь $T_{\text{г. ст}}$ — температура газа у стенки. Величина $\xi = 2[(2/\alpha - 1)]\,[k/(k + 1)]$ называется *коэффициентом скачка*. Второй член в уравнении (18.3.1) выражает влияние термомолекулярного течения—движения газа в направлении возрастания температуры.

Как видно из этих формул, скольжение и температурный скачок существуют при любом давлении, проявляясь в слое Кнудсена толщиной $(1 \div 2)\,\bar{l}$. Так как при больших давлениях $\bar{l}$ мало, значения $w_S$ и $\Delta T$, пропорциональные $\bar{l}$, пренебрежимо малы по сравнению со значением скорости течения и температурного напора. На этом и основана гипотеза прилипания газа к стенке в динамике сплошной среды.

При значениях $\text{Kn} > 0{,}01$ выражения (18.3.1) и (18.3.2) можно ввести в граничные условия уравнений Навье — Стокса и энергии и далее искать решение для значений коэффициентов трения и теплообмена.

Многочисленные теоретические исследования в этом направлении основаны на использовании уравнений пограничного слоя с граничными условиями, учитывающими разрежение. Принципиальным здесь является вопрос о возможности такого течения, когда уравнения пограничного слоя остаются справедливыми при наличии влияния скольжения и температурного скачка.

Относительная скорость скольжения выражается через критерии M и Re следующим образом:

$$\frac{w_S}{w} \approx \frac{\bar{l}}{w} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{\text{ст}} \approx \frac{\bar{l}}{w}\, \frac{w}{\delta} \approx \frac{\text{M}}{\sqrt{\text{Re}}}. \qquad (18.3.3)$$

Для описания движения уравнениями пограничного слоя достаточно условия $\text{Re} \gg 1$. Из приведенных соотношений ясно, что если при значении $\text{Re} \gg 1$ значением величины $\text{M}/\sqrt{\text{Re}}$ нельзя пренебречь, относительное значение скорости скольжения может оказаться существенным.

Задача об учете скольжения при обтекании полубесконечной плоской пластины потоком вязкого газа решена Б. П. Шидловским в приближениях теории пограничного слоя. Решение сводится к задаче Блазиуса с предположением о линейности связи между $\mu$ и $T$. Проведенный анализ не обнаруживает влияния разрежения на температуру адиабатической стенки. При наличии теплообмена для заданной температуры стенки температурный скачок

$$\Delta T_S = 0{,}664\, \frac{k}{k+1}\, \bar{l} \sqrt{\frac{w}{\nu x}} \sqrt{\frac{T_{\text{ст}}}{T}}\, (T - T_{\text{ст}}). \qquad (18.3.4)$$

Полуэмпирическим вариантом такого подхода является анализ обтекания сферы разреженным газом, выполненный Кэвено. Он воспользовался представлением температурного скачка как температурного перепада на эффективном контактном тепловом сопротивлении между газом и стенкой. В этом случае

$$\alpha_0/\alpha = 1 + \xi(\bar{l}/\mathrm{Pr})(\alpha_0/\lambda), \tag{18.3.5}$$

где $\alpha_0$ и $\alpha$ — коэффициенты теплообмена при одинаковых тепловых потоках соответственно при отсутствии и наличии температурного скачка; $\xi$ вводится как коэффициент скачка из формулы (18.3.1). Формулу (18.3.5) можно преобразовать к виду

$$1/\mathrm{Nu} = 1/\mathrm{Nu}_0 + \xi\,\mathrm{Kn}/\mathrm{Pr}. \tag{18.3.6}$$

Значение числа $\mathrm{Nu}_0$ для сплошного несжимаемого вязкого потока около сферы взято из работы Дрейка и Бэкера. Кэвено получил удовлетворительное согласование формулы (18.3.6) с экспериментами в режиме дозвуковых скоростей, приняв по опытным данным $\xi = 3{,}42$. Величина $\xi$ учитывает коэффициент аккомодации, атомность газа и допущения, связанные с принятой схе-

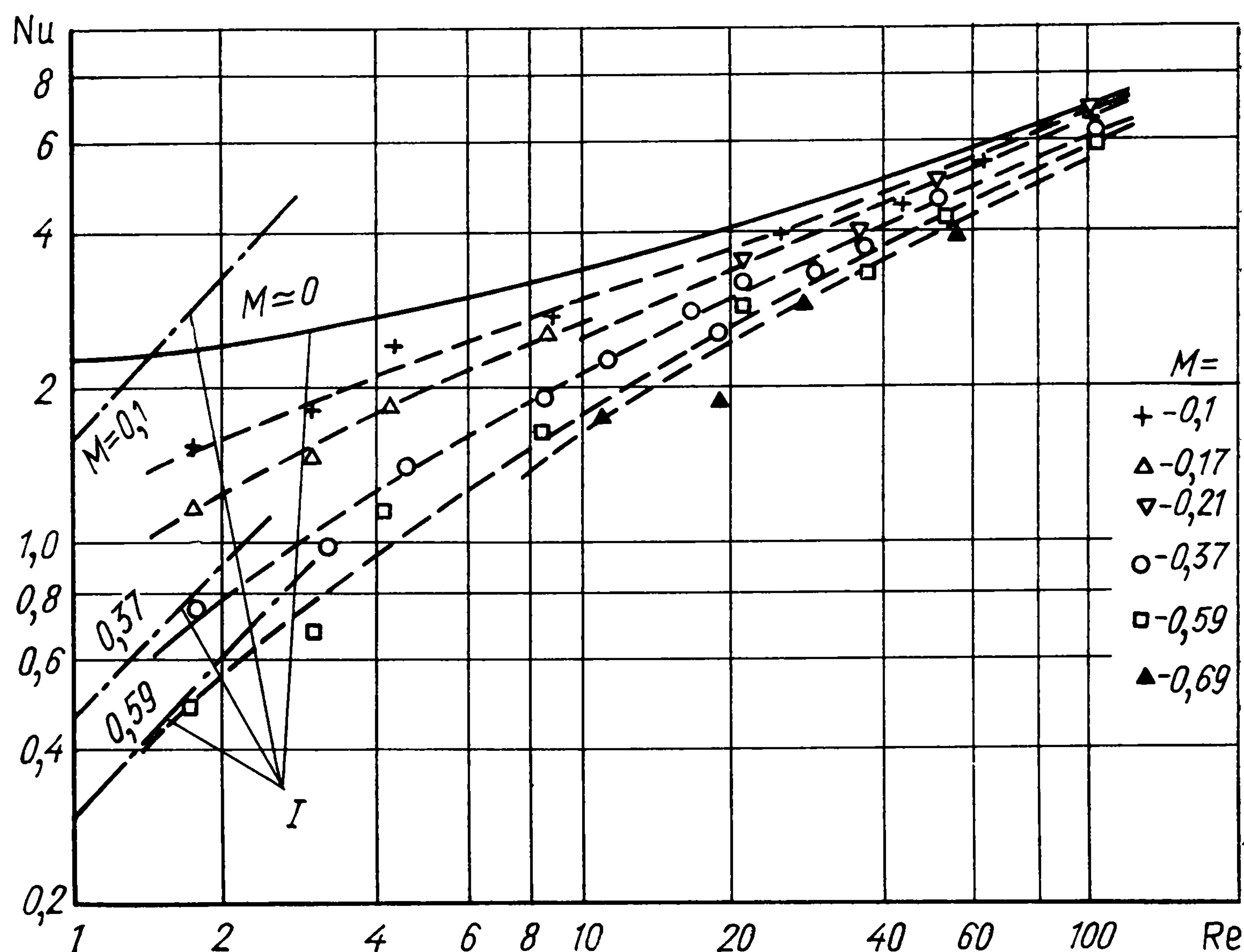



Рис. 18.3. Теплообмен в дозвуковом потоке разреженного газа при $0{,}1<M<0{,}5$:

*1* — расчет для свободно-молекулярного течения при $M\approx0$; 0,1; 0,37; 0,59

матизацией. Поэтому ее значение должно определяться для конкретных условий экспериментально. На рис. 18.3 показано влияние разрежения на теплообмен сферы по опытам Кэвено.

Для разреженного газа вследствие относительно больших размеров возмущенной области первое приближение теории пограничного слоя оправдывается не всегда даже при малых числах Кнудсена. Во-первых, следует иметь в виду необходимость учета влияния толщины вытеснения $\delta^*$ на течение потока вне пограничного слоя. Во-вторых, для сравнительно небольших тел ($\delta \sim L$) нужно учитывать кривизну поверхности и ударной волны.

Ван-Дайк показал, что влияние температурного скачка на теплообмен может иметь такой же порядок, как и упомянутые выше эффекты. В частности, он нашел связь между тепловым потоком $q$ в лобовой точке сферы для условий: $k = 1{,}4$; $\mathrm{Pr} = 0{,}7$; $\mu \sim T$; $\psi = 0{,}2$; $\mathrm{M} \gg 1$ и тепловым потоком $q_л$ для сплошного ламинарного пограничного слоя без приближений высшего порядка:

$$q = q_л\,[1+(0{,}584-0{,}115+0{,}122+0-0{,}157)\,\varepsilon], \tag{18.3.7}$$

где $\varepsilon = \sqrt{k-1}\,\mathrm{M}/\sqrt{\mathrm{Re}}$.

Слагаемые при параметре $\varepsilon$ в случае $\varepsilon = 3{,}02\ \mathrm{Re}_f^{1/2}$ суть влияния внешней завихренности (+0,584), продольной кривизны (—0,115), поперечной кривизны (+0,122), скольжения (0), температурного скачка (—0,157). В диапазоне $0{,}04 < \varepsilon < 0{,}23$ результаты теории Ван-Дайка подтверждены экспериментами.

## 18.4. ОСОБЕННОСТИ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ГИПЕРЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Специфической особенностью гиперзвуковых течений разреженного газа является необходимость учета сложного взаимодействия ударной волны с пограничным слоем. Для сильно разреженных газов это взаимодействие приобретает характер гиперзвукового уже при числах $M \approx 3 \div 4$.

Схематически рассмотрим режимы такого рода течения в окрестности твердого тела, например плоской пластины (рис. 18.4). У передней кромки пластины на расстоянии порядка длины свободного пробега поток можно считать свободно-молекулярным, постепенно переходящим в область начала формирования ударной волны и пограничного слоя. Эту область иногда называют сращенным слоем. Затем наблюдается область вязкого течения, ограниченная ударной волной в виде достаточно отчетливо выраженной поверхности разрыва. Далее ударная волна отходит от пограничного слоя, и ее воздействие на параметры последнего следует учитывать через поля скорости и давления между ударной волной и сформировавшимся пограничным слоем. Здесь необходимо принимать во внимание и вторичное воздействие пограничного слоя на течение за ударной волной.

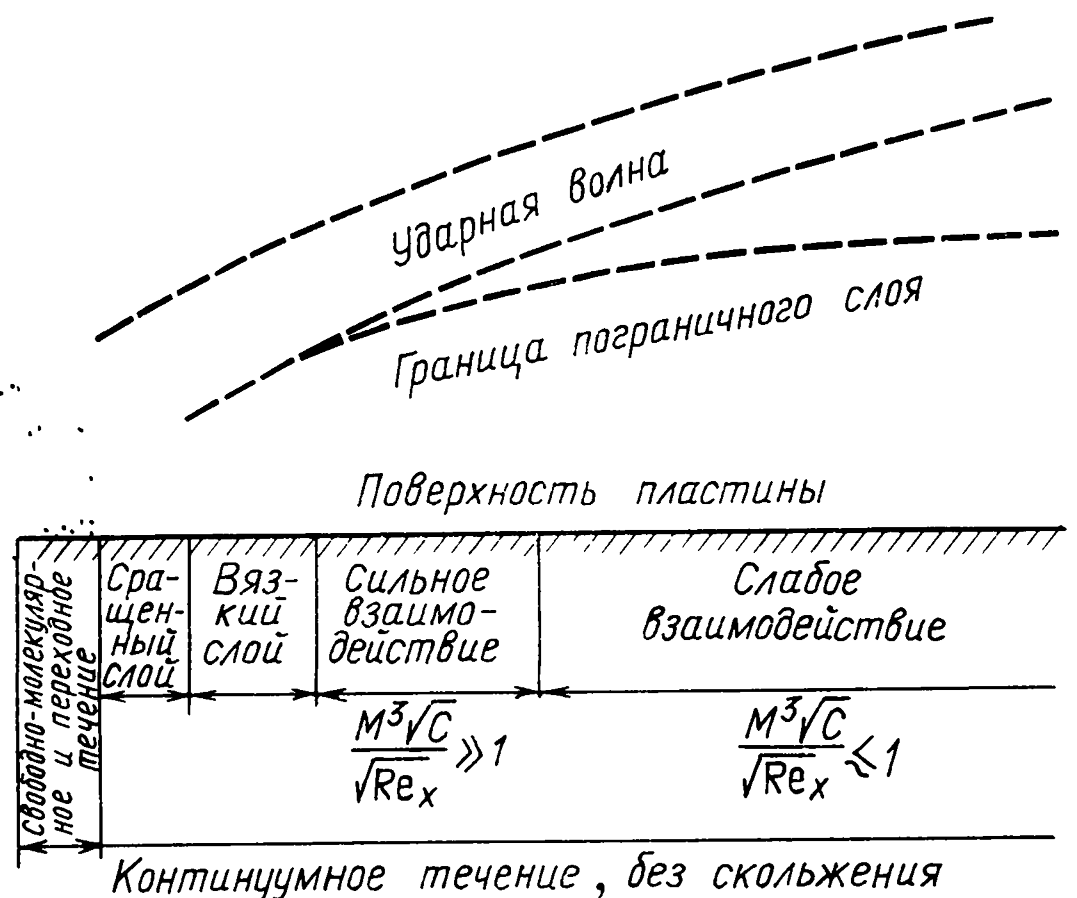



Рис. 18.4. Зоны обтекания пластины разреженным газом. Числа M и Re — по параметрам невозмущенного потока; $C = \mu T_0/\mu_0 T$

Асимптотические области сильного и слабого взаимодействий различают по параметру взаимодействия $M^3\sqrt{C}/\sqrt{\mathrm{Re}}$, характеризующему распределение давления в невязкой части потока, индуцированное пограничным слоем.

По оценкам Хейса и Пробстина, температурный скачок и скольжение не оказывают влияние на трение и теплообмен плоской пластины в области, где

$$\frac{x}{l} \gg \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{T^*}{T_{\text{ст}}}}. \qquad (18.4.1)$$

На рис. 18.5 показаны результаты расчета теплообмена для различных областей течения газа около пластины. Рассматриваются такие условия, когда на всей расчетной длине пластины для теплообмена существен только один режим взаимодействия ударной волны с пограничным слоем. Из характера зависимостей следует необходимость учета различных режимов, особенно в переходной области (в данном конкретном случае при $10 < \mathrm{Re} < 10^3$). В этой

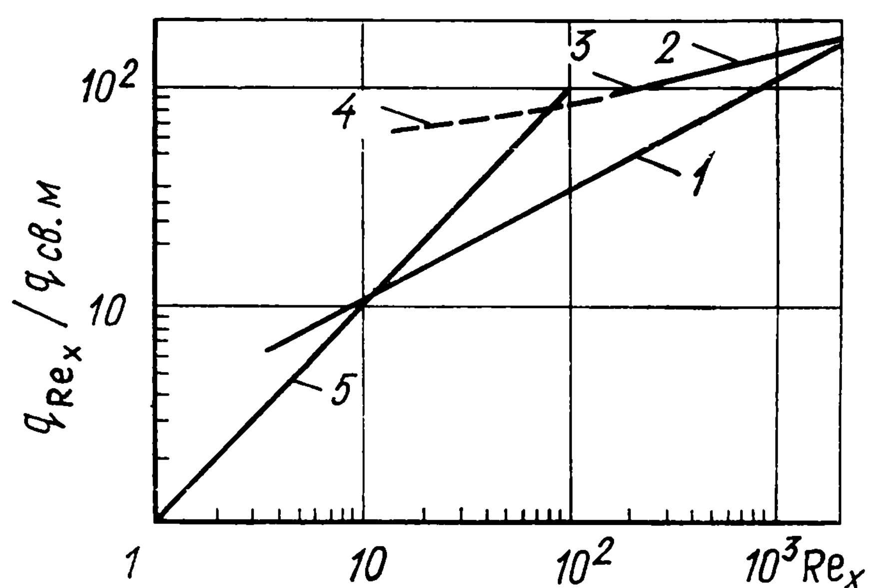



Рис. 18.5. Локальный теплообмен на пластине при $M=10$; $h_{\text{ст}}(w^2/2)^{-1}=0{,}1$; $\mathrm{Pr}=0{,}1$; $\rho_0/\rho=1/6$ (в ударной волне); $k=1{,}4$:

*1* — классический пограничный слой; *2* — сильное взаимодействие; *3* — вязкий слой; *4* — теоретический предел для вязкого слоя; *5* — свободно-молекулярный перенос

постановке задачи очевидны принципиальные трудности адекватного описания термогазодинамических явлений, особенно если учесть условность выделения отдельных зон. До настоящего времени не существует устоявшейся точки зрения на пределы использования модели сплошной среды в области малых чисел Рейнольдса при гиперзвуковых скоростях (в том числе с граничными условиями температурного скачка и скольжения). Определенные успехи в этом направлении достигнуты в последние годы с помощью численных методов для обтекания пластин и затупленных тел.

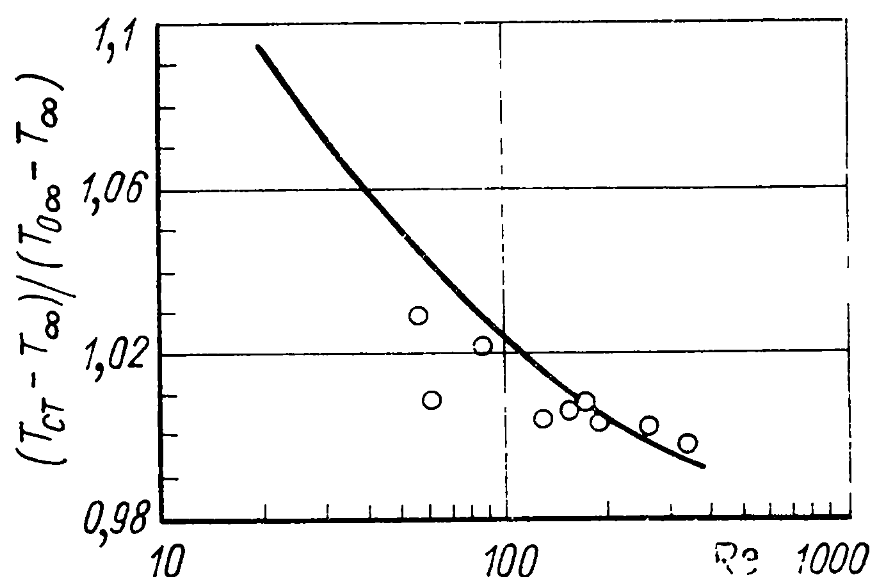



Рис. 18.6. Коэффициент восстановления температуры в лобовой точке:
——— — расчет; ○ — опыты Хикмана и Жедта

В начале 1960-х годов была разработана теория тонкого ударного слоя, основанная на модели слоя между ударной волной и поверхностью тела, имеющего толщину, малую по сравнению с радиусом затупления. При $Re = \rho_0 w_0 r/\mu_0^* \lesssim 20$ эта теория в области чисел $M \approx 10$ дает значения трения в лобовой точке, качественно и количественно отличающиеся от результатов по модели сплошной среды в более общей постановке, без ограничений на толщину сжатого слоя.

Однако Джейн и Эйдимоти показали, что сомнения в применимости уравнений Навье — Стокса для описания течения в сращенном сжатом слое (когда пограничный слой сращен с ударной волной) возникли вследствие использования рядом авторов сильных упрощающих предположений, в том числе

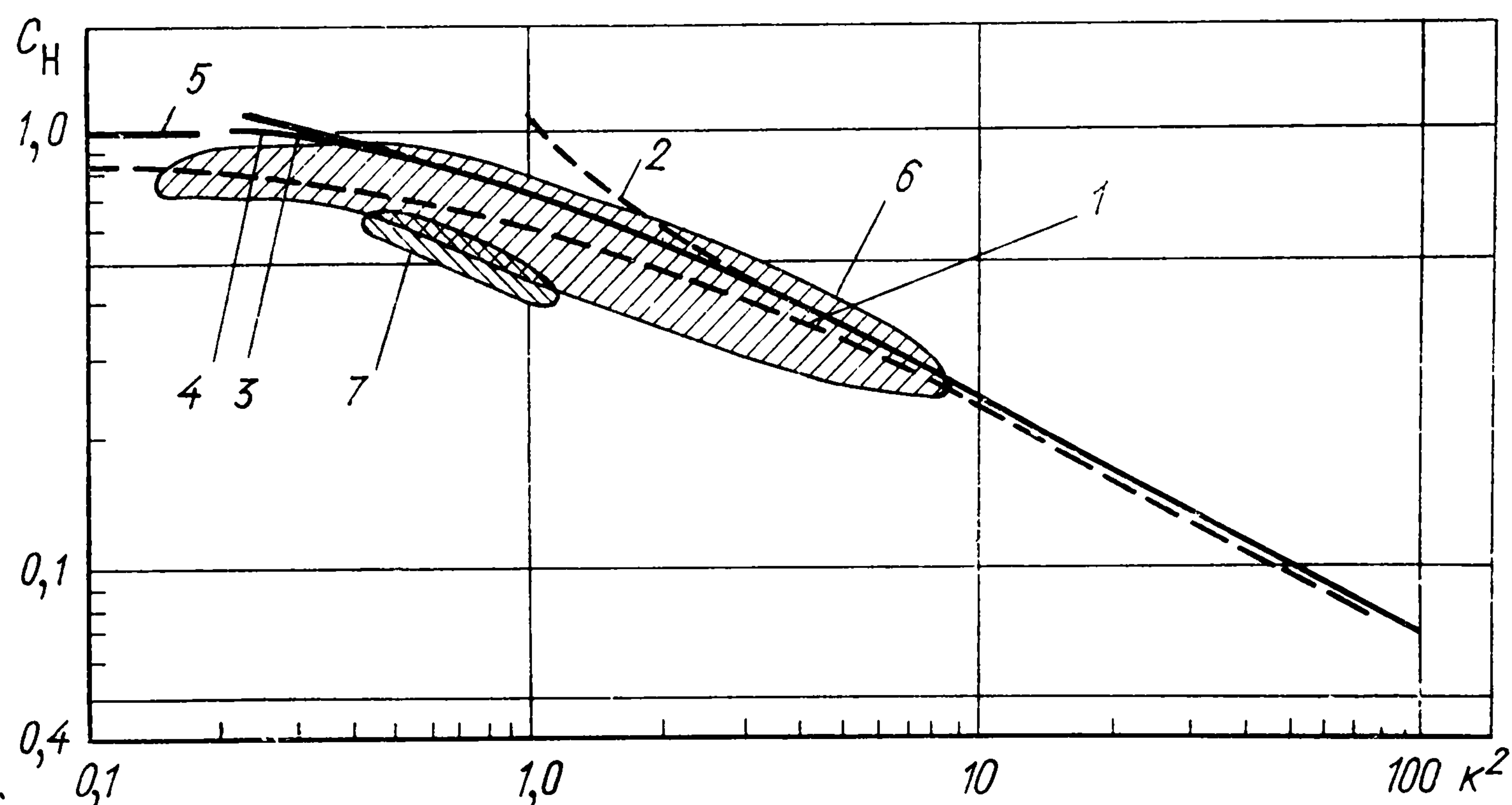



Рис. 18.7. Теплообмен в лобовой точке при сверхзвуковом обтекании газом низкой плотности (штриховкой обозначена область экспериментальных точек):

*1* — теория тонкого сжатого слоя по Ченгу; *2* — теория вихревого взаимодействия; *3* — решение Джейна и Эйдимоти с учетом скольжения; *4* — то же, без учета скольжения; *5* — свободно-молекулярный поток; *6* — опыты Видала и Уиттлифа; *7* — опыты Бойлана

использования модели тонкого ударного слоя, а также пренебрежения граничными условиями скольжения и температурного скачка на поверхности.

Джейн и Эйдимоти для получения решения вблизи критической области сферы разлагали переменные параметры в ряд около оси симметрии и в уравнениях сохраняли только члены, соответствующие приближению рассматриваемого порядка. Граничными условиями были кинетические уравнения для скорости скольжения и температурного скачка. Полученная система уравнений решалась численно методом конечных разностей. В качестве иллюстраций на рис. 18.6 приведены данные по коэффициенту восстановления температуры

в воздухе при М = 10 в сравнении с данными Хикмана и Жедта для М = 2÷6. Превышение температуры восстановления на теплоизолированной стенке над температурой торможения в толстом вязком слое может быть обусловлено тем, что скорость генерации тепла за счет рассеяния энергии превышает скорость теплоотвода.

Результаты расчета теплообмена на холодной стенке показаны на рис. 18.7 в координатах $C_н - k^2$, где $C_н = q(h_0 - h_{ст})/\rho_0 w_0$, а $k^2 = [(\gamma - 1)/(\gamma + 1)]^{1/2} \mathrm{Re}\,(\mu_0/T_0)\,(T_0^*/\mu_0^*)$. По этим данным, модель сплошной среды в количественном отношении справедлива до удивительно низких чисел Рейнольдса, где теория тонкого сжатого слоя и теория вихревого взаимодействия (по Ченгу) оказываются некорректными. Расчетная зависимость на рис. 18.7 при $k^2 \approx 0{,}2$ достигает свободно-молекулярного предела. В диапазоне $k^2 = 0{,}4 \div 10$ поведение этой зависимости согласуется с экспериментальными данными Видала и Уиттлифа. Эксперименты Бойлана дают заниженные результаты.

Сравнение результатов расчета теплового потока по модели сплошной среды с данными, полученными методом Монте-Карло, показывает, что уравнения Навье — Стокса могут быть использованы для расчетов вплоть до значений $\mathrm{Kn} \approx 0{,}5$.

## 18.5. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ РАЗРЕЖЕННЫМ ГАЗОМ

Если время релаксации, например время установления термодинамического равновесия между степенями свободы, соизмеримо или больше характерного газодинамического времени, течение в возмущенной области потока около тела неравновесно. В зависимости от степени неравновесности возможно замораживание энергообмена между теми или иными степенями свободы или внутри них. Эти эффекты особенно значительны в градиентных потоках низкой плотности. Типичная ситуация при обтекании тел разреженным газом в переходном режиме — замороженность ионизационных и химических процессов, а также процессов колебательной релаксации. В энергообмене участвуют вращательные и поступательные степени свободы. Диффузионные процессы в случае течения газовых смесей вносят существенный вклад в формирование потока. Ниже рассмотрен пример с влиянием поступательной релаксации.

При сверхзвуковом обтекании затупленных тел диффузия влияет на структуру головной ударной волны и сжатого слоя перед телом. Зона с повышенным давлением (лобовая область) оказывается обогащенной тяжелыми частицами вследствие градиента давления вдоль линий тока и кривизны линий тока вблизи точки торможения. Концентрационная диффузия и термодиффузия уменьшают эффект разделения. С лобовой поверхностью затупленного тела взаимодействует поступательно неравновесный газ. Если компоненты смеси обладают одинаковыми статической температурой и поступательной скоростью в набегающем потоке, то увеличение концентрации тяжелой компоненты в зоне торможения приводит к увеличению полной энтальпии локально в этой зоне по сравнению с невозмущенной областью, и, как следствие, к увеличению коэффициента восстановления температуры (при определенных условиях — значительно больше единицы).

Рис. 18.8 иллюстрирует описанный процесс при обтекании сферы диаметром 40 мм смесью азота и водорода с начальной концентрацией $f_\infty = n_{N_2}/(n_{N_2} + n_{H_2}) = 0{,}24$. По параметрам невозмущенного потока $\mathrm{M} = 3{,}5$, $\mathrm{Re} = 140$. Данные получены в экспериментах А. А. Бочкарева, В. Г. Приходько и А. К. Реброва.

В измерениях параметров потока (плотности, температуры и концентрации) использована электронно-пучковая диагностика. Линии равной концентрации характеризуют структуру ударной волны и сжатого слоя. Провал значения $f$ в переднем фронте ударной волны соответствует обогащению этой области легким газом. Повышение концентрации азота за ударной волной до значения $f = 0{,}42$ — результат диффузионного разделения.

Существенное влияние разделения на теплообмен сказывается в диапазоне чисел Рейнольдса $10 < \mathrm{Re} < 2000$. Наблюдаемый в экспериментах тепловой эффект бародиффузионного разделения смеси учитывается числом Стентона, если в качестве определяющей температуры использовать температуру восстановления. На рис. 18.9 показаны результаты обобщения экспериментальных данных по теплообмену в лобовой точке при обтекании сферы смесью азота

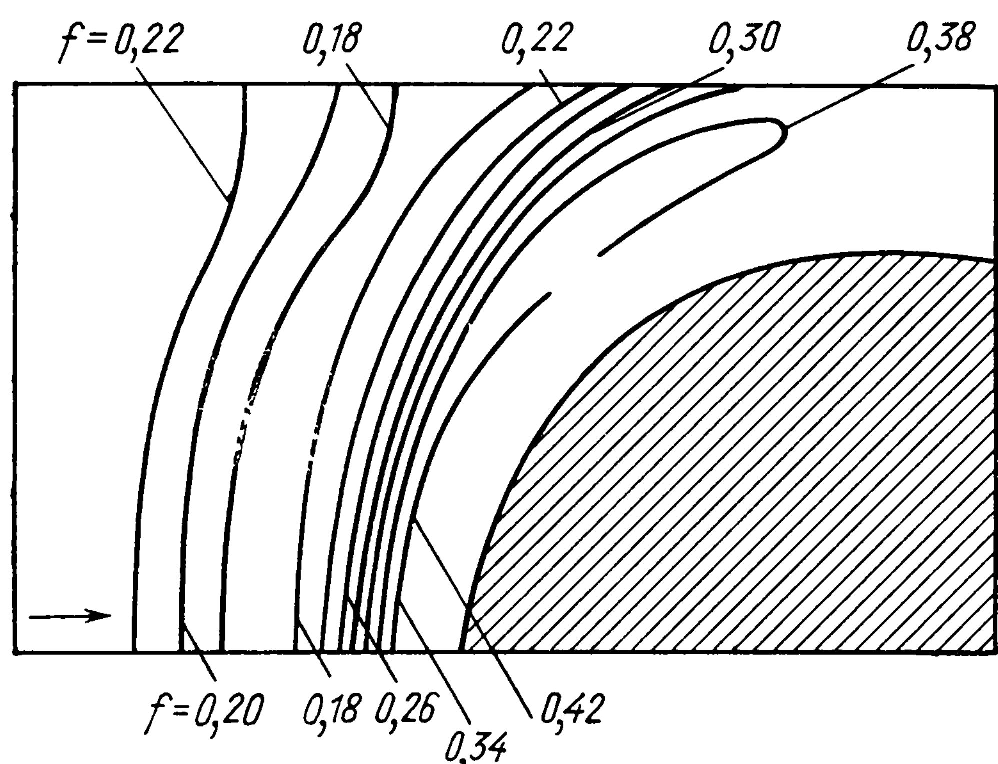


Рис. 18.8. Поле концентраций около сферы при сверхзвуковом обтекании смесью азота и водорода

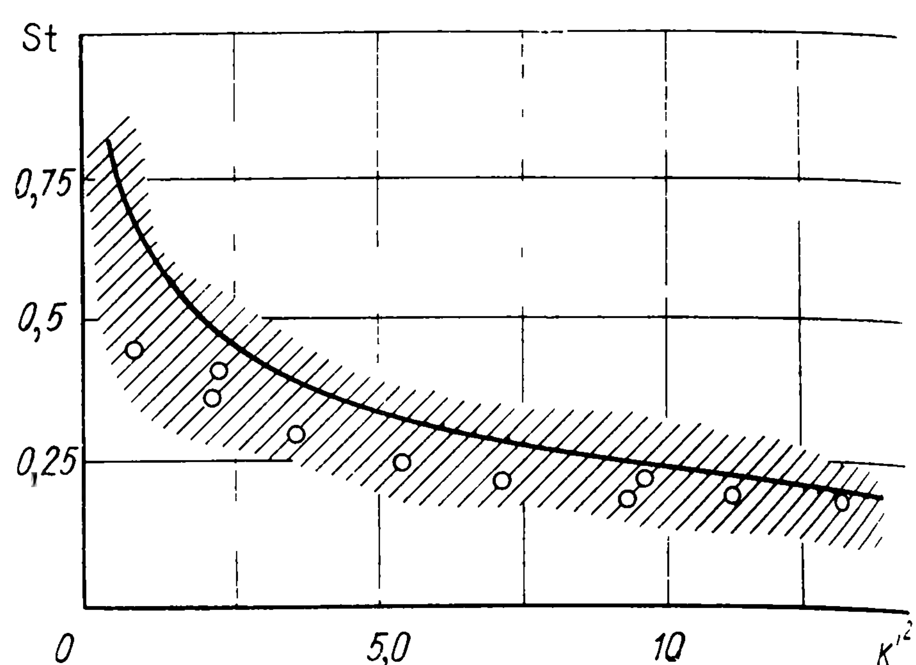


Рис. 18.9. Теплообмен в лобовой точке при обтекании сферы разреженной газовой смесью

и водорода. Здесь $k'^2 = (\mathrm{Re}/M^2k)\ (\mu_0/T_0)\ (T/\mu), (T = T_0^* + T_w)/2$. Кружками показаны экспериментальные данные А. А. Бочкарева, В. Г. Приходько, А. К. Реброва, штриховкой — эксперименты И. Ф. Заварзиной, сплошной кривой — расчеты Ченга.

## 18.6. СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

Основной особенностью свободной конвекции в разреженном газе является то, что тепловые и гидродинамические возмущения при снижении плотности не локализуются у теплоотдающей поверхности. Толщина пограничного слоя может даже превосходить размеры теплоотдающего тела. Поэтому допущения Шмидта и Бекмана, положенные в основу решения Польгаузена, становятся неприемлемыми. Другими словами, в теоретическом плане для описания свободной конвекции нельзя исходить из уравнений пограничного слоя. Течение здесь вязкостное, с возможным влиянием температурного скачка.

Интенсивность теплообмена с учетом разрежения газа в квазиизотермических условиях свободной конвекции определяется зависимостью типа

$$\mathrm{Nu} = f\,(\Phi;\ \mathrm{Gr};\ \mathrm{Pr};\ \mathrm{Kn}), \qquad (18.6.1)$$

где $\Phi$ — формпараметр.

С увеличением разрежения значение GrPr уменьшается пропорционально квадрату плотности, и влияние этого критерия вырождается. Все более существенным становится влияние геометрии тела. Рис. 18.10 отчетливо показывает это. В предельном случае отсутствия свободной конвекции, когда $\mathrm{GrPr} \to 0$, газ представляет собой сплошную среду, анализ теплопроводности в неограниченном объеме дает для сферы $\mathrm{Nu} \to 2$, а для цилиндра $\mathrm{Nu} \to 0$.

Дискретность структуры газа проявляется при значении числа $\mathrm{Kn} > 0{,}02$. На рис. 18.11 на примере теплообмена горизонтального цилиндра диаметром 0,07 мм показаны характерные режимы переноса тепла. В области чисел $\mathrm{Kn} > 0{,}02$ происходит резкое падение интенсивности теплообмена вследствие влияния температурного скачка.

При значительном разрежении может проявляться эффект ограниченности объема, в котором находится рассматриваемое тело. При $\mathrm{GrPr} \to 0$ вследствие молекулярной теплопроводности к оболочке конечных размеров число Nu

приобретает постоянное значение, превосходящее предельно малое для неограниченного объема. Этот факт иллюстрируется экспериментальной зависимостью на рис. 18.12.

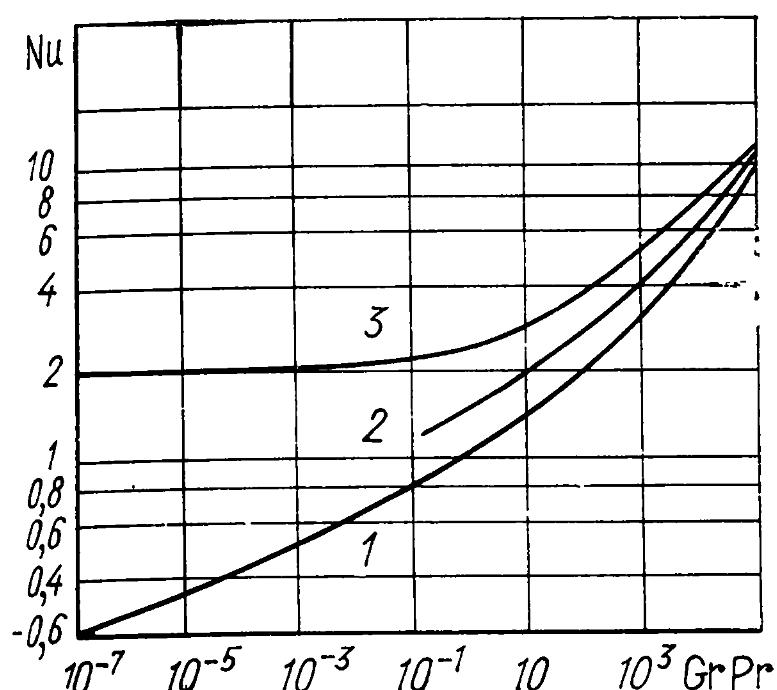



Рис. 18.10. Теплообмен при свободной конвекции в неограниченном объеме:
*1* — горизонтальный цилиндр; *2* — вертикальная пластина; *3* — сфера

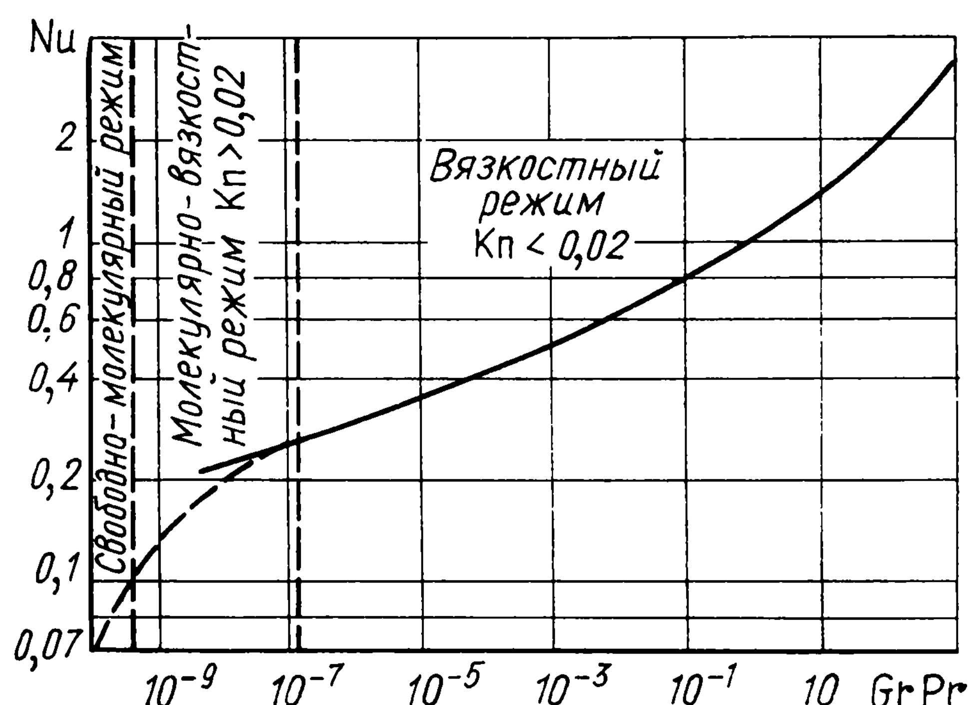



Рис. 18.11. Режимы теплообмена для горизонтального цилиндра

Так как для цилиндров различных диаметров при одинаковом числе Kn величины GrPr кратны кубу диаметров, в координатах Nu — GrPr данные по теплообмену обобщаются только до значений Kn = 0,02. Для более глубоких разрежений можно применить метод Кэвено, изложенный ранее в разд. 18.3.

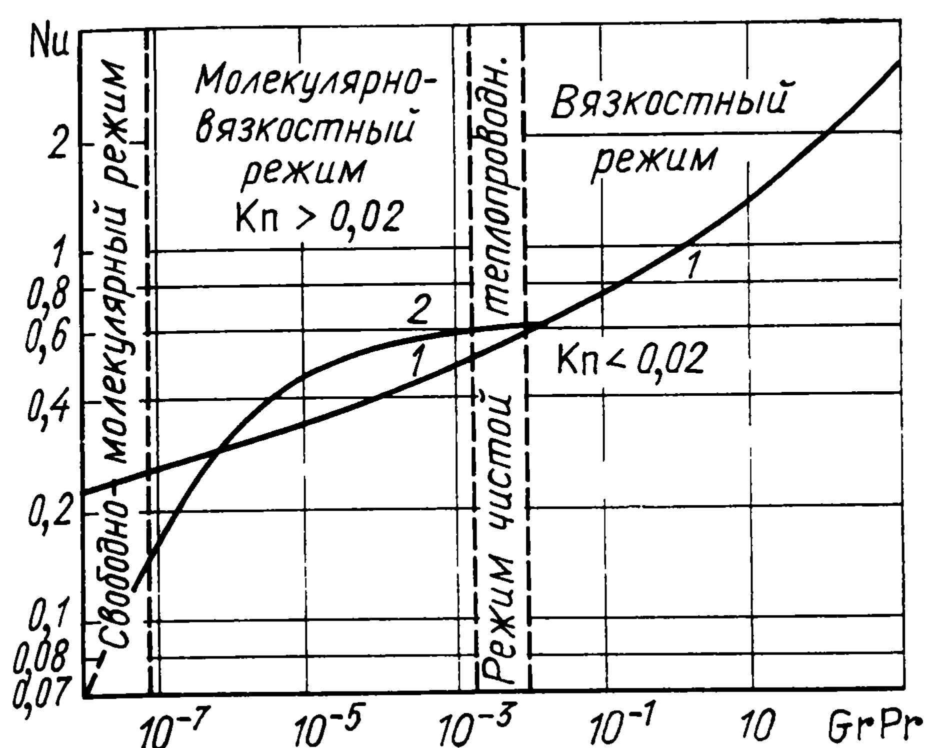



Рис. 18.12. Режимы теплообмена при свободной конвекции:
*1* — сплошная среда; *2* — опыты А. К. Реброва в ограниченном объеме в вакууме

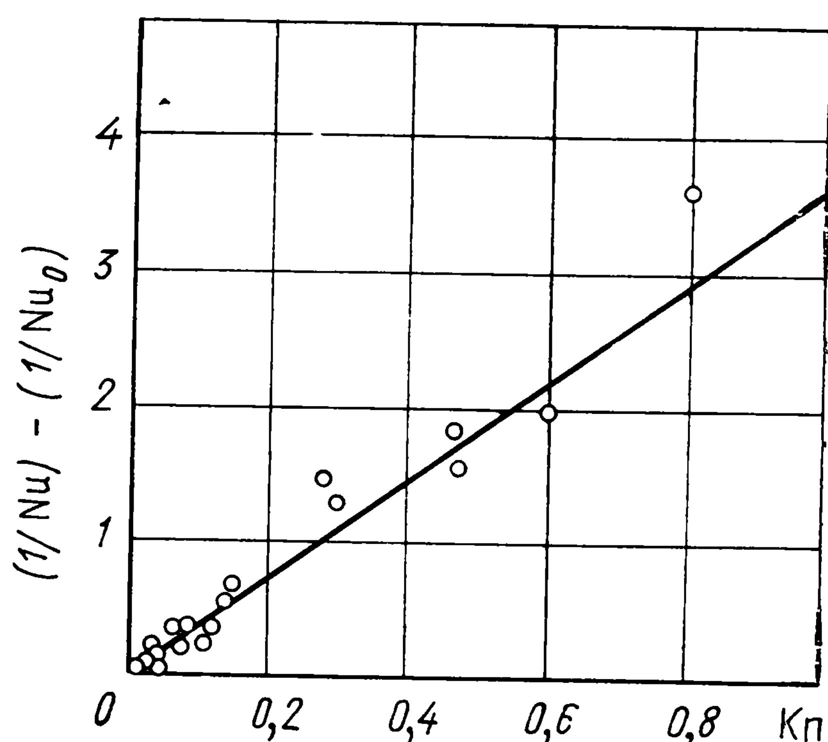



Рис. 18.13. Влияние числа Кнудсена на теплообмен цилиндров в воздухе по опытам А. К. Реброва

На рис. 18.13 приведены результаты такой обработки экспериментов для теплообмена цилиндров. В диапазоне $0 < \mathrm{Kn} < 0{,}6$ эта зависимость линейна, что подтверждает справедливость подхода, но не универсальность полученных численных значений. В данном случае необходимо еще точное знание коэффициента аккомодации.

## 18.7. ВАКУУМНАЯ ИЗОЛЯЦИЯ

Факт уменьшения теплопроводности из-за наличия температурного скачка широко используется в технике для осуществления вакуумной и вакуумно-порошковой изоляции.

Если разрежение таково, что для переноса тепла существенны еще молекулярные столкновения, то теплообмен подчиняется зависимости (18.3.6). При свободно-молекулярном переносе тепла между плоскими стенками справедлива формула (18.2.18).

В криогенной технике широкое распространение получила вакуумно-порошковая многослойная изоляция. Эффективная теплопроводность порошковой изоляции, как видно из рис. 18.14, при снижении давления от атмосферного до 0,1 Па уменьшается более чем на порядок. Причем влияние температурного скачка сказывается на коэффициенте теплопроводности для магнезии уже при атмосферном давлении, для силикоаэрогеля — при более высоких давлениях, а для мипоры — при давлении ~ 13 кПа.

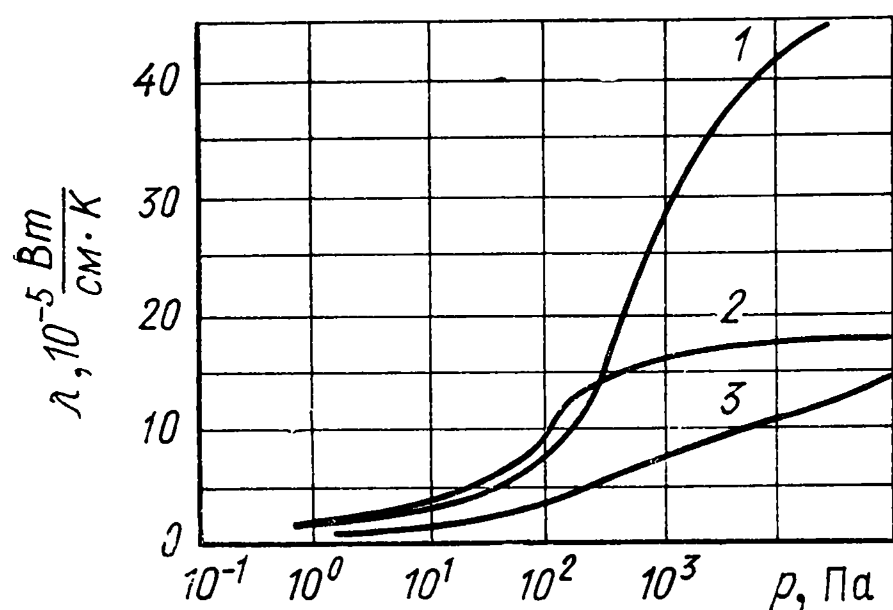



Рис. 18.14. Кажущаяся теплопроводность порошковых теплоизоляторов в интервале температур 78—290 К:

*1* — магнезия; *2* — мипора; *3* — силикоаэрогель

Объясняется это тем, что перенос тепла газом, заполняющим порошок, происходит в переходном свободно-молекулярном режиме при высоких давлениях, так как число Kn в порах велико. Поэтому даже неглубокая откачка существенно увеличивает тепловое сопротивление.

Лучшие образцы многослойной изоляции при давлении меньше 0,133 Па имеют значения эффективного коэффициента теплопроводности порядка $10^{-4}$ Вт/(м · К), что уже приближается к свойствам высоковакуумной изоляции с экранированием жидким азотом.

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*


1. **Газовая** динамика. Сб. статей. Пер. с англ. и нем. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
2. **Газодинамика** разреженных газов (Тр. I Междунар. конф. по динамике разреженных газов, 1959). Пер. с англ. и франц. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
3. **Дэшман С.** Научные основы вакуумной техники. Пер. с англ. М., «Мир», 1964.
4. **Заварзина И. Ф.** Экспериментальные исследования локальных тепловых потоков на сфере и сферическом притуплении осесимметричного тела.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1970, № 4, с. 157.
5. **Каганер М. Г., Глебова Л. И.** Теплопроводность изоляционных материалов под вакуумом.— «Кислород», 1959, № 1, с. 13.
6. **Кайт Дж., Мэдден А., Пайрет Е.** Теплопередача естественной конвекцией при пониженном давлении.— В кн.: «Механика». Сб. переводов, 1955, № 1, с. 29.
7. **Ребров А. К.** Теплообмен при свободном движении около горизонтального цилиндра в разреженном воздухе.— «Инж.-физ. журн.», 1961, т. 4, № 9, с. 32.
8. **Теплообмен** в лобовой точке затупленного тела, обтекаемого сверхзвуковым разреженным потоком азотно-водородной смеси. — «Журн. прикл. механ. и техн. физ.», 1973, № 6, с. 88. Авт.: А. А. Бочкарев, В. А. Косинов, В. Г. Приходько, А. К. Ребров.
9. **Шидловский В. П.** Введение в динамику разреженного газа. М., «Наука», 1965.
10. **Cheng H. K.** Viscous hypersonic blunt-body problems and the Newtonian theory.— «Fundamental Phenomena in Hypersonic Flow». Proc. Intern. Symp. Ithaca, New York, Cornell Univ. Press,, 1966, p. 90.
11. **Cheng H. K.** Hypersonic shock layer theory of the stagnation region at low Reynolds number.— «Proc. Heat Trans. and Fluid Mech. Inst.», Stanford, Calif. Stanford Univ. Press, 1961, p. 161.
12. **Dewey C. F.** Hot wire measurements in low Reynolds number hypersonic flows.— «ARS J.», 1962, v. 31, N12, p. 1709.
13. **Diffusive** effects of recovery temperature in supersonic flow rarefied gas mixture.— In: 4-th Intern. Heat Transfer Conf. Versailles, Sept. 1970. Paris, 1970, v. 3, p. FC 6.4. Auth.: S. S. Kutateladze, A. A. Bochkarjov, V. G. Prikhodko, A. K. Rebrov.
14. **Drake R. M., Backer G. H.** Heat transfer from spheres to a rarefied gas in supersonic flow.— «Trans. ASME», 1952, v. 74, N 7, p. 1241.
15. **Hickman R. S., Giedt W. H.** Heat transfer to a hemispherical cylinder of low Reynolds numbers.— «AIAA Journ.», 1963, v. 1, N 3, p. 665.
16. **Jain A. C., Adimurthy V.** Hypersonic merged stagnation shock layers. Part I: Adiabatic wall case. Part II. Cold wall case.— «AIAA Journ.», 1974, v. 12, N 3, p. 110.
17. **Kavanau L. L.** Heat transfer from spheres to a rarefied gas in subsonic flow.— «Trans. ASME», 1955, v. 77, N 5, p. 617.
18. **Oppenheim A. K.** Generalized theory of convective heat transfer in a free-molecule flow.— «J. Aeron Sci.», 1953, v. 20, p. 49.
19. **Probstein R. F.** Heat transfer in rarefied gas flow.— In: Theory Fundamental Research Heat Transfer.— ASME, Proc. annu. meet. Soc., 1963, p. 33.

Глава 19

# ТЕПЛООТДАЧА ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА НА ТВЕРДЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

## 19.1. ПЛЕНОЧНАЯ И КАПЕЛЬНАЯ КОНДЕНСАЦИЯ

При конденсации пара на поверхности охлаждения жидкая фаза (конденсат) выпадает в виде сплошной пленки или отдельных капель. Пленочная конденсация возникает на поверхностях, смачиваемых выпадающим конденсатом, капельная конденсация — на несмачиваемых поверхностях охлаждения.

При пленочной конденсации на вертикальной, достаточно длинной стенке (рис. 19.1) в верхней части пленки, когда ее толщина и соответственно скорость течения невелики, имеет место чисто ламинарное движение с плоской границей раздела фаз. В дальнейшем на поверхности пленки начинают возникать волны, приводящие к некоторому уменьшению средней толщины пленки конденсата. Под влиянием волнообразования и общего увеличения толщины скорости течения пленки в последней начинают развиваться сначала квазитурбулентные, а затем и турбулентные пульсации.

При турбулентном течении волны имеют обычно пилообразный характер с глубоким проникновением в глубь течения (рис. 19.2). Однако на осредненные характеристики течения эти волны влияют мало. На поверхности конденсата устанавливается температура, практически равная температуре насыщения. Например, в случае конденсации чистого водяного пара при атмосферном давлении переохлаждение поверхности конденсатной пленки по сравнению с температурой насыщения составляет $0{,}02 \div 0{,}05$ K.

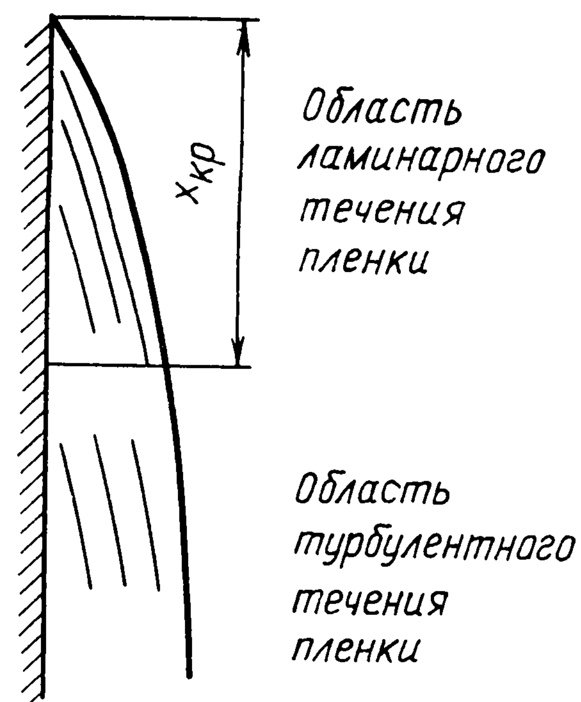



Рис. 19.1. Схема течения пленки конденсата на вертикальной поверхности

При капельной конденсации значительная часть поверхности охлаждения свободна от макроскопических слоев жидкости. Вследствие этого коэффициенты теплоотдачи при капельной конденсации паров неметаллов значительно выше, чем при пленочной. Например, коэффициенты теплоотдачи при пленочной конденсации водяного пара атмосферного давления имеют порядок $(7—12) \cdot 10^3$ Вт/(м$^2$ · K), а при капельной конденсации — $(4—10) \cdot 10^4$ Вт/(м$^2$ · K). Практически в современных конденсаторах всегда происходит пленочная конденсация паров. Исключение составляют конденсаторы ртутного пара, в которых обычно имеет место капельная конденсация.

У паров металлов различия в интенсивности теплоотдачи при пленочном и капельном типах конденсации практически стираются, так как термическое сопротивление жидкометаллической пленки оказывается весьма малым. При наличии в паре примеси инертного газа у поверхности конденсата образуется диффузионный пограничный слой, существенно влияющий на скорость притока конденсирующегося пара к поверхности охлаждения и тем самым уменьшающий скорость конденсации.

## 19.2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ПЛЕНОЧНОЙ КОНДЕНСАЦИИ ЧИСТОГО НАСЫЩЕННОГО ПАРА

Здесь и в дальнейшем рассматривается конденсация паров неметаллов, т. е. веществ, конденсат которых имеет число $\mathrm{Pr} > 0{,}5$.

Как уже было указано выше, опыт показывает, что, за исключением случая глубокого вакуума, термическое сопротивление собственно пара у неметалли-

ческих теплоносителей пренебрежимо мало по сравнению с термическим сопротивлением пленки конденсата. Поэтому в теории пленочной конденсации чистого пара неметаллических сред считают, что на границе раздела фаз устанавливается температура, равная температуре насыщения в ядре паровой фазы.

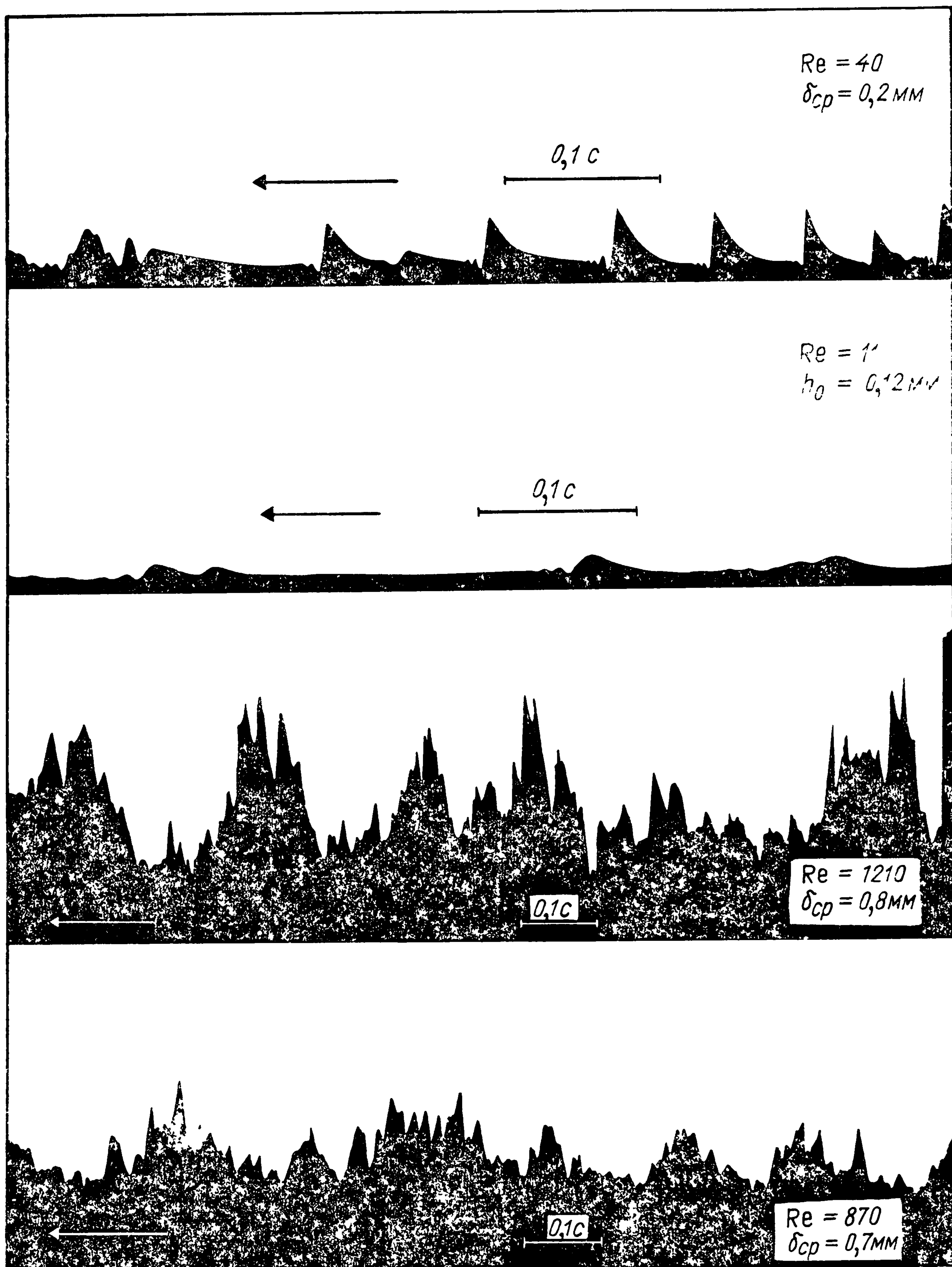



Рис. 19.2. Осциллограммы стекания пленки воды по вертикальной стенке

Таким образом, основную систему уравнений теплообмена при пленочной конденсации чистого насыщенного пара можно представить в следующем виде.

*Уравнения теплопереноса и движения пленки конденсата*:

$$\left.\begin{aligned} &a\nabla^2 T = \partial T/\partial t + (\mathbf{w}, \operatorname{grad} T);\\ &\mathbf{g}(\rho' - \rho'') - \operatorname{grad} p + \mu\nabla^2 \mathbf{w} = \partial \mathbf{w}/\partial t + (\mathbf{w}, \operatorname{grad})\,\mathbf{w};\\ &\operatorname{div} \mathbf{w} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (19.2.1)$$

*Условия взаимодействия фаз на границе конденсата и пара:*

$$\left.\begin{array}{l} T_{гр} = T''; \\ -\lambda\,(\partial T/\partial n)_{гр} = r g_n = r\rho' w_n; \\ \pm\mu\,(\partial w/\partial n)_{гр} = g_n w''_{от} + (1/2)\, c''_f\, \rho''\, w''^2_{от}; \\ p_{гр} = p''_{гр} + \sigma\,(1/R_1 + 1/R_2). \end{array}\right\} \quad (19.2.2)$$

*Условия теплообмена на поверхности охлаждения:*

$$-\lambda\,(\partial T/\partial n)_{ст} = \alpha\,(T'' - T_{ст}). \quad (19.2.3)$$

При этом следует иметь в виду, что тепловой поток через поверхность пленки конденсата, определяемый вторым уравнением системы (19.2.2), и тепловой поток через поверхность охлаждения, определяемый уравнением (19.2.3), строго говоря, не равны друг другу. Это обстоятельство связано с тем, что в пленке конденсата температура меняется от $T''$ до $T_{ст}$ и, следовательно, средняя температура конденсата меньше температуры насыщения. Для плоской пленки при $c_p$ = const средняя температура конденсата

$$\overline{T} = \left(\int\limits_0^\delta Tw\,dy\right)\Big/\left(\int\limits_0^\delta w\,dy\right) = T'' - \varphi\,(T'' - T_{ст}), \quad (19.2.4)$$

где $\varphi = (T'' - \overline{T})/(T'' - T_{ст}) < 1$ — относительное переохлаждение конденсата; $\delta$ — толщина пленки; $y$ — координата, нормальная к поверхности охлаждения.

Отсюда общее количество тепла, выделяющееся при конденсации одного килограмма насыщенного пара и передаваемое поверхности охлаждения,

$$-\lambda\,(\partial T/\partial n)_{ст} = [r + c\varphi\,(T'' - T_{ст})]\, g_n, \quad (19.2.5)$$

где $g_n$ — массовая скорость конденсации, кг/(м$^2$ · с).

В условия однозначности рассматриваемого процесса входят физические свойства пара и конденсата, содержащиеся в этих уравнениях, размеры и форма поверхности охлаждения, разность температур $\Delta T = T'' - T_{ст}$ или плотность теплового потока $q = \alpha\,(T'' - T_{ст})$, скорость течения пара и ее направление по отношению к направлению вектора силы тяжести. Скорость течения жидкой фазы в условия однозначности не входит, так как течение конденсата полностью определяется действием силы тяжести и трением пара о поверхность пленки.

Анализируя уравнения (19.2.1)—(19.2.3) методом подобия, найдем, что в общем случае при заданной геометрии поверхности охлаждения теплоотдача для пленочной конденсации чистого насыщенного пара выражается следующим критериальным уравнением:

$$\frac{\alpha}{\lambda}\, l = \Phi\left[\frac{gl^3}{\nu^2}\left(1 - \frac{\rho''}{\rho'}\right);\ \frac{\nu}{a};\ \frac{r}{c\Delta T};\ \frac{c''_f\, w''^2_n\, \rho''}{gl\,(\rho' - \rho'')};\ \frac{\sigma}{g\,(\rho' - \rho'')\, l^2}\right]. \quad (19.2.6)$$

Влияние поверхностного натяжения на процесс пленочной конденсации сравнительно невелико. При течении на вертикальной поверхности изменение поверхностного натяжения влияет на среднюю толщину пленки в области ламинарного течения в связи с некоторым изменением возникающих на ее поверхности капиллярных волн.

При конденсации на горизонтальных трубах поверхностное натяжение приводит к тому, что конденсат стекает с нижней образующей трубы не непрерывной струей, а периодически, каплями. При больших скоростях течения пара, импульс, вносимый конденсирующимся паром в пленку конденсата,

$$j = q w''_{от}/r, \quad (19.2.7)$$

чему соответствует предельное значение коэффициента трения пара о поверхность конденсатной пленки

$$c''_f = 2q/(r w''_{от}\, \rho''). \quad (19.2.8)$$

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что нет необходимости сохранять линейный размер поверхности конденсации $l$ одновременно в четырех критериях. Часто оказывается более удобным сохранить эту величину только в одном из определяющих критериев. В качестве такого критерия целесообразнее всего принять критерий Архимеда $\mathrm{Ar} = gl^3 (1 - \rho''/\rho')/\nu^2$, поскольку сила тяжести проявляется в той или иной мере при любом течении конденсата. При этом остальные критерии должны быть скомбинированы с критерием Ar так, чтобы в них исключалась величина $l$. После такого преобразования получим:

$$\mathrm{N}_* = \frac{\alpha}{\lambda}\left[\frac{\nu^2}{g(1-\rho''/\rho')}\right]^{1/3} = \Phi_1\left[\frac{gl^3}{\nu^2}\left(1-\frac{\rho''}{\rho'}\right);\ \frac{\nu}{a};\ \frac{r}{c\Delta T};\right.$$
$$\left.\frac{w''}{[g\nu(1-\rho''/\rho')]^{1/3}}\left(\frac{c_f''\rho''}{\rho'}\right)^{1/2};\ \frac{\sigma}{g\rho'(1-\rho''/\rho')^{1/3}}\left(\frac{g}{\nu^2}\right)^{2/3}\right]. \qquad (19.2.9)$$

В этом уравнении величина $\left[\frac{\nu^2}{g(1-\rho''/\rho')}\right]^{1/3}$ выступает в качестве некоторого масштаба линейных размеров пленки конденсата, возникающих в результате взаимодействия гравитационных сил и сил молекулярного трения. При давлении $p < 0{,}5\ p_{\text{кр}}$ значение величины $\rho''/\rho' < 0{,}1$, и ею практически можно пренебречь.

Сразу же следует обратить внимание и на то важное обстоятельство, что число Рейнольдса пленки конденсата весьма просто выражается через его массовый расход и представляет собой специфическую комбинацию критериев Nu, K и Pr. Действительно,

$$\mathrm{Re} = \frac{\bar{w}\delta}{\nu} = \frac{G}{\mu} = \frac{\bar{\alpha}\Delta TL}{r+\varphi c(T''-T_{\text{ст}})}\,\frac{1}{\mu}, \qquad (19.2.10)$$

где $G$ — количество конденсата, протекающего через данное сечение на полосе шириной 1 м, кг/(м · с), и $\bar{\alpha}$ — средний коэффициент теплоотдачи на участке $L$. Отсюда следует связь между числом Рейнольдса пленки конденсата и критериями теплообмена:

$$\mathrm{Re} = \overline{\mathrm{Nu}}/[\mathrm{Pr}(\mathrm{K}+\varphi)], \qquad (19.2.11)$$

т. е. зависимости (19.2.9) эквивалентна зависимость

$$\frac{\alpha}{\lambda}\left[\frac{\nu^2}{g(1-\rho''/\rho')}\right]^{1/3} = \Phi_2\left\{\frac{gl^3}{\nu^2}\left(1-\frac{\rho''}{\rho'}\right);\ \frac{\nu}{a};\ \frac{G}{\mu};\ \frac{w''}{[g\nu(1-\rho''/\rho')]^{1/3}}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{c_f''\rho''}{\rho'}\right)^{1/2};\ \frac{\sigma}{g\rho'(1-\rho''/\rho')^{1/3}}\left(\frac{g}{\nu^2}\right)^{2/3}\right\}. \qquad (19.2.12)$$

## 19.3. ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПЛЕНКИ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ МЕДЛЕННОМ ДВИЖЕНИИ ПАРА

Теория теплоотдачи при плоском ламинарном течении пленки конденсата была создана Нуссельтом. В плоской пленке при ламинарном течении, когда $\mathrm{K} \gg \varphi$, с хорошей степенью точности можно считать распределение температур практически линейным, т. е. полагать

$$(T-T_{\text{ст}})/(T''-T_{\text{ст}}) = y/\delta;\ dT/dy = \Delta T/\delta;\ \nabla^2 T = 0. \qquad (19.3.1)$$

В таком случае первое из уравнений (19.2.1) выпадает из рассмотрения. Если, далее, пренебречь в уравнении движения инерционными силами, то можно положить, что

$$g(\rho'-\rho'') + \mu d^2 w/dy^2 = 0. \qquad (19.3.2)$$

В случае медленно движущегося пара $w_{от} \approx 0$ и, согласно третьему уравнению (19.2.2), $(dw/dy)_{гр} = 0$. На стенке скорость конденсата $w = 0$. При этих граничных условиях двойное интегрирование уравнения (19.3.2) дает параболический профиль скоростей в пленке конденсата:

$$w = g \frac{\rho' - \rho''}{\mu} \delta^2 \left(\xi - \frac{1}{2} \xi^2\right) = 3\bar{w} \left(\xi - \frac{1}{2} \xi^2\right), \tag{19.3.3}$$

где $\xi = y/\delta$.

Величина относительного переохлаждения конденсата при принятых допущениях, т. е. при линейном распределении температуры и параболическом распределении скорости,

$$\varphi = \frac{\int_0^\delta \left(1 - \frac{T - T_{ст}}{T'' - T_{ст}}\right) w dy}{\int_0^\delta w dy} = \frac{\int_0^1 (1-\xi)\left(\xi - \frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi}{\int_0^1 \left(\xi - \frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi} = \frac{3}{8}. \tag{19.3.4}$$

Нормальная составляющая вектора скорости конденсата на границе раздела фаз может быть вычислена через изменение количества конденсата вдоль оси $x$. Для этого выделим двумя параллельными сечениями объем конденсата $\delta \cdot 1 \cdot dx$. Количество конденсата, втекающего через поверхность $1 \cdot dx$, $dG = \rho' w_n dx$. Изменение количества конденсата вдоль оси $x$ равно $dG = \rho' d \left(\int_0^\delta w dy\right)$. Приравнивая друг другу эти выражения, находим, что

$$w_n = \frac{d}{dx} \int_0^\delta w dy. \tag{19.3.5}$$

Подставляя это значение $w_n$ во второе уравнение (19.2.2) и полагая $\partial T/\partial n = \Delta T/\delta$, получаем уравнение

$$\frac{\lambda \Delta T}{r\rho'} dx = \delta d \left(\int_0^\delta w dy\right). \tag{19.3.6}$$

Если такую подстановку произвести в уравнение (19.2.5), т. е. отнести расчет к полному потоку тепла, пронизывающему поверхность охлаждения, получим

$$\frac{\lambda \Delta T}{\rho' [r + \varphi c (T'' - T_{ст})]} dx = \delta d \left(\int_0^\delta w dy\right). \tag{19.3.7}$$

Очевидно, что первое уравнение даст несколько завышенное, а второе несколько заниженное значения толщины пленки конденсата.

Подставляя в уравнения (19.3.6) и (19.3.7) значение $w$ из выражения (19.3.3) и интегрируя при $\Delta T = \text{const}$, находим, что толщина пленки конденсата при ламинарном течении на расстоянии $x$ от верхней кромки поверхности охлаждения определяется неравенством

$$1 > \delta \left[\frac{g\rho' (\rho' - \rho'') r}{4\mu\lambda\Delta T x}\right]^{1/4} > \left(1 + \varphi \frac{c\Delta T}{r}\right)^{-1/4}. \tag{19.3.8}$$

При $\varphi = 3/8$ и $K = 5$ расхождение в определении толщины пленки менее 2%, а при $K = 10$ — менее 1%.

Более подробно этот вопрос был рассмотрен Д. А. Лабунцовым, который показал, что влиянием конвективного переноса тепла и силами инерции в плоской ламинарной пленке можно пренебрегать при $\mathrm{Pr} > 1$ и $K > 5$.

Коэффициент теплоотдачи в рассматриваемом случае определяется по термическому сопротивлению плоской стенки, т. е.

$$\alpha = \lambda/\delta. \tag{19.3.9}$$

Подставляя сюда значение $\delta$ из (19.3.8), получаем коэффициент теплоотдачи в сечении $x$:

$$\alpha_x = \sqrt[4]{g \frac{\lambda^3 \rho' (\rho' - \rho'') r}{4\mu\Delta T x}}. \qquad (19.3.10)$$

Среднее значение коэффициента теплоотдачи на стенке высотой $L$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L}\int_0^L \alpha_x\, dx = \frac{4}{3}\sqrt[4]{g \frac{\lambda^3 \rho' (\rho' - \rho'') r}{4\mu\Delta T L}}. \qquad (19.3.11)$$

Выраженная в критериях, формула (19.3.11) принимает вид

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{Ar}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{K}\right)^{1/4} = 0{,}943\,(\mathrm{Ar}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{K})^{1/4}. \qquad (19.3.12)$$

Здесь $\overline{\mathrm{Nu}} = \bar{\alpha}L/\lambda$; $\mathrm{Ar} = (gL^3/\nu^2)\,(1 - \rho''/\rho')$; $\mathrm{K} = r/\,(c\Delta T)$. Выраженная через число Рейнольдса пленки формула (19.3.12) принимает вид

$$\mathrm{N}_* = \overline{\mathrm{Nu}}\,\mathrm{Ar}^{-1/3} = 0{,}925\,\mathrm{Re}^{-1/3}. \qquad (19.3.13)$$

При постоянном теплоотводе по всей поверхности охлаждения

$$q = \lambda\Delta T/\delta = \mathrm{const}, \qquad (19.3.14)$$

и уравнение (19.3.6) принимает вид

$$\frac{q}{r\rho}\, dx = d\left(\int_0^\delta w\, dy\right) = g\,\frac{\rho' - \rho''}{\mu}\,\delta^2\, d\delta. \qquad (19.3.15)$$

Отсюда после интегрирования и подстановки найденного значения $\delta$ в формулу (19.3.9) получим, что при $q$ = const

$$\alpha_x = \lambda \sqrt[3]{g \frac{\rho' (\rho' - \rho'') r}{3\mu q x}}; \qquad (19.3.16)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{3}{2}\lambda \sqrt[3]{g \frac{\rho' (\rho' - \rho'') r}{3\mu q L}}; \qquad (19.3.17)$$

$$\mathrm{N}_* = 1{,}04\,\mathrm{Re}^{-1/3}. \qquad (19.3.18)$$

Таким образом, для одинаковых значений числа Re пленки конденсата коэффициент теплоотдачи при постоянном теплоотводе по всей поверхности охлаждения примерно на 13% выше, чем при постоянной температуре стенки.

Вопрос о влиянии переменности физических свойств конденсата ($\rho$ = const; $c$ = const; $\mu$ = varia; $\lambda$ = varia) с температурой на теплоотдачу при ламинарном течении пленки был исследован К. Д. Воскресенским и несколько уточнен Д. А. Лабунцовым. Последний показал, что если физические свойства конденсата относить к температуре насыщения, то влияние температурного фактора может быть учтено введением в формулу (19.3.11) множителя

$$\varepsilon_T = (\lambda_{\text{ст}}/\lambda_0)^{3/8}\,(\mu_0/\mu_{\text{ст}})^{1/8}. \qquad (19.3.19)$$

Здесь индекс «0» означает, что величина определяется при $T = T''$, а индекс «ст» — что при $T = T_{\text{ст}}$. Формула (19.3.19) справедлива при $0{,}5 < \lambda_0/\lambda_{\text{ст}} < 2$ и $0{,}1 < \mu_0/\mu_{\text{ст}} < 1$. Поправка эта обычно невелика, о чем можно судить по данным табл. 19.1.

Таблица 19.1

**Поправка на переменность физических свойств конденсата по формуле (19.3.19) для воды**

| $\Delta T=(T''-T_{\text{ст}})$, °C | $\varepsilon_T$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $p=98{,}1$ кПа | $p=492$ кПа | $p=981$ кПа | $p=9810$ кПа |
| 10 | 0,975 | 0,990 | 0,990 | 1,01 |
| 20 | 0,965 | 0,985 | 0,985 | 1,01 |
| 50 | 0,900 | 0,935 | 0,960 | 1,02 |

Чисто ламинарное течение конденсата практически реализуется при значениях $\text{Re} < 10$. Волнообразование вызывает некоторое повышение коэффициента теплоотдачи по сравнению с формулой Нуссельта. Можно полагать, что в этой области течения пленки конденсата

$$\overline{\text{Nu}} = 1{,}13\,(\text{Ar}\,\text{Pr}\,\text{K})^{1/4}; \quad (19.3.20)$$

$$\overline{\text{N}}_* = 1{,}18\,\text{Re}^{-1/3}. \quad (19.3.21)$$

## 19.4. ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПЛЕНКИ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ МЕДЛЕННОМ ДВИЖЕНИИ ПАРА

Будем по-прежнему рассматривать плоскую пленку при $K \gg \varphi$ и медленно двигающемся паре. Пренебрегая силами инерции, можем написать, что касательные напряжения в пленке

$$\tau = g\,(\rho' - \rho'')\,(\delta - y). \quad (19.4.1)$$

При наличии молекулярного трения, когда $\tau = \mu dw/dy$, уравнение (19.4.1) дает параболический профиль скоростей (19.3.3). В случае турбулентного течения по аналогии с пограничным слоем несжимаемой жидкости на пластине можно принять, что в пленке устанавливается логарифмический профиль скоростей.

Тепловой поток в направлении нормали к поверхности охлаждения определяется формулой

$$q = -(\lambda + \lambda_{\text{т}})\partial T/\partial y \quad (19.4.2)$$

и соответственно

$$T'' - T_{\text{ст}} = \int_0^\delta \frac{\partial T}{\partial y}\,dy = \int_0^\delta \frac{q\,dy}{\lambda + \lambda_T} \quad (19.4.3)$$

или при $\lambda = \text{const}$

$$\frac{\alpha_x}{\lambda}\,\delta = \left(\int_0^1 \frac{\tilde{q}\,d\xi}{1 - \lambda_T/\lambda}\right)^{-1}. \quad (19.4.4)$$

Здесь $\alpha_x = q/(T'' - T_{\text{ст}})$ — локальное (в сечении $x$) значение коэффициента теплоотдачи; $\xi = y/\delta$ — относительное расстояние по нормали от поверхности охлаждения; $\tilde{q} = q/q_{\text{ст}}$ — функция изменения плотности теплового потока по толщине пленки ($q_{\text{ст}}$ — плотность теплового потока у поверхности охлаждения).

Согласно уравнению (19.4.1) скорость касательного напряжения на стенке в данном случае

$$v^*_{\text{ст}} = \sqrt{\tau_{\text{ст}}/\rho'} = \sqrt{g\delta\,(1 - \rho''/\rho')}. \quad (19.4.5)$$

Отсюда следует, что

$$\delta=\left[\frac{\nu^4}{g(1-\tilde{\rho}'')}\right]^{1/3}\eta_\delta^{2/3}, \qquad (19.4.6)$$

где $\eta_\delta = v_{ст}\delta/\nu$ — безразмерная толщина пленки и $\tilde{\rho}'' = \rho''/\rho'$. Подставляя это значение $\delta$ в уравнение (19.4.4) и принимая во внимание связь между $\lambda_т$ и $\mu_т$, приходим к следующему интегральному соотношению:

$$\frac{\alpha_x}{\lambda}\left[\frac{\nu^2}{g(1-\tilde{\rho}'')}\right]^{1/3}=\eta_\delta^{1/3}\left(\int\limits_0^{\eta_\delta}\frac{\tilde{q}d\eta}{1+\Pr\mu_T/\mu}\right)^{-1}. \qquad (19.4.7)$$

При $K \gg \varphi$ $\tilde{q} \approx 1$.

Практически для физического анализа процесса достаточно ограничиться рассмотрением двухслойной схемы. Количественные результаты для наиболее важной области значений чисел Pr конденсата при этом также оказываются удовлетворительными.

Соответствующие выражения для турбулентной вязкости будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}&\text{при}\quad 0<y<11{,}6\nu/v^*_{ст}\quad \mu_T=0;\\&\text{при}\quad y>11{,}6\nu/v^*_{ст}\quad \mu_T\approx 0{,}16\rho' y^2 dw/dy.\end{aligned}\right\} \qquad (19.4.8)$$

В данном случае, согласно уравнению (19.4.3),

$$\mu_T\, dw/dy=\rho' v^{*2}_{ст}(1-\xi)$$

и в области, где $\mu_T \gg \mu$,

$$\mu_T/\mu\approx 0{,}4\eta\sqrt{1-\xi}. \qquad (19.4.9)$$

Подставив эти значения $\mu_T$ в уравнение (19.4.7) и выполнив интегрирование в предположении, что во всей области $\eta > 11{,}6$ $\mu_T \gg \mu$, после соответствующих преобразований получим формулу*

$$N_{*x}\approx 0{,}4\Pr\eta_\delta^{1/3}\left(\ln\frac{\sqrt{\eta_\delta}+\sqrt{\eta_\delta-11{,}6}}{\sqrt{\eta_\delta}-\sqrt{\eta_\delta-11{,}6}}+4{,}65\Pr\right)^{-1}. \qquad (19.4.10)$$

При $\eta_\delta \gg 11{,}6$ она принимает вид

$$N_{*x}\approx 0{,}4\Pr\eta_\delta^{1/3}[\ln(0{,}345\eta_\delta)+4{,}65\Pr]^{-1}. \qquad (19.4.11)$$

Практически** последней формулой можно пользоваться при всех значениях $\eta_\delta > 50$. Некоторые результаты расчетов по формулам (19.4.10) и (19.4.11) приведены в табл. 19.2.

Подставив в уравнение материального баланса пленки логарифмический профиль скоростей, найдем связь между числом Рейнольдса пленки и ее безразмерной толщиной:

$$\mathrm{Re}=\eta_\delta(3{,}0+2{,}5\ln\eta_\delta)-39. \qquad (19.4.12)$$

Учет переменности касательных напряжений по толщине пленки (т. е. отклонение от логарифмического профиля скоростей) не приводит к существенному повышению точности расчета числа Рейнольдса.

---

* При медленно двигающемся паре в области $y \approx \delta$ $dw/dy \approx 0$, т. е. указанное условие не выполняется. Однако на значении интеграла это обстоятельство отражается мало (при $\Pr > 0{,}5$).

** Так, например, при $\Pr = 1$ и $\eta_\delta = 50$ расчет по формуле (19.4.9) дает отклонение от расчета по соотношениям (19.4.8) всего на 2%.

Таблица 19.2

**Локальные коэффициенты теплоотдачи при турбулентном течении пленки конденсата**

| $\eta_\delta$ | Re | $\frac{\alpha_x}{\lambda}\left[\frac{\nu^2}{g(1-\rho''/\rho')}\right]^{1/3}$ | | | | $\eta_\delta$ | Re | $\frac{\alpha_x}{\lambda}\left[\frac{\nu^2}{g(1-\rho''/\rho')}\right]^{1/3}$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Pr=1 | Pr=1,75 | Pr=3 | Pr=5 | | | Pr=1 | Pr=1,75 | Pr=3 | Pr= |
| 15 | 103 | 0,175 | 0,189 | 0,198 | 0,204 | 300 | 5 140 | 0,288 | 0,367 | 0,430 | 0,482 |
| 30 | 307 | 0,186 | 0.213 | 0,232 | 0,246 | 1 000 | 20 200 | 0,381 | 0,500 | 0,610 | 0,690 |
| 50 | 590 | 0,200 | 0,238 | 0,266 | 0,284 | 4 000 | 94 500 | 0,534 | 0,723 | 0,900 | 1,04 |
| 60 | 757 | 0,206 | 0,249 | 0,280 | 0.300 | 7 000 | 176 000 | 0,615 | 0,842 | 1,06 | 1,24 |
| 100 | 1 410 | 0,230 | 0,280 | 0,321 | 0,350 | 20 000 | 555 000 | 0,827 | 1,14 | 1,45 | 1,71 |
| 200 | 3 210 | 0,266 | 0,333 | 0,388 | 0,430 | | | | | | |

## 19.5. СРЕДНИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛООТДАЧИ ПРИ СМЕШАННОМ ТЕЧЕНИИ ПЛЕНКИ КОНДЕНСАТА НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКЕ

Средний коэффициент теплоотдачи в заданном диапазоне чисел Рейнольдса пленки конденсата может быть определен формулой

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \int_0^{\mathrm{Re}} \alpha_x \, d\mathrm{Re}, \qquad (19.5.1)$$

или, при смешанных режимах течения,

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{л} \, \mathrm{Re}_{кр} + \bar{\alpha}_T (\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{кр}). \qquad (19.5.2)$$

Здесь $\mathrm{Re}_{кр}$ — условное значение числа Рейнольдса перехода от ламинарно-волнового режима течения пленки конденсата к турбулентному (или квазитурбулентному) режиму; $\bar{\alpha}_{л}$ и $\bar{\alpha}_T$ — соответствующие средние значения коэффициентов теплоотдачи.

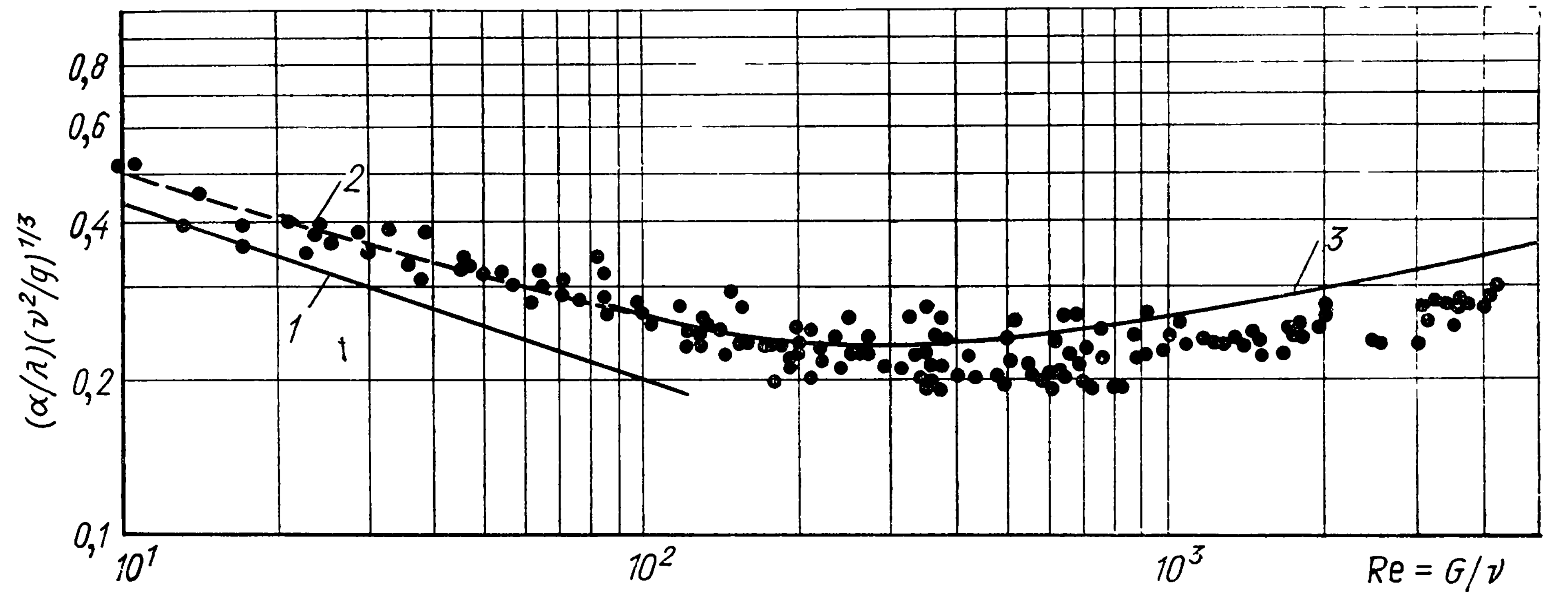



Рис. 19.3. Зависимости между числами подобия $N_*$ и Re при пленочной конденсации фреона-21 на вертикальной поверхности:

*1* — расчет по формуле (19. 3. 13); *2* — линия, осредняющая экспериментальные данные; *3* — расчет по формулам (19. 3. 11), (19. 4. 10), (19. 5. 2) при $\mathrm{Re}_{кр}=100$ и Pr=3

На рис. 19.3, где приведены данные опытов автора, И. И. Гогонина и А. Р. Дорохова, отчетливо наблюдается отклонение от закона ламинарной теплоотдачи при Re > 100. В то же время действительное турбулентное течение пленки конденсата начинается при Re > 400, что видно из результатов измерений трения, показанных на рис. 19.4. Это расхождение можно объяснить тем, что волны на внешней поверхности пленки конденсата увеличивают поверх-

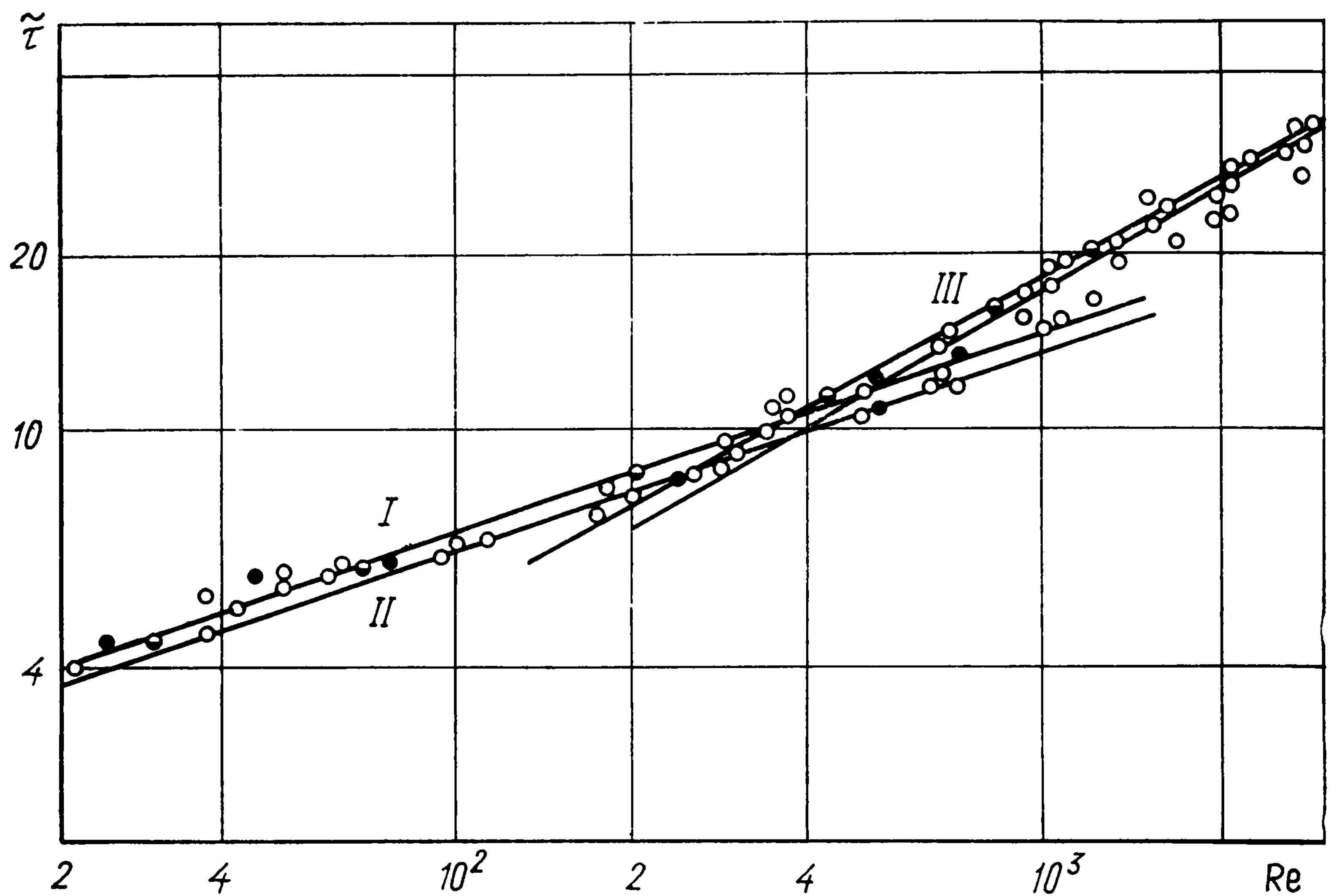



Рис. 19.4. Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса пленки $\tilde{\tau}=\tau/\rho'(g^2G\nu)^{1/3}$:

○ — экспериментальные данные, полученные электродиффузионным методом; ◒ — расчет по средней толщине пленки $\bar{\delta}$ $\tau=\rho g\bar{\delta}$, Па; ● — данные Хо и Хаммела; *I* — расчет для ламинарной гладкой пленки по Нуссельту; *II* — расчет $\delta$ для волновой пленки по Капице; *III* — расчет $\delta$ по (19.4.12)

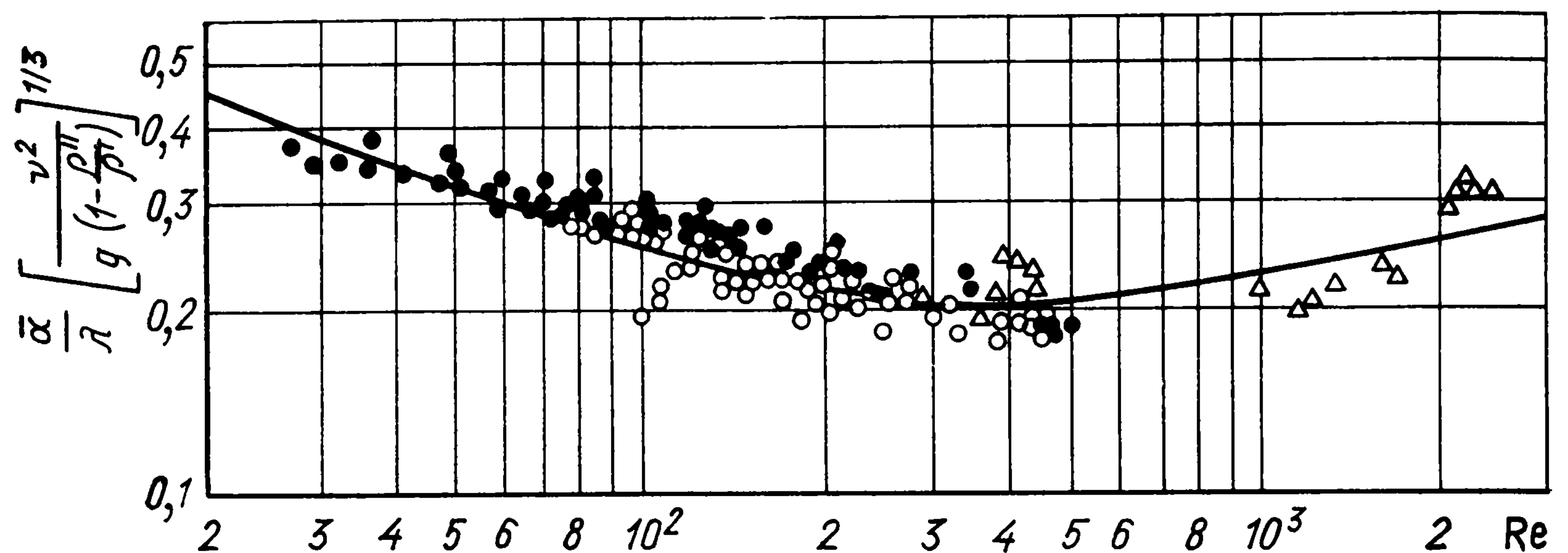



Рис. 19.5. Зависимость $N_*$ от Re при конденсации паров воды на наружной поверхности труб:

———— — теоретический расчет при $Re_{кр}=100$; ○ — опыты С. С. Кутателадзе ($Pr=1,75$); Δ — опыты В. А. Гудемчука ($Pr=1,75$); ● — опыты Н. В Зозули [($Re < 125$, $Pr=2,9 \div 4,2$ и $Re > 125$, $Pr=1,72$)

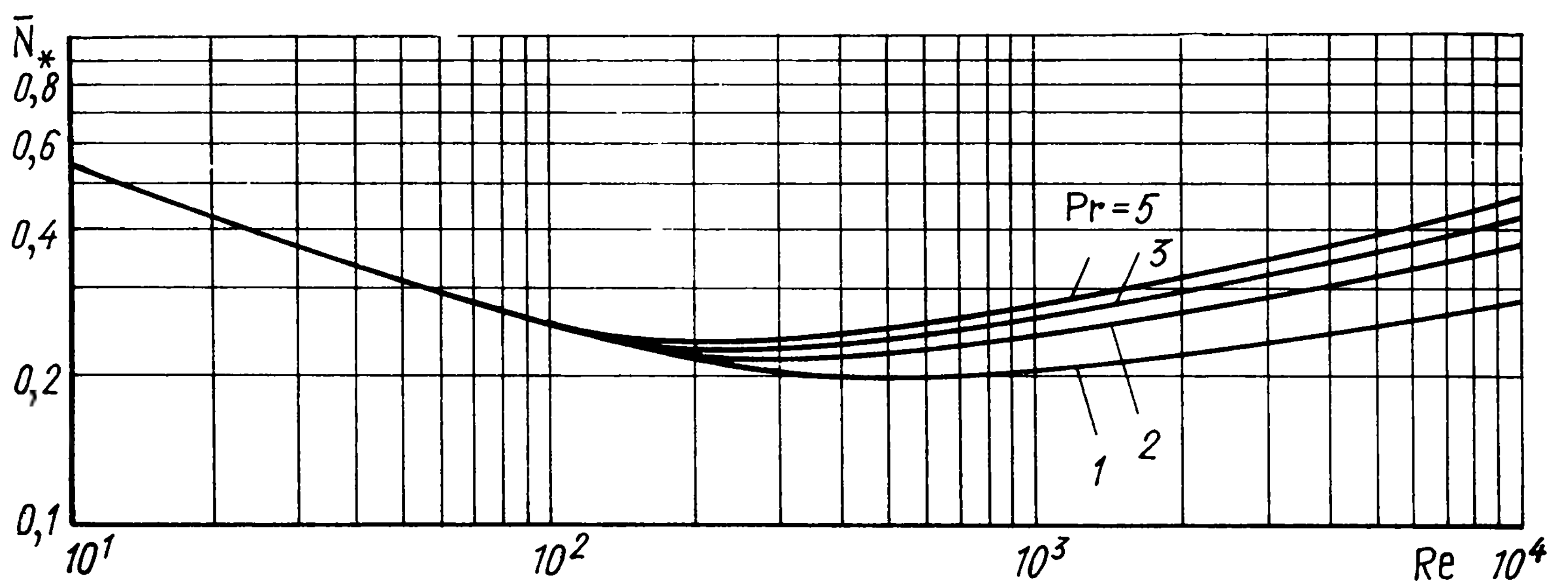



Рис. 19.6. Зависимость $N_*$ от Re для пленки конденсата при различных числах Pr. При $Re<100$ расчет по формуле (19.3.21); при $Re>100$ — (19.4.10)

ность контакта и повышают эффективное значение ее коэффициента теплопроводности. Последнее можно рассматривать как возникновение квазитурбулентной теплопроводности и распространить формулу (19.4.10) на область чисел Рейнольдса пленки, меньших 400, т. е. ввести в формулу (19.5.2) некое условное критическое число Рейнольдса $Re_{кр*}$. На рис. 19.3 приведены результаты расчета при $Re_{кр*}$ для конденсации паров фреона, а на рис. 19.5 — для конденсации паров воды. Как видно, имеет место не только качественно правильное описание экспериментальных фактов, но и близкое количественное согласие.

В табл. 19.3 даны значения

$$\overline{N}_{*x} = \frac{1}{Re-100} \int_{100}^{Re} N_{*x} \, dRe, \qquad (19.5.3)$$

рассчитанные по формулам (19.4.10) и (19.4.12).

Графики, приведенные на рис. 19.6, рассчитаны по формулам (19.3.21), (19.4.10) и табл. 19.3.

Таблица 19.3

**Средние значения числа $N_{*x} = \overline{Nu}_T Ar^{-1/3}$, рассчитанные по формулам (19.4.10) и (19.4.12). $Re_{кр*} = 100$**

| Re \ Pr | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 120 | 0,173 | 0,191 | 0,198 | 0,201 | 0,203 | 0,207 |
| 200 | 0,174 | 0,197 | 0,206 | 0,210 | 0,213 | 0,218 |
| 300 | 0,177 | 0,204 | 0,214 | 0,220 | 0,224 | 0.230 |
| 500 | 0,183 | 0,215 | 0,229 | 0,237 | 0,241 | 0,249 |
| 1 000 | 0,196 | 0,237 | 0,256 | 0,266 | 0,273 | 0,283 |
| 2 000 | 0,214 | 0,267 | 0,291 | 0,305 | 0,314 | 0,328 |
| 3 000 | 0,227 | 0,287 | 0,316 | 0,332 | 0,343 | 0,361 |
| 5 000 | 0,246 | 0,318 | 0,353 | 0,373 | 0,386 | 0,409 |
| 10 000 | 0,278 | 0,368 | 0,413 | 0,440 | 0,458 | 0,487 |
| 20 000 | 0,318 | 0,430 | 0,487 | 0,522 | 0,546 | 0,585 |

Таким образом, теплообмен при пленочной конденсации пара имеет весьма сложный характер, и при больших числах Рейнольдса пленки конденсата можно наблюдать области ламинарного течения с гладкой границей раздела фаз, ламинарно-волнового течения, области с квазиавтомодельным и с развитым турбулентным теплообменом.

## 19.6. ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЯ ЧИСТОГО ПАРА НА ТЕПЛООТДАЧУ ПРИ КОНДЕНСАЦИИ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Движение пара вызывает трение на границе раздела фаз в соответствии с третьим уравнением (19.2.2)*. Это трение в случае, если направление течения пара совпадает с направлением силы тяжести, создает дополнительную движущую силу. При этом скорость течения пленки увеличивается, толщина ее уменьшается и коэффициент теплоотдачи возрастает.

При течении пара снизу вверх, т. е. обратно направлению силы тяжести, пленка тормозится потоком пара, и коэффициент теплоотдачи уменьшается. Когда сила трения пара превысит силу тяжести, вся пленка потечет вверх, и коэффициент теплоотдачи начнет возрастать по мере увеличения скорости пара.

* При турбулентном течении пленки необходимо учитывать суммарную вязкость $(\mu + \mu_T)_{гр}$.

При ламинарном течении пленки первая константа интегрирования уравнения движения конденсата

$$C_1 = \pm \frac{c_f'' w''^2 \rho''}{2\mu} + g \frac{\rho' - \rho''}{\mu} \delta. \qquad (19.6.1)$$

Выражение для профиля скорости течения конденсата после второго интегрирования уравнения движения принимает вид ($C_2$ определяется, как и ранее, из условия, что при $y = 0$ $w = 0$)

$$w = \left(\pm \frac{c_f'' w''^2 \rho''}{2\mu} + g\delta \frac{\rho' - \rho''}{\mu}\right) y - g \frac{\rho' - \rho''}{2\mu} y^2. \qquad (19.6.2)$$

Вычисляя $\int\limits_0^\delta w dy$ и подставляя в выражение (19.3.7), получаем уравнение

$$\frac{\lambda \Delta T}{r\rho'} dx = \left(\pm \frac{c_f'' w''^2 \rho''}{2\mu} \delta^2 + g \frac{\rho' - \rho''}{\mu} \delta^3\right) d\delta. \qquad (19.6.3)$$

При $Z = [c_f'' w''^2 \rho''/2g\delta (\rho' - \rho'')] \gg 1$ (быстродвижущийся пар) и $\Delta T = \text{const}$ из уравнения (19.6.3) следует, что

$$\left.\begin{aligned} \alpha_x &= \sqrt[3]{\frac{\lambda^2 c_f'' w''^2 \rho'' r (\rho' - \rho'')}{6\mu \Delta T x}}; \\ \bar{\alpha} &= (3/2)\, \alpha_{x=L}. \end{aligned}\right\} \qquad (19.6.4)$$

При $Z \gg 1$ и $q = \text{const}$

$$\frac{q}{r\rho'} dx = d\left(\int\limits_0^\delta w dy\right) = \frac{c_f'' w''^2 \rho''}{2\mu} \delta d\delta \qquad (19.6.5)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{\lambda}{2} \sqrt[3]{\frac{r\rho' c_f'' w''^2 \rho''}{\mu q x}}; \\ \bar{\alpha} &= 2\alpha_{x=L}. \end{aligned}\right\} \qquad (19.6.6)$$

Соответственно найдем, что в случае быстродвижущегося пара и ламинарного течения пленки конденсата:

при $\Delta T = \text{const}$

$$\alpha/\alpha_0 = 1{,}03 \left\{v_{\text{ст}}^{*''} \left[g\nu (1 - \tilde{\rho}'')\right]^{-1/3} \text{Re}^{-1/6}\right\}^{2/3}; \qquad (19.6.7)$$

при $q = \text{const}$

$$\alpha/\alpha_0 = 0{,}96 v_{\text{ст}}^{*''} \left[g\nu (1 - \tilde{\rho}'')\right]^{-1/3} \text{Re}^{-1/6}. \qquad (19.6.8)$$

Здесь $\alpha_0$ — значение коэффициента теплоотдачи при $w'' = 0$; $\text{Re} = \bar{q}L/r\mu$ — число Рейнольдса пленки в конце поверхности охлаждения; $v_{\text{ст}}^{*''} = w''\sqrt{c_f'' \rho''/2\rho'}$ — скорость касательного напряжения в пленке на границе с паром.

Подставив в последние формулы предельное значение $c_f$ из уравнения (13.10.15), как было предложено Цессом, получим предельные зависимости для $Z \gg 1$:

$$\Delta T = \text{const}, \quad \text{Nu}_x \to \sqrt{w'' x/(3\nu')}; \qquad (19.6.9)$$

$$q = \text{const}, \quad \text{Nu}_x \to \sqrt{w'' x/(2\nu')}. \qquad (19.6.10)$$

Таким образом, при больших скоростях течения пара в ламинарном режиме течения конденсата коэффициент теплоотдачи не зависит от плотности теплового потока.

Таблица 19.4

**Значения отношения $\overline{\alpha}/\overline{\alpha}_0$ при ламинарном течении пленки и движении пара сверху вниз ($w''$ = const; $\Delta t$ = const)**

| $\dfrac{c_f w''^2 \rho'' \overline{\alpha}_0}{2g\rho'\lambda}$ | 0 | 0,144 | 0,577 | 1,290 | 2,308 | 3,61 | 8,11 | 14,43 | 22,50 | 32,47 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{\alpha}/\overline{\alpha}_0$ | 1 | 1,06 | 1,19 | 1,38 | 1,59 | 1,78 | 2,30 | 2,75 | 3,19 | 3,59 |

Общее решение для $w''$ = const, полученное Нуссельтом, приведено в табл. 19.4 и 19.5, где $\alpha_0$ — значение коэффициента теплоотдачи при том же значении $\Delta T$, что и в случае движущегося пара и $w'' = 0$. Подставляя сюда значение $c_f$ из формулы (19.2.8), можно получить хорошее приближение в широком диапазоне скоростей течения пара.

Таблица 19.5

**Значения отношения $\overline{\alpha}/\overline{\alpha}_0$ при ламинарном течении пленки и движении пара снизу вв рх ($w''$ = const; $\Delta t$ = const)**

| $\dfrac{c_f'' w''^2 \rho'' \overline{\alpha}_0}{2g\rho'\lambda}$ | 0 | 0,0147 | 0,0590 | 0,2353 | 0,830 | 1,475 | 1,753 | 2,30 | 3,61 | 8,11 | 14,43 | 22,50 | 32,47 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{\alpha}/\overline{\alpha}$ | 1 | 0,995 | 0,982 | 0,914 | 0,731 | 0,910 | 1,144 | 1,35 | 1,65 | 2,24 | 2,70 | 3,18 | 3,59 |

При турбулентном течении пленки конденсата и течении пара сверху вниз касательные напряжения определяются формулой ($b_k \ll 1$):

$$\tau = g(\rho' - \rho'')(\delta - y) + c_f'' \rho'' w_{\text{от}}^2/2. \qquad (19.6.11)$$

При больших скоростях течения

$$\tau \approx (c_f''/2)\rho'' w''^2 \approx \tau_{\text{ст}} = \text{const} \qquad (19.6.12)$$

и

$$\mu_T \approx 0{,}4\ \mu\eta. \qquad (19.6.13)$$

Соответственно при $\eta_\delta \gg 11{,}6$ и $c_f''\rho'' w''^2 \gg g\delta\rho'$

$$\frac{\alpha_x}{c\rho' v^*} = \left(2{,}5 \ln \frac{\eta_\delta}{11{,}6} + 11{,}6\text{Pr}\right)^{-1}, \qquad (19.6.14)$$

где

$$v^* = w'' \sqrt{\tilde{\rho}'' c_f''/2} \to \sqrt{q w''/(r\rho')}. \qquad (19.6.15)$$

## 19.7. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА ВНУТРИ ТРУБЫ

Рассмотрим напорное течение парожидкостной смеси в трубе при $T_{\text{ст}} < T''$ и локальном массовом паросодержании $x$. Тогда касательные напряжения на внутренней поверхности трубы будут равны

$$\tau_{\text{ст}} = -\frac{D}{4}\frac{dp}{dz}, \qquad (19.7.1)$$

где $D$ — внутренний диаметр трубы; $z$ — координата, направленная по оси трубы вдоль течения. Определим локальный коэффициент теплоотдачи по приближенной формуле

$$\frac{\alpha_z D}{\lambda} = 2\left(\int\limits_{\sqrt{\varphi}}^{1} \frac{d\xi}{(1+\mathrm{Pr}\mu_T/\mu)\,\xi}\right)^{-1}. \qquad (19.7.2)$$

Здесь $\varphi$ — доля сечения, занятая паром; $\xi = R/R_0$, где $R$ — текущий радиус; $R_0$ — внутренний радиус трубы.

Полагая, как при решении задачи об однородном потоке в трубе, $\mu_т = 0{,}4\ \rho v^*_{ст} y\xi$ и разбивая поток на ламинарный подслой и турбулентное ядро, получаем

$$\mathrm{Nu}_z \approx \frac{0{,}4\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}_*}{\ln[(1-\sqrt{\varphi})/(11{,}6\sqrt{\varphi})]\,\mathrm{Re}_* + 4{,}65\mathrm{Pr}}, \qquad (19.7.3)$$

где

$$\mathrm{Re}_* = v^*_0 D/\nu.$$

Из гидравлики газожидкостных смесей известно, что

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}_* &\approx \mathrm{Re}\left[\frac{c_{f_0}}{2}\left(1+\frac{1-\tilde{\rho}''}{\tilde{\rho}''}x\right)\right]^{1/2}; \\ \varphi &\approx 1-\left(1+\frac{1-\tilde{\rho}''}{\tilde{\rho}''}x\right)^{-1/2}. \end{aligned}\right\} \qquad (19.7.4)$$

Здесь $x$ — массовое паросодержание потока в данном поперечном сечении трубы и $\tilde{\rho}'' = \rho''/\rho'$ — относительная плотность пара.

Принимая во внимание, что величина $\varphi$ входит в уравнение (19.7.3) под знаком логарифма, можно заключить, что в первом приближении зависимость Nu от $\mathrm{Re}_*$ при конденсации их парожидкостной смеси в трубе должна быть такого же вида, что и при теплоотдаче к однородному потоку. Тогда с учетом предельного перехода к формуле (11.6.19) при $x = 0$ можно написать интерполяционную зависимость вида

$$\mathrm{Nu}_z \approx 0{,}023\mathrm{Pr}^{0,4}\,\mathrm{Re}^{0,8}\sqrt{1+(\rho'/\rho''-1)x}. \qquad (19.7.5)$$

Здесь $\mathrm{Re} = 4G/\pi\mu D$, где $G$ — массовый расход смеси, кг/с.

Эта формула была предложена и проверена экспериментально Е. П. Ананьевым, Г. Н. Кружилиным и Л. Д. Бойко. Практически в интервале $x_1 < x < x_2$ можно считать, что

$$\overline{\mathrm{Nu}} \approx 0{,}011\mathrm{Pr}^{0,4}\,\mathrm{Re}^{0,8}\left[\sqrt{1+(\rho'/\rho''-1)x_1}+\sqrt{1+(\rho'//\rho''-1)x_2}\right]. \qquad (19.7.6)$$

## 19.8. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ЧИСТОГО ПАРА НА ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ТРУБ

В случае непрерывного стекания конденсата с нижней образующей горизонтальной трубы общая связь между критериями подобия имеет тот же характер, что и для вертикальных труб. Меняются лишь численные значения коэффициентов, и вместо высоты $L$ в критерии подобия войдет наружный диаметр $D$.

Действие силы тяжести на пленку конденсата, текущую по наклонной плоскости, пропорционально синусу угла наклона этой плоскости к горизонту $\beta$, т. е. в уравнении движения величина $\rho' - \rho''$ должна быть умножена на $\sin\beta$. Направив координату $x$ по касательной к поверхности пленки и принимая во внимание, что в обычных условиях $\delta \ll D$, можно положить

$$dx = (D/2)\,d\beta. \qquad (19.8.1)$$

Введя в уравнение (19.3.3) поправку на $\sin\beta$, подставив в выражение (19.3.6) значение $dx$ из формулы (19.8.1), получим следующее уравнение для толщины пленки конденсата, ламинарно текущей по внешней поверхности горизонтальной трубы в медленно движущемся паре:

$$\delta d(\delta^3 \sin\beta) = \frac{3\mu\lambda\Delta TD}{2g\rho'(\rho'-\rho'')r}\,d\beta. \qquad (19.8.2)$$

Введя обозначение $Z = 2g\rho'(\rho' - \rho'')r\delta^4/(3\,\mu\lambda\Delta TD)$ и заметив, что $d(\delta^2 \sin\beta) = 3\delta^2 \sin\beta d\delta + \delta^2 \cos d\beta$, получим уравнение относительно $Z$:

$$(3/4)\sin\beta\, dZ/d\beta + Z\cos\beta - 1 = 0. \qquad (19.8.3)$$

Нуссельт представил решение этого уравнения в форме

$$Z = \sin^{-4/3}\beta\left(\frac{4}{3}\int \sin^{1/3}\beta d\beta + C\right). \qquad (19.8.4)$$

Очевидно, на верхней образующей трубы толщина пленки конденсата имеет конечное значение, что возможно, если $C = 0$. Вычисления для одиночной трубы дают формулу (в предположении непрерывного стекания струй конденсата с нижней ее части)

$$\bar{\alpha} = 0{,}725\sqrt[4]{g\frac{\lambda^3\rho'(\rho'-\rho'')r}{\mu\Delta TD}}. \qquad (19.8.5)$$

Если число Рейнольдса пленки определить как

$$\mathrm{Re} = q\pi D/(\mu r), \qquad (19.8.6)$$

то из формулы (19.8.5) следует, что

$$\frac{\bar{\alpha}}{\lambda}\left[\frac{\nu^2}{g(1-\tilde{\rho})}\right]^{1/3} = 0{,}95\mathrm{Re}^{-1/3}. \qquad (19.8.7)$$

Как видно, при таком определении числа Рейнольдса закон ламинарного теплообмена практически совпадает с точностью до константы для пленочной конденсации на горизонтальных трубах и вертикальной стенке. Этот важный факт имеет место также в переходной и турбулентной областях закона теплообмена при пленочной конденсации пара.

В действительности стекание конденсата происходит периодически, отдельными каплями, что не отражается заметно на средней теплоотдаче по всей трубе, поскольку число капель велико и течение в среднем сохраняется симметричным. Опыты И. И. Гогонина и А. Р. Дорохова показали, что при изменении диаметра трубы (числа Вебера) и при постоянном числе Рейнольдса пленки величина критерия $(\alpha/\lambda)\,(\nu^2/g\,(1-\tilde{\rho}))^{1/3}$ имеет слабый максимум при $\tilde{D} = 2$.

В случае пакетов труб, сдвинутых относительно друг друга по горизонтали в соседних по вертикали рядах (т е. при любом не коридорном расположении труб), капли с верхних труб попадают на боковые образующие нижних труб, и симметрия течения нарушается. Этому нарушению симметрии пленки конденсата в известной мере препятствует действие поверхностного натяжения.

При одном и том же значении показателя степени в зависимости $\mathrm{Nu} \sim \mathrm{Re}^n$ влияние гидродинамического воздействия потока конденсата, натекающего сверху на данную трубу, может быть учтено параметром

$$(1/G_n)\sum G_i\,(1 \leqslant i \leqslant n), \qquad (19.8.8)$$

где $G_i$ — количество конденсата, образовавшегося в единицу времени на трубе $i$-го ряда гидродинамических взаимодействующих труб пакета. При ламинарном течении пленки это условие выполняется, и из формулы (19.8.4) следует, что

$$\alpha_i = \varepsilon\alpha_1. \qquad (19.8.9)$$

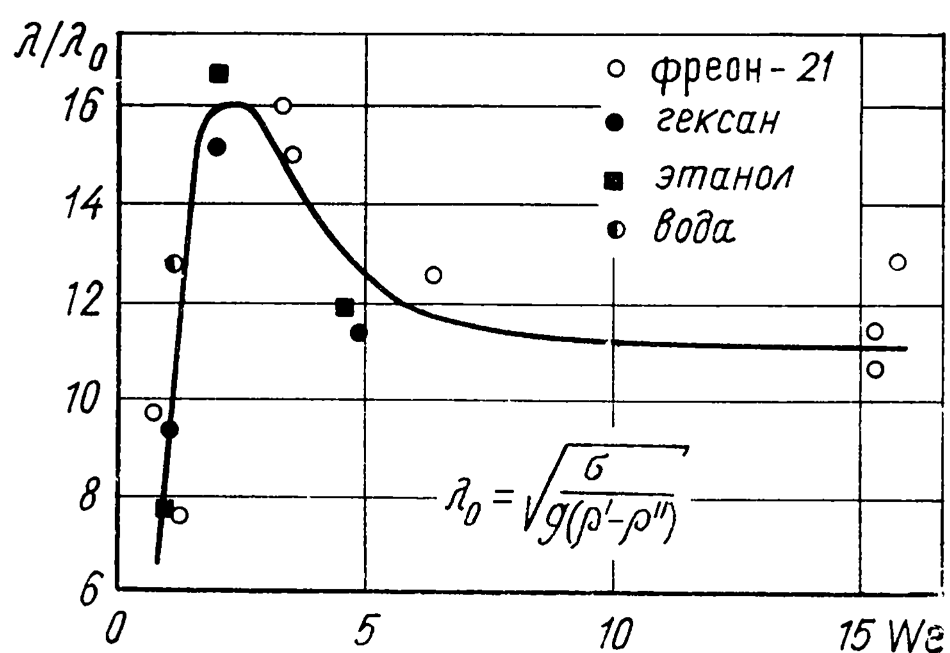



Рис. 19.7. Зависимость безразмерной длины волны от критерия Вебера, рассчитанного по формуле (19.8.12), при конденсации на горизонтальных трубах различных жидкостей

Здесь $\alpha_1$ — средний коэффициент теплоотдачи верхней (первой) трубы ряда взаимодействующих труб и $\varepsilon$ — функция от $(1/G_n)\ \Sigma G_i$. Более общей является зависимость

$$\mathrm{Nu}\,(\mathrm{Re}_\Sigma, \mathrm{Pr}, \mathrm{We}), \qquad (19.8.10)$$

где $\mathrm{Re}_\Sigma$ — число Рейнольдса пленки конденсата, рассчитанное по полному натекающему количеству конденсата:

$$\mathrm{Re}_\Sigma = (1/\mu) \sum G_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \qquad (19.8.11)$$

Число Вебера, записанное здесь в форме

$$\mathrm{We} = D\sqrt{g(\rho' - \rho'')/\sigma}. \qquad (19.8.12)$$

где $\sigma$ — коэффициент поверхностного натяжения, характеризует влияние волн и пульсаций, возникающих при взаимодействии капиллярных и гравитационных сил. Как видно из рис. 19.7, изменение длины волны обнаруживается только при малых числах We.

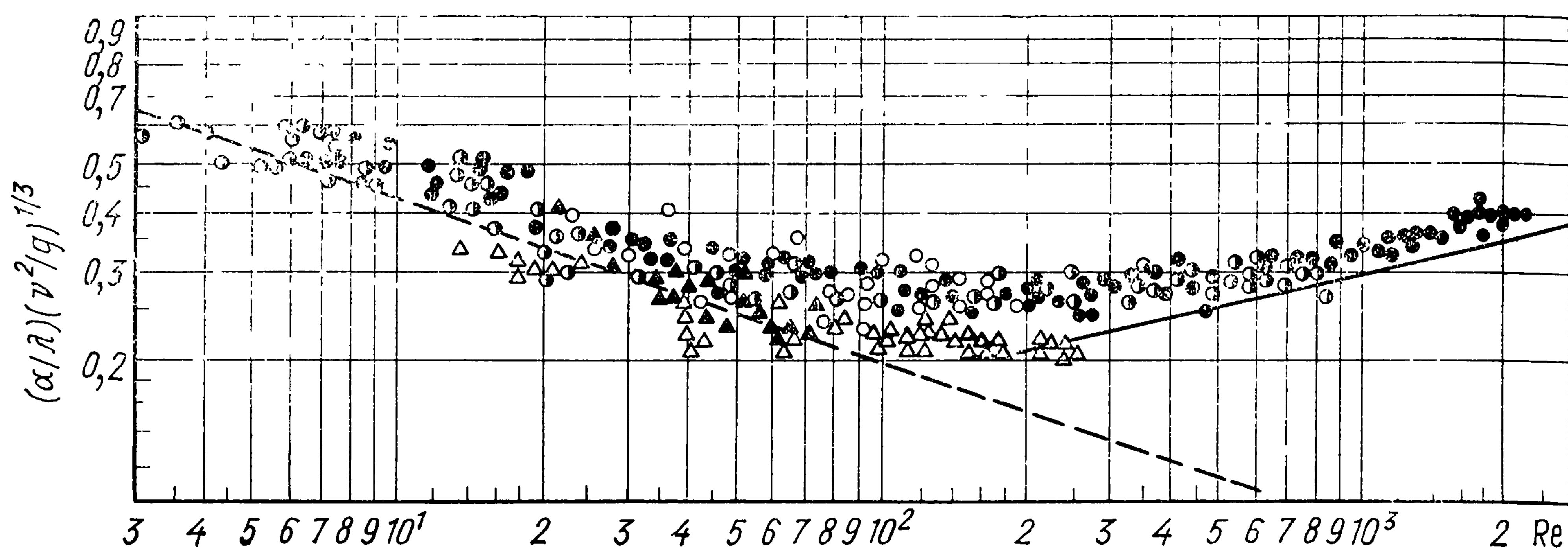



Рис. 19.8. Конденсация неподвижного пара на пакете горизонтальных труб: ▲ — водяной пар (опыты С. С. Кутателадзе); ◑ — фреон-21 (И. И. Гогонин, А. Р. Дорохов, В.И. Сосунов); ○ — фреон-12 (Янг и Воленберг); △ — водяной пар (опыты В.П. Исаченко, А. Ф. Глушкова); ● — фреон-12 (С. С. Кутателадзе, И. И. Гогонин, В. И. Сосунов); пунктирная линия — расчет по формуле (19.8.7); сплошная линия — расчет по формуле (19.4.10)

На рис. 19.8 показаны результаты опытов И. И. Гогонина и А. Р. Дорохова, проведенных под руководством автора, для конденсации паров фреона на коридорном пакете горизонтальных труб. Здесь еще более отчетливо, чем в опытах с вертикальными трубами, обнаруживается существование области теплооб-

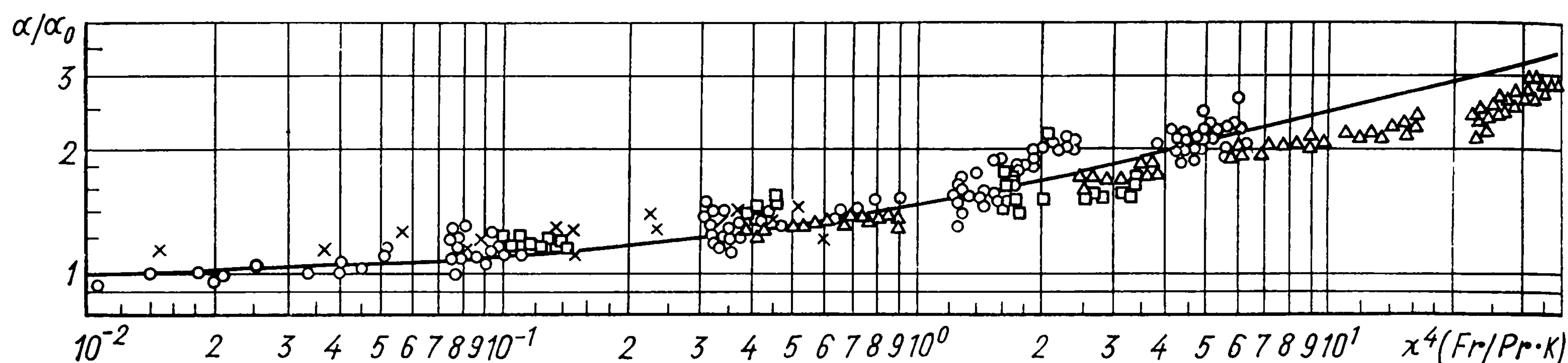



Рис. 19.9. Влияние скорости течения пара на теплоотдачу при конденсации на горизонтальной трубе разных диаметров ($\alpha_0$ — экспериментальные значения коэффициента теплоотдачи неподвижного пара):

○ — фреон-21, $D=16$ мм; △ — фреон-21; $D=2{,}5$ мм: □ — фреон-12; $D=16$ мм; × — водяной пар; $D=19$ мм (Л. Д. Берман, Ю. А. Туманов); линия — расчет по формуле Фуджи, Уехара, Курата

мена, квазиавтомсдельной относительно числа Рейнольдса пленки конденсата.

На рис. 19.9 показаны экспериментальные данные С. С. Кутателадзе, И. И. Гогонина и А. Р. Дорохова о влиянии скорости течения пара на теплоотдачу при ламинарном течении конденсата по горизонтальной трубе. В качестве определяющего критерия взят интерполяционный комплекс

$$\chi^4 \mathrm{Fr}/\mathrm{Pr}K, \qquad (19.8.13)$$

предложенный в работе Фуджи, Уэхара, Курата. Здесь

$$\chi = 0{,}9\,[1 + \mathrm{Pr}\,K/(\rho'\,\mu'/\rho''\,\mu'')^{1/2}]^{1/3}.$$

## 19.9. ПЛЕНОЧНАЯ КОНДЕНСАЦИЯ НА НИЖНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛИТЫ

При конденсации пара на нижней поверхности горизонтальной плиты (потолок), достаточно большой по сравнению с отдельными каплями, стекание конденсата происходит путем отрыва от пленки отдельных капель. Поскольку вероятность образования капель статистически одинакова для всех частей плиты, средняя во времени толщина пленки и соответственно коэффициент теплоотдачи не зависят от протяженности поверхности конденсации. Толщина пленки и размеры отдельных капель определяются соотношением сил поверхностного натяжения и тяжести.

Корень квадратный из этого соотношения имеет размерность длины и является масштабом свободно возникающих образований конденсата. Таким образом, принципиальный интерес данного процесса заключается в том, что он не зависит от действительных размеров поверхности охлаждения, а связан только с размерами образования новой фазы, определяемыми взаимодействующими в потоке силами. При этом статистический характер процесса образования и отрыва капель приводит к значительным колебаниям величины $\alpha$ около некоторого среднего значения.

С такого рода соотношениями особенно часто приходится сталкиваться при рассмотрении двухфазных систем, в которых одна из фаз сильно диспергирована, в частности, при пузырьковом кипении и капельной конденсации. Для рассматриваемого случая В. Д. Попов нашел экспериментальную зависимость вида

$$\frac{\bar{\alpha}}{\lambda}\left[\frac{\sigma}{g(\rho'-\rho'')}\right]^{1/2} = 0{,}15\left\{\frac{\nu}{a}\,\frac{g}{\nu^2}\left[\frac{\sigma}{g(\rho'-\rho'')}\right]^{3/2}(1-\tilde{\rho}'')\,\frac{r}{c\Delta T}\right\}^{1/4}. \qquad (19.9.1)$$

Полезно обратить внимание на то, что в данном случае критерий Архимеда представляет собой отношение двух «внутренних» линейных масштабов потока:

$$\mathrm{Ar}^{1/3} = \left[\frac{\sigma}{g(\rho'-\rho'')}\right]^{1/2}\left[\frac{\nu^2}{g(1-\tilde{\rho}'')}\right]^{-1/3}. \qquad (19.9.2)$$

## 9.10. ВЛИЯНИЕ ВЛАЖНОСТИ И ПЕРЕГРЕВА ПАРА

Если пар обладает влажностью $x$, то часть влаги будет выпадать вместе с конденсирующимися порциями пара. Наибольшее количество влаги, могущее выпасть на поверхности пленки конденсата, равно влагосодержанию сконденсировавшегося пара. Количество тепла, выделяющееся при выпадении на поверхности охлаждения 1 кг конденсата (включая влагу пара), равно $\varphi r$, где

$$(1 - x) < \varphi < 1. \qquad (19.10.1)$$

Следовательно, если для сухого насыщенного пара имеется зависимость $\alpha$ $(r)$, то для влажного пара при прочих равных условиях

$$1 > \frac{\alpha}{\alpha_0} > \frac{\alpha\,[r\,(1-x)]}{\alpha\,(r)}. \qquad (19.10.2)$$

Здесь $\alpha$ — коэффициент теплоотдачи при заданном $x$; $\alpha_0$ — то же при $x = 0$.

Из формулы (19.10.2) следует, что при ламинарном течении наличие влажности пара несколько ухудшает теплоотдачу, а при турбулентном — несколько улучшает. Однако это влияние невелико. Так, для ламинарного течения, согласно выражению (19.10.2),

$$1 > \frac{\alpha}{\alpha_0} > \sqrt[4]{1-x}, \qquad (19.10.3)$$

т. е. при $x = 10\%$ значение величины $\alpha/\alpha_0$ лежит в пределах от 1 до 0,975.

Процесс конденсации перегретого пара начинается также при соприкосновении с поверхностью, имеющей температуру ниже температуры насыщения. При стационарном процессе конденсации перегретого пара тепловой поток через поверхность раздела фаз определится уравнением

$$-\lambda(\partial T/\partial y)_{\text{гр}} = (r + \overline{c''\vartheta})\, g_n + q_2, \qquad (19.10.4)$$

где $g_n$ — массовая скорость конденсации; $q_2 = \alpha_2\vartheta$ — количество тепла, подводимого к пленке конденсата за счет конвективной теплоотдачи от несконденсированной части перегретого пара. Изменение коэффициента теплоотдачи за счет перегрева определится формулой

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} \approx \alpha\left(\frac{r + \overline{c''\vartheta}}{1-\beta}\right) \Big/ \alpha(r), \qquad (19.10.5)$$

где $\beta = q_2/q$. При ламинарном течении пленки конденсата и медленно движущемся паре

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} \approx \sqrt{\frac{1 + \overline{c''\vartheta}/r}{1-\beta}}. \qquad (19.10.6)$$

## 19.11. КАПЕЛЬНАЯ КОНДЕНСАЦИЯ

Для возникновения процесса конденсации необходимо существование центров конденсации, характерный размер которых может быть определен по формуле Томсона:

$$R_{\text{к}} = \frac{2\sigma T''}{r\rho'\,(T'' - T_{\text{ст}})}. \qquad (19.11.1)$$

Вследствие температурного градиента в каплях и микропленках конденсата возникает течение с характерной скоростью

$$w_\sigma = (\Delta T/\mu)\,(\partial\sigma/\partial T), \qquad (19.11.2)$$

определяемой взаимодействием термокапиллярной силы и вязкого трения в конденсате.

Используя величины $R_{\text{к}}$ и $w_\sigma$, можно образовать критерии Нуссельта и Рейнольдса. Присоединив к ним критерий Прандтля, характеризующий взаимо-

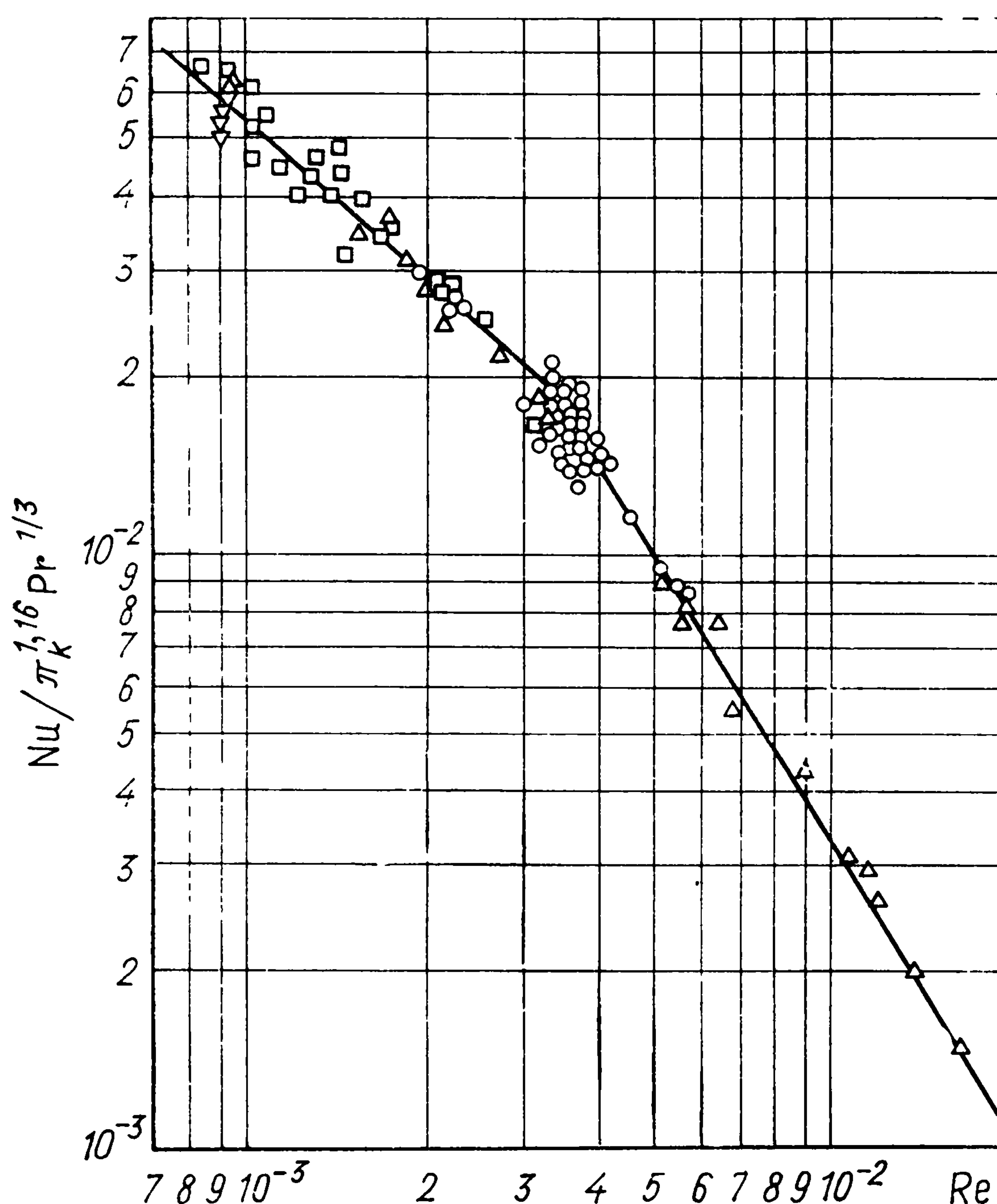



Рис. 19.10 Данные по теплоотдаче при капельной конденсации водяного пара:

□ — $P = (0{,}16 \div 0{,}9)\cdot 10^5$ Па, Гнам; ○ — $P = 0{,}35\cdot 10^5$ Па, Нэгль и др.; △ — $p = (1{,}02 \div 1{,}04)\cdot 10^5$ Па, Ши и Крейз; ▽ — $P = 0{,}12\cdot 10^5$ Па, М.И. Лапшин и И. Я. Конфедератов

действие теплового и динамического пограничного слоев, и критерий фазового перехода, получим

$$\{\mathrm{Nu}=\alpha R_{\text{к}}/\lambda'; \ \mathrm{Re}=w_\sigma R_{\text{к}}/\nu'; \ \mathrm{Pr}=\nu'/a'; \ K=r/(c\Delta T)\}. \quad (19.11.3)$$

На рис. 19.10 дана обработка ряда экспериментальных данных из книги В. П. Исаченко.

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*


1. **Ананьев Е. П., Бойко Л. Д., Кружилин Г. Н.** Теплопередача при конденсации пара в горизонтальной трубе.— В кн.: International Developments in Heat Transfer. Proc. 1961—1962 Heat Transfer Conf. Pt 2. New York, Amer. Soc. Mech. Eng., 1961.
2. **Вопросы** теплообмена при изменении агрегатного состояния вещества. Сб. статей. Под общ. ред. С. С. Кутателадзе. М.— Л., Госэнергоиздат, 1953.
3. **Вопросы** теплоотдачи и гидравлики двухфазных сред. Сб. статей. Под общ. ред. С. С. Кутателадзе. М.— Л., Госэнергоиздат, 1961.
4. **Воскресенский К. Д.** Расчет теплообмена при пленочной конденсации с учетом зависимости физических свойств конденсата от температуры. М., Изд-во АН СССР, ОТК, 1948.
5. **Гогонин И. И., Дорохов А. Р., Сосунов В. И.** Теплоотдача при конденсации пара на пучке гладких горизонтальных труб. — «Теплоэнергетика», 1977, № 4, с 33.
6. **Гогонин И. И., Дорохов А. Р.** Экспериментальное исследование теплообмена при конденсации движущегося пара фреона-21 на горизонтальных цилиндрах. — «Журн. прикл. механ. и техн. физ.», 1976, № 2, с. 133.
7. **Исаченко В. П.** Механизм и критериальные уравнения теплоотдачи при капельной конденсации пара.— «Теплоэнергетика», 1962, № 9, с. 81.
8. **Исаченко В. П.** Теплообмен при конденсации М., «Энергия», 1977.
9. **Капица П. Л.** Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1948, № 1, с. 3.
10. **Кутателадзе С. С.** Теплопередача при конденсации и кипении. М., Машгиз, 1952.
11. **Лабунцов Д. А.** Теплоотдача при пленочной конденсации чистых паров на вертикальных поверхностях в горизонтальных трубах. — «Теплоэнергетика», 1957, № 7, с. 72.
12. **Миропольский З. Л.** Теплоотдача при конденсации пара высокого давления внутри труб.— «Теплоэнергетика», 1962, № 3, с. 79.
13. **Черный Г. Г.** Ламинарные движения газа и жидкости в пограничном слое с поверхностью разрыва.— «Изв. АН СССР, ОТН», 1954, № 12, с. 38.
14. **Черный Г. Г.** Конденсация движущегося пара на плоской поверхности.— «ДАН СССР», 1955, т. 101, № 1, с. 39.
15. **Cess D.** Laminar-films condensation on a flat plate in the absence of a body force.— «Z. Ang. Math. Phys.», 1960, Bd II, S. 426.
16. **Fujii T., Uehara H., Kurata Ch.** Laminar filmwise condensation of flowing vapour on a horizontal cylinder.— «Intern. J. Heat and Mass Transfer», 1972, v. 15, N 2, p. 235—246.
17. **Nusselt W.** Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes. Teil I, II.— «Z. VDI», 1916, N 27, S. 541; N 28, S. 569.

# Глава 20 КОНДЕНСАЦИЯ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

## 20.1. ТЕПЛООБМЕН В СВОБОДНО ПАДАЮЩЕЙ СТРУЕ

В многочисленных теплообменных аппаратах происходит непосредственное соприкосновение пара со струями жидкости. В этом случае повышается скорость конденсации пара и создается возможность значительного развития поверхности охлаждения путем дробления потока жидкости на отдельные тонкие струи и капли. Одновременно при непосредственном соприкосновении с паром жидкость дегазируется, что особенно важно при подготовке питательной воды паровых котлов и других агрегатов.

Теоретическое рассмотрение такой задачи относительно просто в предположении, что струя жидкости является непрерывной на всем расчетном участке, а влиянием пульсаций, обусловленных взаимодействием сил тяжести, инерции и поверхностного натяжения, можно пренебречь. Полученные для этих условий соотношения справедливы от устья сопла до места начала распада струи на капли. В области дробления струи практически приходится ограничиваться только опытом.

Напишем уравнение распространения тепла в цилиндрических координатах, полагая, что в струе имеет место как изотропная турбулентная, так и молекулярная теплопроводность. Кроме того, можно считать, что радиальный градиент температур много больше осевого градиента. При этих условиях уравнение теплопереноса имеет вид

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda + \lambda_T}{c\rho} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} \right). \tag{20.1.1}$$

Введем безразмерные координаты $X = x/R_0$; $\xi = R/R_x$; $\vartheta = (T'' - T)/(T'' - T_1)$. Здесь $w_x$ и $R_x$ — скорость и радиус струи на расстоянии $x$ от устья сопла; $R_0$ и $R$ — радиус сопла и текущий радиус струи; $T_1$ — начальная температура струи. Как обычно, ищем частное решение в виде произведения двух функций:

$$\vartheta = A \exp\left[-\beta^2 f(X)\right] \psi(\xi), \tag{20.1.2}$$

где $A$ и $\beta$ — произвольные постоянные. В изотропном турбулентном потоке интенсивность молярных переносов пропорциональна скорости и линейному размеру струи, т. е.

$$\lambda_T = \varepsilon_* c\rho w_x R_x, \tag{20.1.3}$$

где $\varepsilon_*$ — эмпирический коэффициент*. Подставляя значение $\lambda_T$ из формулы (20.1.3) в уравнение (20.1.1) и приводя уравнение к безразмерному виду, получаем

$$\frac{w_x R_x^2}{R_0 (a + \varepsilon^* w_x R_x)} \frac{\partial \vartheta}{\partial X} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}. \tag{20.1.4}$$

Значение $f(X)$ в формуле (20.1.2) выбираем так, чтобы

$$\frac{d}{dX} f(X) = \frac{R_0 (a + \varepsilon^* w_x R_x)}{w_x R_x^2}. \tag{20.1.5}$$

Выражения для локальной скорости и локального радиуса свободно падающей цилиндрической струи имеют вид

$$w_x = (w_0/\varphi)\sqrt{1 + 2\varphi^2 g x / w_0^2}; \tag{20.1.6}$$

$$R_x = \frac{R_0 \sqrt{\varphi}}{\sqrt{1 + 2\varphi^2 g x / w_0^2}}. \tag{20.1.7}$$

* Аналог коэффициента $\varkappa$ в формулах переноса в неизотропном потоке.

Для площади поверхности струи

$$F = 2\pi \int_0^x R_x\, dx = \frac{4\pi R_0 w_0^2}{3\varphi^{3/2} g}\left[\left(1 + \frac{2\varphi^2 gx}{w_0^2}\right)^{3/4} - 1\right]. \qquad (20.1.8)$$

Скорость струи в месте выхода из сопла определяется формулой

$$w_0 = \varphi\eta\sqrt{2gh}, \qquad (20.1.9)$$

где $\eta$ — коэффициент сопротивления отверстия сопла; $h$ — напор жидкости перед насадкой. Значения коэффициента сужения струи $\varphi$ приводятся в курсах гидравлики. Величина $\eta \simeq 0{,}95$—$0{,}98$.

Для групп отверстий в металлическом листе толщиной $\delta = 1{,}55 \cdot 10^{-3}$ м $\varphi\eta = 0{,}80 \div 0{,}81$ для отверстий диаметром $5 \cdot 10^{-3}$ м и 0,85—0,88 для отверстий диаметром $3 \cdot 10^{-3}$ м.

Подставляя в уравнение (20.1.5) значения $w_x$ и $R_x$, находим, что

$$f(X) = \int_0^x \frac{R_0(a + \varepsilon_* w_x R_x)}{w_x R_x^2}\, dx = \frac{a}{w_0 R_0} X + \frac{2\varepsilon_* w_0^2}{5\varphi^{5/2} g R_0}\left[\left(1 + \frac{2\varphi^2 g R_0}{w_0^2} X\right)^{5/4} - 1\right]. \qquad (20.1.10)$$

При ламинарном течении струи, когда $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\text{кр}}$, $\varepsilon_* = 0$ и

$$f(X) = ax/(w_0 R_0^2). \qquad (20.1.11)$$

Дифференцируя выражение (20.1.2) и подставляя соответствующие производные в уравнение (20.1.4), получаем

$$\frac{d^2\psi(\beta\xi)}{d(\beta\xi)^2} + \frac{1}{\beta\xi}\frac{d\psi(\beta\xi)}{d(\beta\xi)} + \psi(\beta\xi) = 0. \qquad (20.1.12)$$

Решение имеет вид

$$\psi(\beta\xi) = C_1 J_0(\beta\xi) + C_2 Y_0(\beta\xi). \qquad (20.1.13)$$

Граничные условия: $\xi = 1$, $\vartheta = 0$, $\psi(\beta\xi) = 0$. Начальные условия: $x = 0$ $\vartheta = 1$.

При $\xi = 0$, т. е. на оси струи, функция Бесселя нулевого порядка первого рода $J_0$ имеет конечное значение, а функция Бесселя нулевого порядка второго рода $Y_0$ уходит в бесконечность. Следовательно, для того чтобы на оси струи получить конечное значение температуры, необходимо положить константу интегрирования $C_2$ равной нулю. Тогда $\varphi(\beta\xi) = C_1 J_0(\beta\xi)$,

$$\vartheta = \sum A_i J_0(\beta_i \xi)\exp[-\beta_i^2 f(X)] \quad (1 \leqslant i \leqslant \infty). \qquad (20.1.14)$$

Из начальных условий следует, что $\Sigma A_i J_0(\beta_i \xi) = 1$. Как известно, в этом случае $A_i = 2/\beta_i J_1(\beta_i)$.

По таблицам функций Бесселя находим значения $\beta$, при которых* $J_0(\beta_i) = 0$, и определяем $J_0(\beta_i\xi)$ по рис. 20.1.

Средняя температура жидкости в сечении $x$

$$\bar\vartheta_x = 2\int_0^1 \vartheta\xi d\xi = \sum \frac{4}{\beta_i^2}\exp[-\beta_i^2 f(X)] \quad (1 \leqslant i \leqslant \infty). \qquad (20.1.15)$$

Окончательно

$$\bar\vartheta_x = \frac{T'' - \bar T_x}{T'' - T_1} = 0{,}6915\exp[-5{,}78 f(X)] + 0{,}1312\exp[-30{,}47 f(X)] + 0{,}0534\exp[-74{,}87 f(X)] + \ldots \qquad (20.1.16)$$

* Эти вычисления соответствуют первой строке табл. 20.1.

Таблица 20.1

**Значения коэффициентов ряда (20.1.14)**

| $i$ | $\beta_i$ | $A_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 2,405 | +1,605 |
| 2 | 5,520 | —1,060 |
| 3 | 8,653 | +0,850 |
| 4 | 11,791 | —0,730 |
| 5 | 14,931 | +0,647 |

Таблица 20.2

**Значения $\bar{\vartheta}_x$**

| $f$ ($x$) | По формуле (20.1.16) | По формуле (20.1.17) | Расхождение, % |
|---|---|---|---|
| 0,01 | 0,732 | 0,645 | 12 |
| 0,05 | 0,545 | 0,515 | 5 |
| 0,10 | 0,385 | 0,385 | 0 |

В табл. 20.2 дано сопоставление расчетов по формуле (20.1.16) с расчетами по упрощенной формуле, в которой сохранен только первый член ряда:

$$\bar{\vartheta}_x \approx 0{,}691 \exp[-5{,}78 f(X)]. \qquad (20.1.17)$$

Как видно, для большинства практических расчетов упрощенной формулой можно пользоваться уже при $f(X) > 0{,}005$. Логарифмируя выражение (20.1.17), получаем удобное расчетное уравнение

$$\lg \frac{T'' - T_1}{T'' - \bar{T}_x} = 0{,}16 + 2{,}52 f(X). \qquad (20.1.18)$$

На рис. 20.2 приведено сопоставление расчетов по формуле (20.1.18) при значениях $\varepsilon_* = 5 \cdot 10^{-4}$ и $\varphi = 0{,}85$ с результатами опытов, проведенных

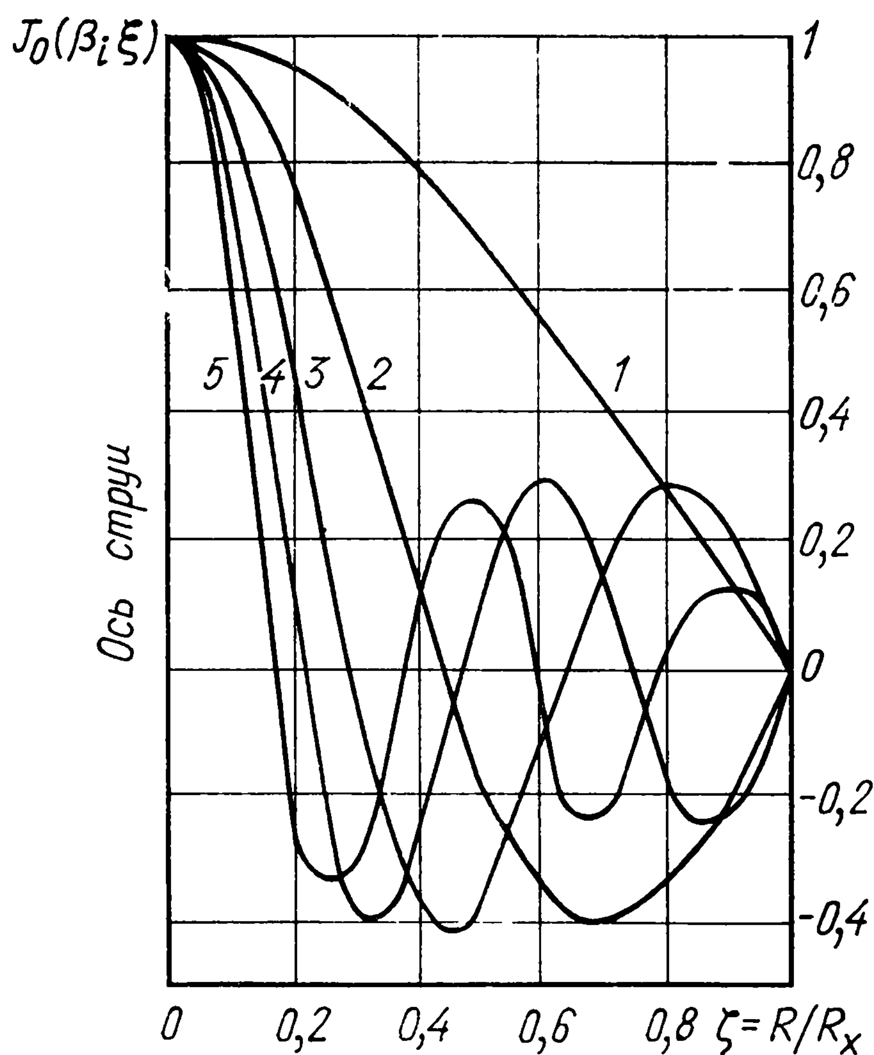



Рис. 20.1. Графики функций $J_0(\beta_i \xi)$ для $i = 1, 2, 3, 4, 5$

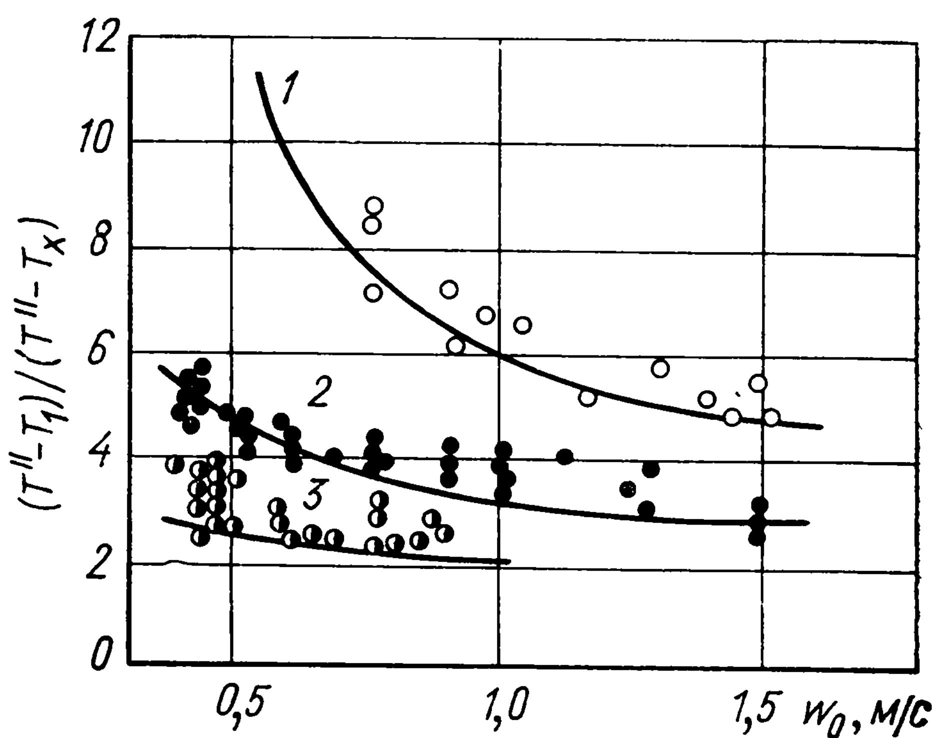



Рис. 20.2. Конденсация пара на струе воды для различных диаметров сопла $D_0$ и длины струи $L$; $p = 98 \cdot 10^3$ Па:

1 — $D_0 = 3{,}0$ мм, $L = 450$ мм; 2 — $D_0 = 5{,}07$ мм, $L = 450$ мм; 3 — $D_0 = 7{,}05$ мм, $L = 300$ мм

А. А. Захаровым и Р. Г. Черной*. Некоторое систематическое отклонение опытных точек вверх от теоретических кривых может быть связано с неустранимым в опытах дополнительным подогревом жидкости в приемной воронке. Кроме того, возможны ограниченные вариации значения в зависимости от устройства насадки, из которой происходит истечение жидкости.

---

* Значение $\varepsilon_*$ вычислено по данным измерений Никурадзе в области потока, где $\mu_T \approx$ $\approx$ const.

В общем виде расчетную формулу (20.1.18) можно записать так:

$$\lg \frac{T''-T_1}{T''-\overline{T}_x} = C_1 + C_2 f(X), \qquad (20\ 1.19)$$

где значения $C_1$, $C_2$ и $f(x)$ определяются по табл. 20.3.

Таблица 20.3

**Значение коэффициентов $C_1$, $C_2$, $f(X)$ для разных форм струи**

| Форма струи | $C_1$ | $C_2$ | $f(X)$ |
|---|---|---|---|
| Свободно падающая цилиндрическая струя | 0,160 | 2,52 | $\frac{ax}{w_0 R_0^2} + \frac{2\varepsilon_* w_0^2}{5\varphi^{5/2} g R_0}\left[\left(1+\frac{2\varphi^2 gx}{w_0^2}\right)^{5/4} - 1\right]$ |
| Свободно падающая плоская струя | 0,092 | 1,075 | $\frac{4w_0^2}{3\varphi^3 g\delta_0}\left(\frac{a}{w_0\delta_0}+\frac{\varepsilon_*}{2}\right)\left[\left(1+\frac{2\varphi^2 gx}{w_0^2}\right)^{3/2} - 1\right]$ |
| Плоская односторонне обогреваемая струя постоянной толщины | 0,092 | 1,075 | $\left(\frac{a}{w_0\delta_0}+\frac{\varepsilon_*}{2}\right)\frac{x}{\delta_0}$ |

## 20.2. КОНДЕНСАЦИЯ НА СТРУЕ, ВТЕКАЮЩЕЙ В ПАРОВОЕ ПРОСТРАНСТВО С БОЛЬШОЙ СКОРОСТЬЮ

Условие отсутствия заметного изменения скорости струи на ее границе с паром выполняется только при малых относительных скоростях течения фаз. При больших скоростях трение струи о пар создает пограничный слой с сильно меняющимися скоростями. В таком слое коэффициент турбулентной теплопроводности становится переменным по сечению струи, и интенсивность теплообмена начинает резко возрастать.

Г. Н. Абрамовичем и А. П. Проскуряковым была рассмотрена такого рода задача, причем в решении учитывалось термическое сопротивление только образующегося пограничного слоя в жидкой струе, но не ядра струи.

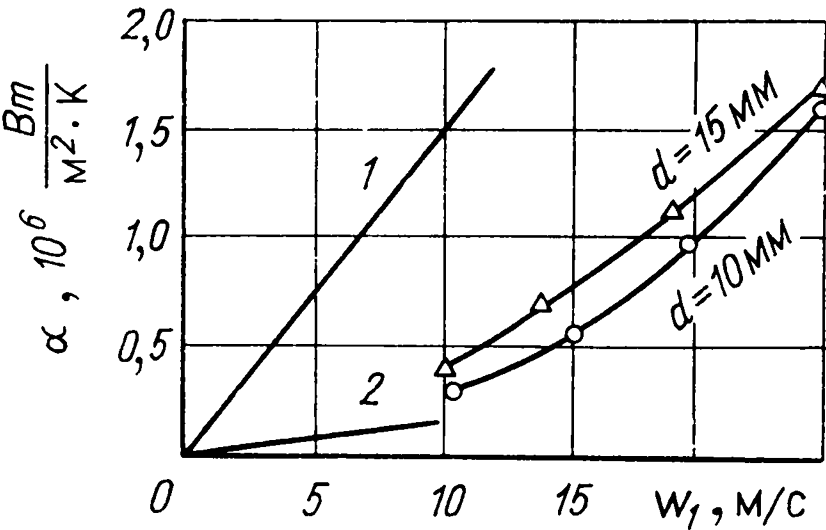



Рис. 20.3. Зависимость условного коэффициента теплоотдачи от скорости истечения струи воды в паровое пространство ($p=98\cdot10^3$ Па, $L=800$ мм): *1* — расчет по формуле (20.2.1); *2* — по формуле (20 1.18)

Полученное этими авторами решение имеет вид

$$\alpha = 324\, c\rho w_1 \Phi(K), \qquad (20.2.1)$$

где

$$K = r/[c\,(T'' - T')].$$

Значения функций $\Phi(K)$ приводятся ниже:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K$ ....... | 500 | 150 | 62,5 | 32,2 | 18,9 | 8,14 | 4,30 |
| $\Phi(K)$ ..... | 0,100 | 0,149 | 0,198 | 0,246 | 0,288 | 0,370 | 0,423 |

Это решение неприменимо при малых скоростях истечения струи и больших значениях $K$ (т. е. при $T_1 \to T''$), поскольку при этих условиях по формуле (20.2.1) $\alpha \to 0$.

Н. М. Зингером были проведены опыты со струями, вытекающими в паровое пространство со скоростями 10—25 м/с. Измерения полей температур

на различных расстояниях от сопла показали, что имеет место значительная деформация поля температур, связанная, в частности, с нарушением сплошности жидкой струи.

Как видно из рис. 20.3, опытные данные лежат между расчетами по формулам (20.1.8) и (20.2.1), поскольку первая из этих формул, относящаяся к малым скоростям, не учитывает интенсификации теплообмена в пограничном слое, а вторая — значительного термического сопротивления ядра струи.

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*

1. **Абрамович Г. Н.** Турбулентные свободные струи жидкостей и газов. М.—Л., Госэнергоиздат, 1948.
2. **Вопросы** теплообмена при изменении агрегатного состояния вещества. Сб. статей под общ. ред. С. С. Кутателадзе. М.—Л., Госэнергоиздат, 1953.
3. **Кутателадзе С. С.** Теплопередача при конденсации и кипении. М., Машгиз, 1952.

*Глава* 21

# ТЕПЛООТДАЧА ПРИ КИПЕНИИ ОДНОРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

## 21.1. ДВА ОСНОВНЫХ РЕЖИМА КИПЕНИЯ

Кипением называется процесс парообразования в толще жидкости. Кипение начинается тогда, когда температура внутри жидкости оказывается выше температуры насыщения (кипения) при данном давлении. Если в жидкость погружена некоторая поверхность нагрева, температура которой выше температуры насыщения при данном давлении ($T_{ст} > T''$), то на ней возникает процесс парообразования. Величина перегрева жидкости в момент вскипания по сравнению с температурой насыщения при данном давлении над плоскостью зависит от наличия тех или иных потенциальных центров парообразования (микровпадины, микропузырьки газа, искусственные неоднородности на поверхности нагрева и т. п.). Эти эффекты имеют значение при малых плотностях теплового потока. Если вся жидкость значительно перегрета против температуры насыщения (например, в результате резкого сброса давления,) то паровые пузыри образуются по всей ее толще—жидкость вскипает во всем занимаемом ею объеме.

В зависимости от плотности теплового потока, подводимого к жидкости через поверхность нагрева, на последней возникают отдельные паровые пузыри или образуется сплошной слой пара. Первый процесс называется *пузырьковым кипением*, второй — *пленочным*. При пузырьковом кипении жидкость

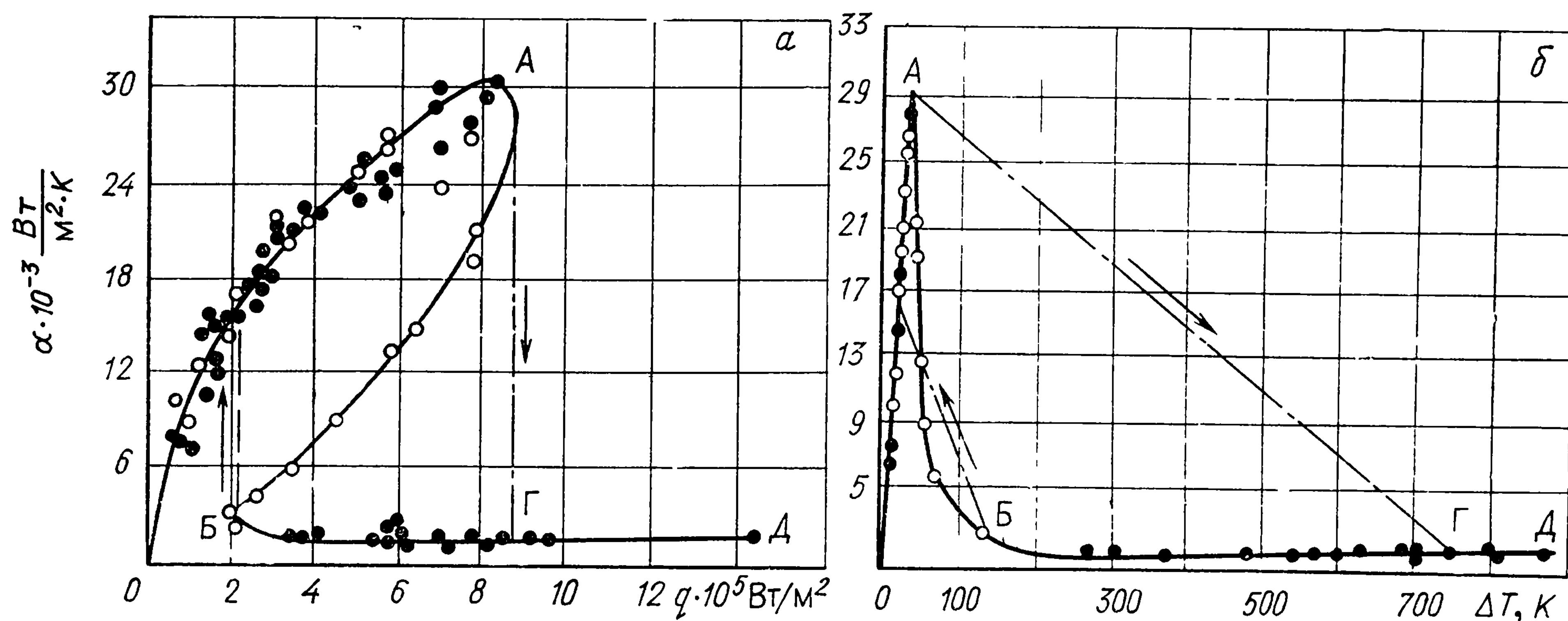



Рис. 21.1. Зависимость теплоотдачи от теплового потока (*а*) и температурного напора (*б*) при кипении в большом объеме воды

непосредственно омывает поверхность нагрева, причем ее пограничный слой интенсивно разрушается (турбулизуется) возникающими паровыми пузырями. Кроме того, всплывающие пузыри увлекают из пристенного слоя в ядро потока присоединенную массу перегретой жидкости, что создает интенсивный молярный перенос теплоты от поверхности нагрева к массе кипящей жидкости. Следствием этого является высокая интенсивность теплоотдачи при пузырьковом кипении, возрастающая с увеличением числа действующих центров парообразования и количества образующегося пара.

При пленочном кипении жидкость отделена от поверхности нагрева слоем пара, с внешней стороны которого время от времени отрываются и всплывают крупные пузыри. Вследствие относительно малой теплопроводности парового слоя интенсивность теплоотдачи при пленочном кипении существенно меньше, чем при пузырьковом.

Возникновение того или иного вида кипения определяется плотностью теплового потока у поверхности нагрева, ее физическими свойствами (в частности, смачиваемостью), физическими свойствами жидкости и гидродинамическим режимом потока в целом.

Условия перехода от одного режима (вида) кипения к другому и области их существования отчетливо выявляются при построении зависимости коэффи-

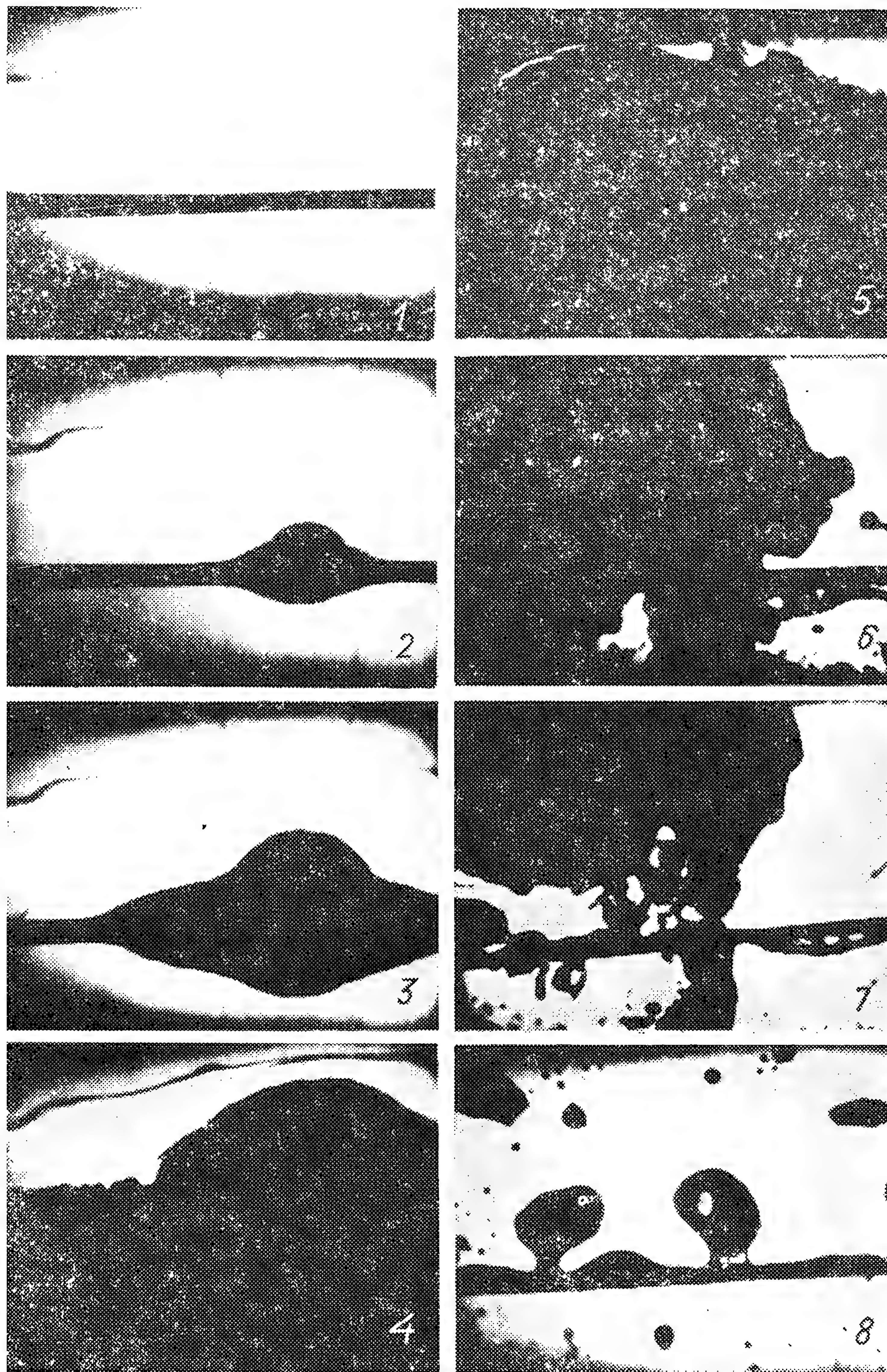



Рис. 21.2. Переход от однофазной конвекции к пленочному кипению (бензол, диаметр нагревателя 1,5 мм, $p=0{,}1\cdot10^5$ Па, $q=1{,}5\cdot10^5$ Вт/м²)

циента теплоотдачи от плотности теплового потока, или разности температур поверхности нагрева и насыщения: $\Delta T = T_{\text{ст}} - T''$.

На рис. 21.1, *а* показана типичная зависимость коэффициента теплоотдачи от плотности теплового потока при кипении в условиях свободной конвекции на поверхности с большим количеством вероятных центров парообразования. Левая, круто возрастающая ветвь кривой *ОА* выражает закон теплоотдачи при

пузырьковом кипении, нижняя ветвь *БД* — при пленочном. Кривая *АБ* соответствует переходному режиму.

Как видно из рис. 21.1, *б*, при постепенном увеличении теплового потока, задаваемого независимо от процесса теплообмена в кипящей жидкости (радиоактивный распад, электрообогрев и т. п.), по достижении точки *А* пузырьковое кипение скачкообразно сменяется пленочным (линия *АГ*). Возврат к пузырьковому кипению обычно происходит при значительно меньшем тепловом потоке, чем при пленочном кипении. Этому переходу соответствует область около точки *Б*.

Таким образом, имеет место определенный гистерезис в тепловых и гидродинамических явлениях, связанных с переходом от одного режима кипения к другому. Приходится говорить о двух критических плотностях теплового потока: $q_{кр_1}$, при которой происходит переход от пузырькового кипения к пленочному, и $q_{кр_2}$, при которой происходит разрушение сплошного парового слоя и восстановление пузырькового режима кипения. В области значений плотности теплового потока, лежащих между $q_{кр_1}$ и $q_{кр_2}$ (т. е. между точками *А* и *Б*, см. рис. 21.1, *а*), возможно устойчивое существование обоих режимов кипения или даже их длительное совместное сосуществование на разных частях одной и той же поверхности нагрева.

Паровая пленка обычно возникает в отдельных местах поверхности нагрева при достижении значений $q \gtrsim q_{кр_1}$ и далее с конечной скоростью распространяется по всей поверхности нагрева. Аналогично при снижении теплового потока до значений $q \lesssim q_{кр_1}$ происходят локальные разрушения пленки с последующим распространением пузырькового кипения на всю поверхность нагрева.

На поверхностях нагрева, обедненных центрами парообразования, процесс кипения имеет нестабильный характер, а интенсивность теплообмена колеблется между условиями конвекции однофазного потока и развитого пузырькового кипения (рис. 21.2). При этом возможен непосредственный переход от однофазной конвекции жидкости к режиму пленочного кипения.

Нормальный процесс перехода от пузырькового кипения к пленочному впервые был изучен экспериментально Никайямой. Процессы нестабильного кипения впервые детально были изучены в работах В. И. Субботина и Д. Н. Сорокина, С. С. Кутателадзе, Н. Н. Мамонтовой и Б. П. Авксентюка.

### 21.2. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ

Температура жидкости и пара вблизи раздела фаз равна температуре фазового превращения (насыщения), соответствующей давлению в данной точке (с учетом кривизны границы раздела фаз).

При пузырьковом кипении, когда поверхность нагрева непосредственно омывается жидкостью, основное падение температуры происходит в тонком пристенном слое жидкости. В этом случае вследствие высокой интенсивности теплоотдачи конвектирующей жидкости и малой теплопроводности пара можно считать, что практически все тепло передается от поверхности нагрева к жидкости, а затем уже паровым пузырям путем испарения в них жидкости.

При пленочном кипении тепло передается непосредственно пару, находящемуся в слое, отделяющем жидкость от поверхности нагрева, и далее идет на испарение жидкости с границы раздела фаз. Таким образом, в паровом слое устанавливается непрерывное поле, изменяющееся от температуры поверхности нагрева до температуры насыщения.

Изложенное хорошо иллюстрирует то обстоятельство, что при теплообмене, сопровождающемся изменением агрегатного состояния, температурный напор может существовать в любой из фаз, как в возникающей (в данном случае пар), так и в исчезающей (в данном случае жидкость).

В ряде случаев (закалка, непрерывное литье металлов, охлаждение двигателей и т. п.) поверхность нагрева может иметь температуру, существенно бо́льшую температуры насыщения, хотя основная масса охлаждающей жидко-

сти остается недогретой до этой температуры. В таком случае имеется некоторая изотермическая поверхность, по одну сторону которой жидкость перегрета, а по другую недогрета до температуры насыщения. Первая область называется *кипящим граничным слоем*, вторая — *холодным ядром потока*. В первой происходит парообразование, во второй — конденсация пара.

## 21.3. ПУЗЫРЬКОВОЕ КИПЕНИЕ, ЧАСТОТА И СКОРОСТЬ РОСТА ПАРОВЫХ ПУЗЫРЕЙ

При пузырьковом кипении паровые пузыри возникают в отдельных местах поверхности нагрева — центрах парообразования. Вырастая до определенного размера, паровые пузыри отрываются и всплывают в толще жидкости, образуя над центром парообразования столбы пара. При этом перегрев основной массы жидкости весьма невелик (порядка 0,01—0,1° С). Поэтому при наличии на поверхности нагрева или в объеме жидкости достаточного числа центров парообразования кипение практически начинается по достижении поверхностью нагрева температуры, на десятые доли градуса превышающей температуру насыщения жидкости при данном давлении. Однако если поверхность обеднена центрами парообразования, жидкость в сосуде может быть значительно перегрета. Например, в гладкой, хорошо промытой стеклянной колбе дистиллированная и дегазированная вода может быть легко нагрета до 115—120° С при атмосферном давлении, а при особой тщательности опыта и более 200° С.

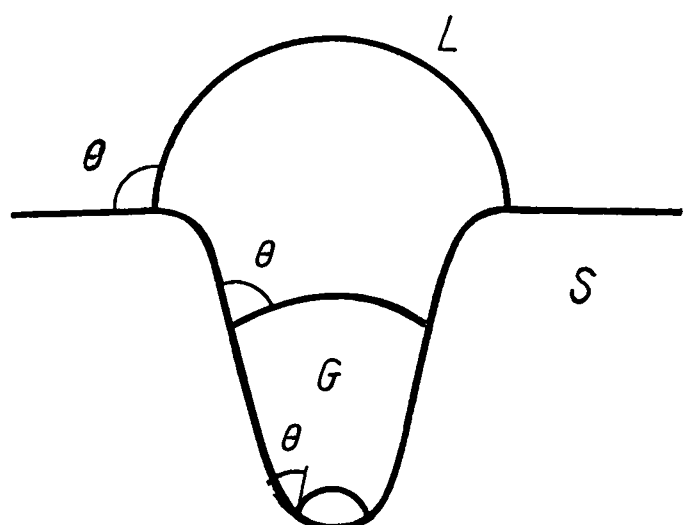


Рис. 21.3. Схема образования пузыря в несмачиваемой впадине

Перегретая жидкость при введении в нее предметов, которые могут служить центрами парообразования (песчинки, пузырьки воздуха и т. п.), мгновенно вскипает, образуя в начале процесса большие пузыри пара, и ее температура снижается до нормального уровня. Обнаруживается также влияние материала поверхности нагрева на температуру закипания чистой жидкости. Установлено, что центрами парообразования являются микроуглубления в поверхности нагрева, заполненные воздухом или другим газом. Схемы возникновения парового пузыря в микроуглублении показаны на рис. 21.3 по Бэнкову. Если рассмотреть идеализированную схему возникновения паровой фазы в жидкости, заполняющей коническую впадину, то радиус возникающей границы раздела фаз

$$R = R_1/\cos(\theta - \beta). \qquad (21.3.1)$$

Здесь $R_1$ — радиус конуса на линии соприкосновения стенки, жидкости и пара; $\theta$ — угол смачивания; $\beta$ — угол раскрытия конуса.

В свою очередь, краевой угол связан с коэффициентом поверхностного натяжения на границах пар—жидкость, пар—стенка и жидкость—стенка формулой

$$\sigma\cos\theta = \sigma''_{ст} - \sigma'_{ст}. \qquad (21.3.2)$$

Вероятность образования паровой фазы в результате флуктуации плотности в некоторой точке перегретой жидкости определяется известной формулой статистической физики

$$\omega \propto \exp[-\pi T''\sigma^3/k(r\rho''\Delta T)^2]. \qquad (21.3.3)$$

Здесь $k$ — постоянная Больцмана; $\Delta T$ — перегрев жидкости против температуры насыщения над плоской поверхностью раздела фаз. Минимальный перегрев жидкости должен соответствовать температуре насыщения над поверхностью раздела фаз данной кривизны.

Превышение давления в пузыре определяется формулой (5.4.5), т. е. для сферической поверхности

$$\Delta p_{\text{гр}} = 2\sigma/R. \tag{21.3.4}$$

Кроме того, кривизна поверхности раздела вызывает изменение температуры насыщения по сравнению с $T''$ над плоскостью при том же давлении, соответствующее разности давлений

$$\Delta p'' = \frac{\rho''}{\rho' - \rho''} \Delta p_{\text{гр}}. \tag{21.3.5}$$

Отсюда равновесная температура насыщения в паровом пузыре радиуса $R$

$$T''_R = T'' + \frac{dT''}{dp} (\Delta p_{\text{гр}} + \Delta p'') = T'' + \frac{dT''}{dp} \frac{2\sigma\rho'}{R(\rho' - \rho'')}. \tag{21.3.6}$$

По известной термодинамической зависимости

$$dT''/dp = T''(\rho' - \rho'')/(r\rho'\rho''). \tag{21.3.7}$$

Отсюда минимальный радиус возникающего пузыря равен

$$R_{\text{мин}} = \frac{2\sigma\rho'}{\Delta T(\rho' - \rho'')} \frac{dT''}{dp} = \frac{2T''\sigma}{r\rho''\Delta T}. \tag{21.3.8}$$

Теоретическое значение перегрева при возникновении кипения по формуле (21.3.8) вполне удовлетворительно согласуется с опытами Гриффитса и Уоллеса (рис. 21.4). На рис. 21.5 показан характер распределения числа действую-

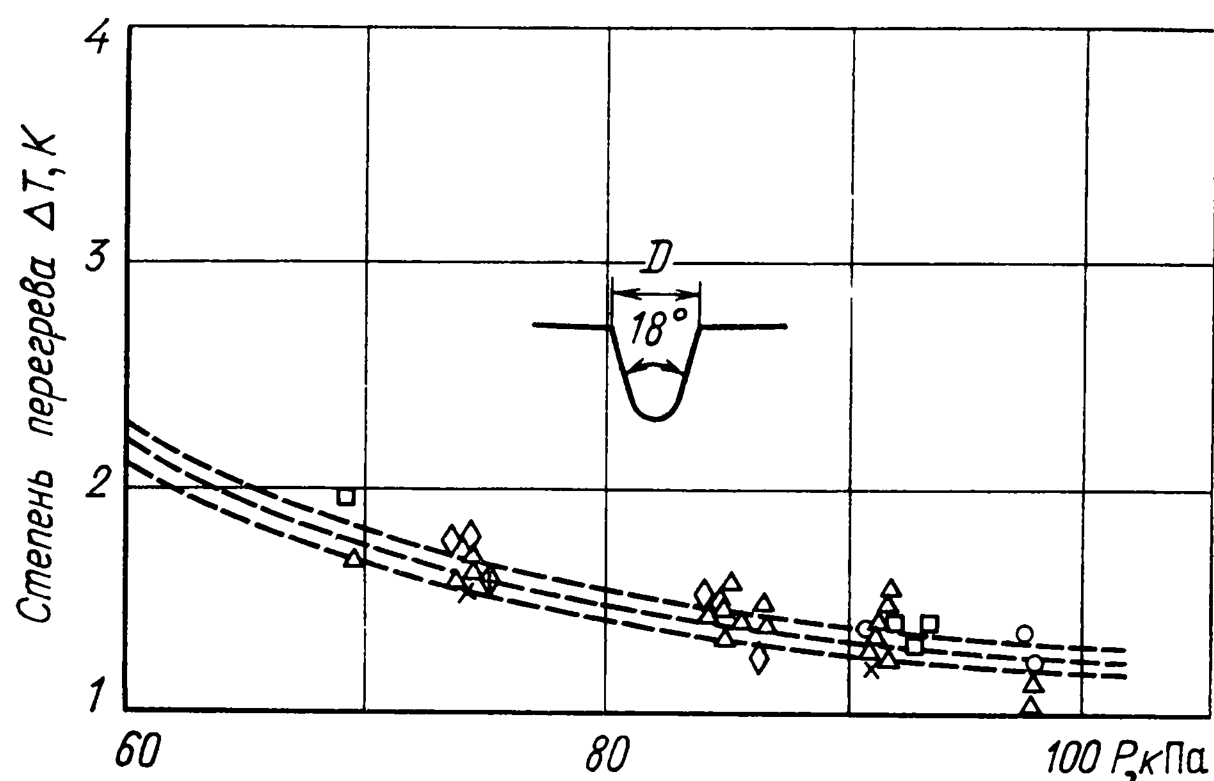



Рис. 21.4. Сопоставление теоретических и экспериментальных значений степени перегрева при пузырьковом кипении. Средняя линия проведена по уравнению (21.3.8) для $D$=0,0482 мм, две другие дают погрешность при вероятной (оценочно) ошибке измерения диаметра устья впадины, равной $2{,}54 \cdot 10^{-3}$ мм; верхняя линия для $D$=0,0456 мм, а нижняя для $D$=0,0508 мм:

□ — установившаяся скорость образования пузырей; △ — скорость от 5 до 1/5 $с^{-1}$; ◇ — скорость меньше 1/5 $с^{-1}$; + — «мертвая» впадина; ○ — прекращение процесса образования пузырей; × — начало этого процесса

щих центров парообразования $n$ по частотам возникновения паровых пузырей по опытам Л. М. Зысиной-Моложен. Максимумы на кривых соответствуют наиболее вероятной частоте образования пузырей при данных конкретных условиях (состояние поверхности нагрева, тепловой поток, давление, физические свойства жидкости). Эти кривые наглядно иллюстрируют статистическую природу пузырькового кипения.

На рис. 21.6 приведены схемы развития отдельных пузырей на горизонтальной поверхности нагрева. Как видно, не существует четкой геометрии тройного контакта паровой, жидкой и твердой компонент системы поверхность на-

грева — кипящая жидкость. Значительная часть пара проникает в пузырь из тонкой жидкой подложки, остальная часть — за счет испарения по внешнему контуру пузыря. Имеется значительное количество исследований этого процесса, обзор которых можно найти в монографиях Кумо, Ван-Оверкерка, статьях Фритца, Плессета, Фостера, Н. Н. Мамонтовой и др.

Можно рассмотреть два предельных случая. Когда тепло подводится из массы жидкости нестационарной теплопроводностью, автомодельной относительно линейного размера системы. Тогда из анализа размерностей сразу следует известное соотношение

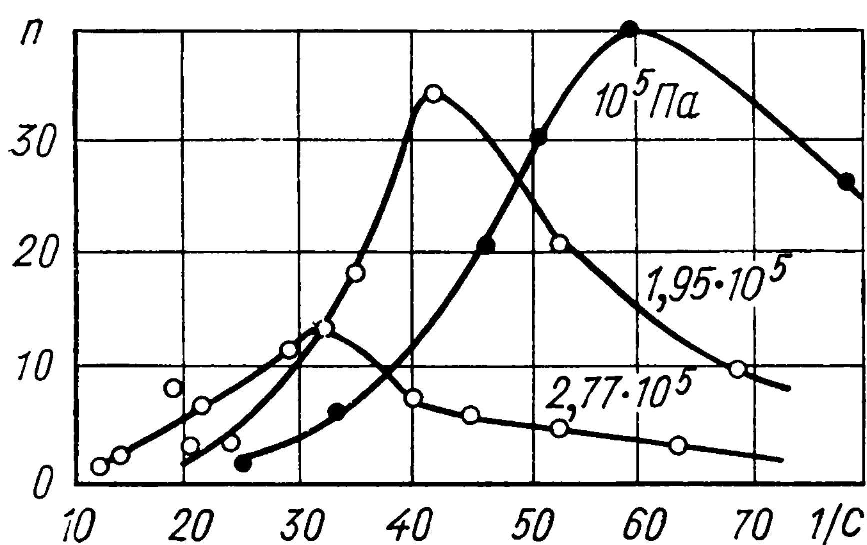



Рис. 21.5. Распределение числа действующих центров парообразования по частотам возникновения паровых пузырей

$$q_{\text{гр}} \sim \Delta T \sqrt{\lambda c \rho' / t}. \qquad (21.3.9)$$

Строго говоря, это рассмотрение относится к пузырю, растущему внутри объема перегретой жидкости. При росте парового пузыря на поверхности нагрева значительная часть тепла подводится через тонкую жидкую подложку. Д. А. Лабунцов рассмотрел эту задачу в квазистационарном приближении. Полагая, что толщина жидкой подложки пропорциональна радиусу пузыря, можем написать

$$(\lambda/R)\, R^2\, \Delta T dt \sim r\rho''\, R^2\, dR, \qquad (21.3.10)$$

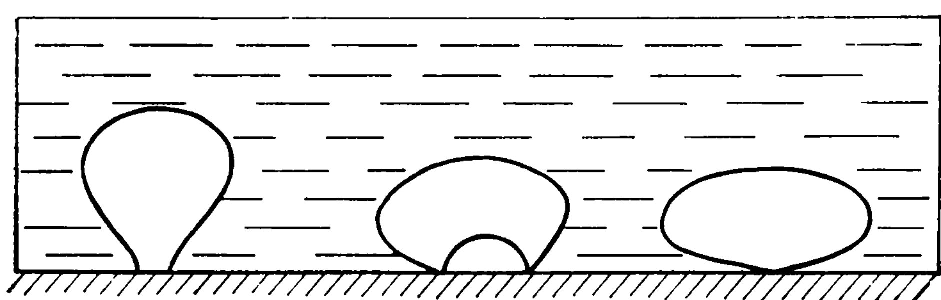


Рис. 21.6. Схемы формообразования пузырей на горизонтальной поверхности нагрева

откуда следует

$$R = \beta_* \sqrt{\lambda \Delta T t / (r\rho'')}. \qquad (21.3.11)$$

Коэффициент $\beta_*$ зависит от угла смачиваемости поверхности нагрева и для обычных пар стенка —жидкость равен примерно 3,5. Время формирования пузыря до отрывного радиуса по этой модели равно

$$t_0 = \frac{r\rho''}{\lambda \Delta T}\left(\frac{R_0}{\beta_*}\right)^2. \qquad (21.3.12)$$

Масштабом скорости роста пузырей может служить произведение отрывного диаметра пузыря и частоты его образования:

$$D_0 U = 2\bar{q}_{\text{гр}} / (\psi r \rho''), \qquad (2.1.3.13)$$

где $D_0 = 2R_0$ — диаметр пузыря в момент отрыва от поверхности нагрева; $U$ — частота образования пузырей на данном центре генерации пара; $\psi < 1$ — коэффициент, учитывающий время омывания поверхности нагрева жидкостью между моментом отрыва одного пузыря и моментом зарождения следующего пузыря.

По модели (21.3.12), с точностью до коэффициента $\psi$,

$$[D_0 U] \sim [R_0/t_0] \sim [\lambda \Delta T / (r\rho'' R_0)]. \qquad (21.3.14)$$

Отрывной диаметр пузыря определяется моментом наступления равновесия подъемной силы, силы поверхностного натяжения (прилипания) и динамического воздействия потока. Последнее слагается из гидродинамического сопротивления и воздействия инерции присоединенной к движению границы раздела фаз массы жидкости.

При росте пузыря на горизонтальной плите, помещенной в большом объеме непроточной жидкости, уравнение равновесия сил в момент отрыва в первом приближении можно записать в следующем виде:

$$(\pi/6)[D_0^3\, g\, (\rho' - \rho'')] \approx (\pi/3)\, \zeta D_0^2\, \rho' \, (dR/dt)^2_{R_0} + \varphi(\theta)\, \pi D_0\, \sigma. \qquad (21.3.15)$$

Здесь $R$ — текущий радиус пузыря; $\zeta$ — эффективный коэффициент гидродинамического сопротивления росту пузыря; $\sigma$ — коэффициент поверхностного натяжения; $\varphi(\theta)$ — некоторая функция краевого угла смачивания $\theta$. Первый член этого уравнения представляет собою архимедову силу, отрывающую пузырь от стенки, второй член — гидродинамическое сопротивление движению пузыря и третий — силу поверхностного натяжения, прижимающую ножку пузыря к стенке. Отсюда

$$\widetilde{D}_0 \approx (3\zeta/16)\,\mathrm{Fr} + \sqrt{(9\zeta^2/246)\,\mathrm{Fr}^2 + 6\varphi(\theta)}, \qquad (21.3.16)$$

где в данном случае

$$\mathrm{Fr} = \left(\frac{dR}{dt}\right)^2_{R_0} \sqrt{\frac{\rho'}{g\sigma(1-\rho''/\rho')}}\,;$$

$$\widetilde{D}_0 = D_0\sqrt{g(\rho'-\rho'')/\sigma}.$$

При $\mathrm{Fr} \to 0$ по вычислениям Фритца для гладкой поверхности можно принять

$$\sqrt{6\varphi(\theta)} \approx 0{,}02\theta, \qquad (21.3.17)$$

если угол $\theta$ выражен в градусах.

Из выражения (21.3.14) видно, что скорость роста пузыря на стенке увеличивается обратно пропорционально плотности пара, т. е. с уменьшением давления. Вследствие этого в соответствии с формулой (21.3.16) при кипении под давлением меньше атмосферного наблюдается резкое увеличение отрывных диаметров паровых пузырей и существенное изменение частоты их образования.

При значительном вакууме пузырьковое кипение на гладких поверхностях отсутствует, а за режимом свободной конвекции жидкости непосредственно возникает пленочное кипение.

На рис. 21.7 отчетливо видна линейная зависимость между величинами $\widetilde{D}_0$ и Fr при достаточно больших значениях последнего критерия. Здесь в число Фруда подставлялась средняя скорость роста пузырей, т. е.

$$w_0 = D_0 u/(1-\psi). \qquad (21.3.18)$$

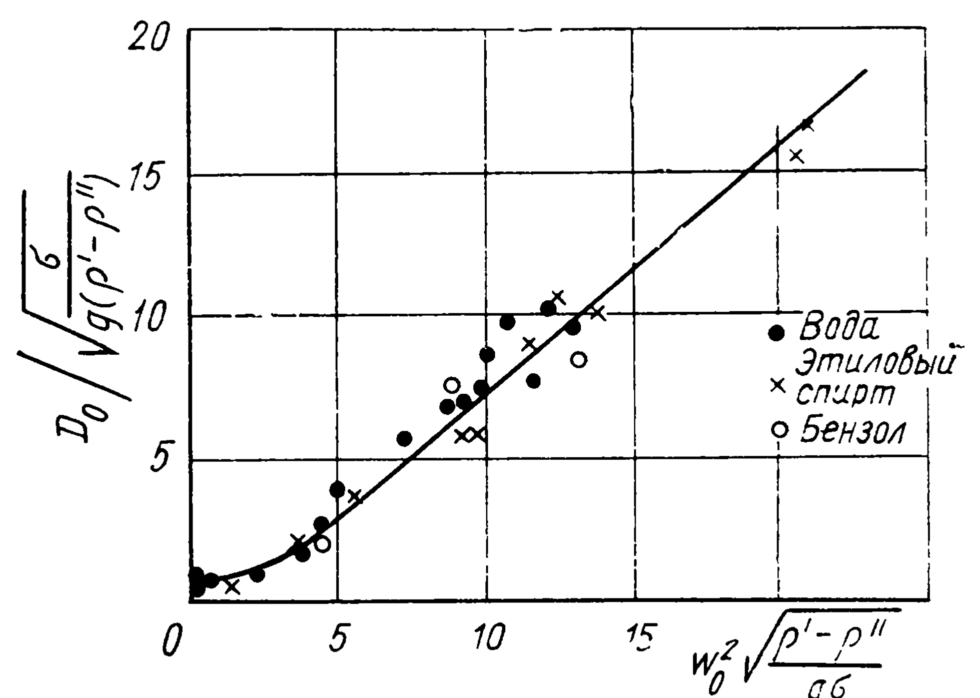



Рис. 21.7. Зависимость $D_0$ от Fr по опытным данным Н. Н. Мамонтовой ($p$=9,8·10³ — 9,8·10⁴ Па)

Скорость роста паровых пузырей является некоторой характеристикой гидродинамического режима в пристенном слое кипящей жидкости, поскольку процесс роста паровых пузырей создает интенсивную турбулизацию жидкости около поверхности нагрева, на что впервые указал Якоб.

Однако следует иметь в виду, что критерии, содержащие в себе величину $\overline{D_0 u}$, не являются независимыми безразмерными аргументами, поскольку скорость роста паровых пузырей не входит в условия однозначности процесса парообразования, а является одной из основных его функций.

## 21.4. ХАРАКТЕР ДВИЖЕНИЯ ПАРОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ В ТРУБАХ

При кипении на поверхности нагрева, погруженной в большой объем жидкости, паровые пузыри, отрываясь, поднимаются в толще жидкости к зеркалу испарения (т. е. к свободному уровню кипящей жидкости). Движение пузырей имеет вероятностный характер (рис. 21.8), а осредненный закон всплытия показан на рис. 21.9.

При числах $Re = 2Rw''/\nu < 2$ для тщательно очищенной жидкости по формуле Адамара—Рыбчинского

$$w = \frac{2g(\rho' - \rho'') R^2}{3\mu} \frac{1 + \mu''/\mu}{2 + 3\mu''/\mu}; \tag{21.4.1}$$

для технически чистой жидкости по формуле Стокса для твердых тел (что связано с упрочением поверхностной пленки имеющимися в жидкости примесями)

$$w'' = 2g(\rho' - \rho'') R^2/9\mu. \tag{21.4.2}$$

Для $Re \geqslant 400$ и $\rho' \gg \rho''$ по формуле, предложенной И. Г. Маленковым:

$$w'' = \sqrt{\frac{\sigma}{R\rho'} + gR}. \tag{21.4.3}$$

При кипении внутри труб активное взаимодействие фаз распространяется по всему сечению потока и гидродинамическая картина течения существенно осложняется.

Если расположение труб вертикальное, то осредненное движение параллельно вектору силы тяжести и симметрично относительно оси трубы. Возникающие в этом случае колебания плотности парожидкостной смеси в радиальном направлении связаны только с турбулентными пульсациями.

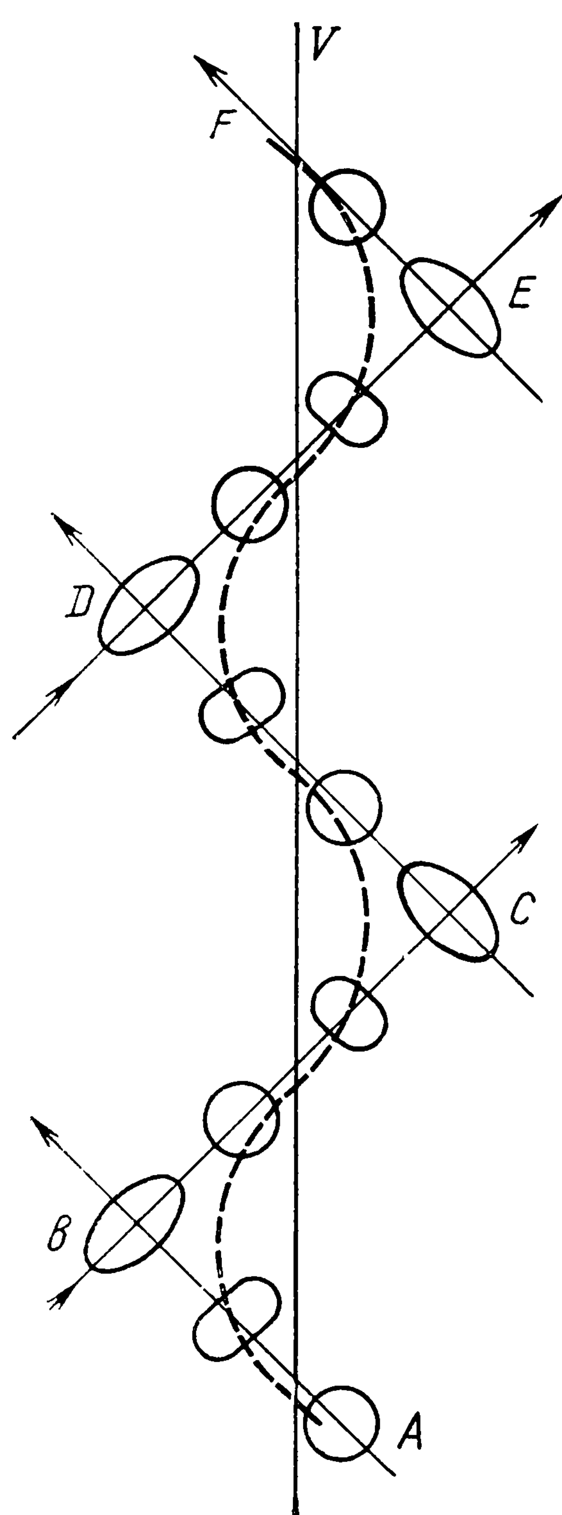


Рис. 21.8. Характер движения одиночного пузыря в жидкости

Если жидкость смачивает стенку трубы, то вдоль последней всегда течет жидкий пристенный слой. Толщина этого слоя определяется условиями равновесия между количеством жидкости, притекающей из ядра, и количеством жидкости, срываемой потоком и испаряемой за счет теплопередачи от трубы.

При обогреве образующиеся паровые пузыри отрываются от стенки трубы и увлекаются общим движением в ядро потока. Для очень малых паросодержаний смеси пар движется в виде цепочек отдельных пузырей. По мере увеличения паросодержания потока отдельные пузыри сливаются, возникают пузыри большого размера с обтекаемой лобовой и вогнутой кормовой областями (паровые «снаряды»). Такие «снаряды» иногда могут достигать нескольких метров в длину и занимать почти все поперечное сечение трубы. В дальнейшем в центре трубы образуется сильно перемешанная парожидкостная смесь (эмульсия). При еще больших паросодержаниях эмульсия исчезает и четко выделяется сплошная граничная пленка жидкости, движущаяся по стенке трубы. В этом случае центральная паровая струя содержит заметное количество мелко раздробленной жидкости.

Вблизи критического давления в связи с резким уменьшением поверхностного натяжения основным режимом течения смеси является эмульсионный.

Когда жидкость не прилипает к стенке трубы (ртуть в стальной или стеклянной трубе и т. п.), картина резко меняется. В этом случае паровые пузыри прорываются между потоком жидкости и трубой, образуя при достаточном паросодержании отчетливо выраженную паровую муфту, в центре которой, сильно пульсируя, течет жидкая струя.

В случае движения парожидкостной смеси в горизонтальных или слабо наклоненных трубах для небольших паросодержаний и скоростей течения жидкости последняя концентрируется главным образом в нижней части трубы.

Это обстоятельство вызывает ухудшение омывания верхней части трубы и существенную асимметрию температурного поля.

Ряд гидродинамических явлений в газо-жидкостной смеси существенно зависит от сжимаемости ее компонент даже при весьма малых скоростях **течения.** Связано это с особенностями распространения упругих возмущений (звука)

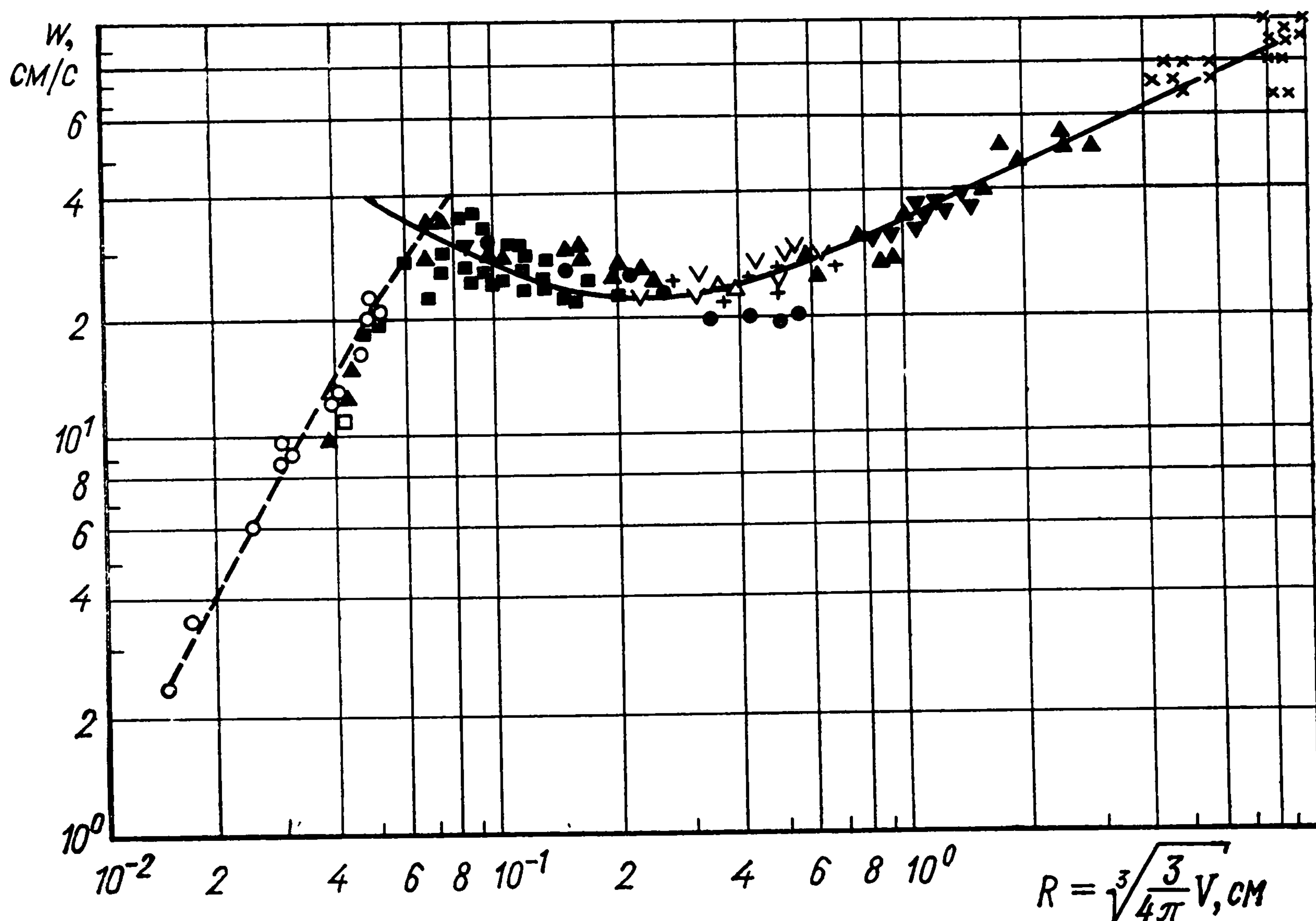



**Рис. 21.9. Зависимости скорости всплытия в воде одиночного воздушного пузыря от его диаметра при $p=10^5$ Па:**

точки — опытные данные различных авторов; ——— — расчет по формуле (21.4.3)

в таких средах. Так, для смеси с равномерно распределенными малыми газовыми включениями масштаб скорости распространения звука определяется формулой

$$a^{-2}=\partial\rho/\partial p=\tilde{\rho}''\left\{\left[1-\beta\left(1-\tilde{\rho}''\right)\right]\left[\beta a''^{-2}+(1-\beta)\tilde{\rho}''a'^{-2}\right]\right\}, \qquad (21.4.4)$$

где $\tilde{\rho}''=\rho''/\rho'$; $a'$, $a''$ — изотермические скорости распространения звука в жидкости и газе; $\beta$ — объемное газосодержание смеси. При $\rho'\gg\rho''$

$$a^2\sim p/\rho'. \qquad (21.4.5)$$

В реальных условиях имеет место большая дисперсия и скорость распространения тех или иных упругих возмущений в газожидкостной смеси может иметь порядок, соизмеримый со скоростью распространения капиллярных волн и со скоростью течения, обусловленной процессом парообразования.

Для области существования зависимости (21.4.5) можно образовать критерий подобия (предложен автором в 1949 г.)

$$K_p=p/\sqrt{g\rho'\sigma}. \qquad (21.4.6)$$

В более общем случае в качестве характеристик сжимаемости смеси следует ввести два параметра:

$$\left\{M_*^2=\sqrt{g\sigma/\rho'}/a''^2;\quad a''/a'\right\}. \qquad (21.4.7)$$

В приближении идеального газа квадрат изотермической скорости звука равен отношению давления к плотности и

$$M_*^{-1}=(\rho'/\rho'')\,K_p. \qquad (21.4.8)$$

Подробно гидродинамика газо-жидкостных систем рассмотрена в монографиях С. С. Кутателадзе и М. А. Стыриковича, Уоллеса и др.

При рассмотрении пленочной конденсации формулировка уравнений, описывающих движение и теплообмен в двухфазной системе, не вызывала принципиальных затруднений, поскольку обе фазы образовывали непрерывные потоки с одной отчетливо выраженной поверхностью раздела. Кипение представляет пример такого процесса, в котором компоненты потока могут быть в чрезвычайно сильной степени раздроблены на пузыри, капли, пленки. Для любого дифференциального объема каждого из таких конечных дискретных элементов системы, безусловно, справедливы рассматривавшиеся нами ранее общие дифференциальные уравнения движения и теплопроводности. Точно так же для любой дифференциальной площадки на поверхностях раздела фаз справедливы рассмотренные ранее условия теплового и механического взаимодействия

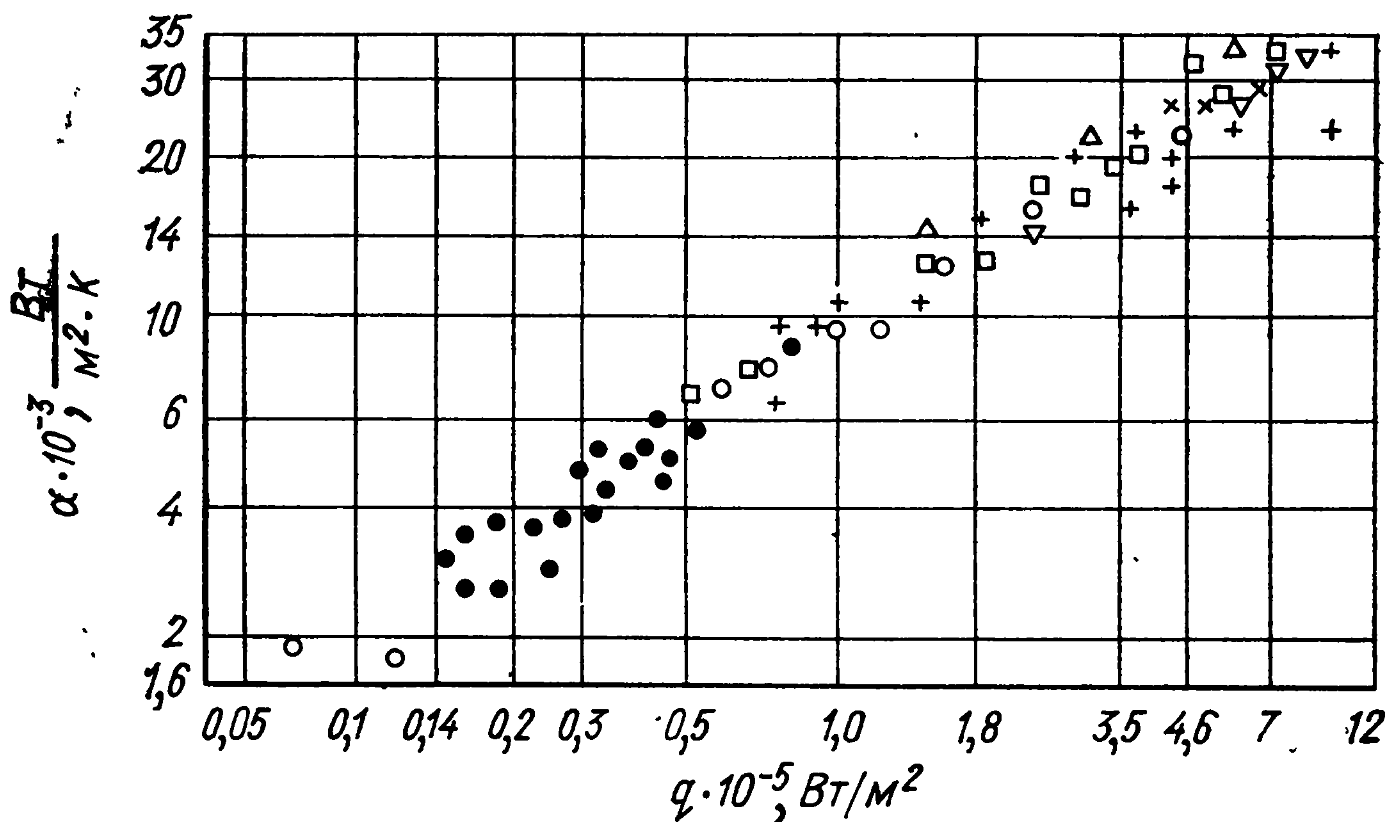



Рис. 21.10. Коэффициент теплоотдачи при кипении воды при атмосферном давлении на различных поверхностях нагрева: □ — латунь диаметром 9 мм, Ф. П. Минченко; × — латунь диаметром 11 мм, В. М. Боришанский; ● — латунь диаметром 31 и 45 мм, С.С.Кутателадзе; + — графит диаметром 2 мм, С. С. Кутателадзе; ○ — медь диаметром 13 мм, Мак-Адамс; ▽ — платина диаметром 1,4 мм, Никайяма; △ — хромированная плита, Кичелли и Бонилла

Однако вследствие весьма большого числа дискретных элементов системы, их непрерывного возникновения, роста и деформации в процессе движения и теплообмена весь такой двухфазный поток в целом должен характеризоваться некоторыми специальными вероятностными законами системы многих неустойчивых элементов. Здесь в известной степени можно провести аналогию с турбулентным течением однородной жидкости, в котором для каждого дифференциального элемента справедливо уравнение Навье—Стокса, а весь поток в целом подчиняется специальным (еще плохо известным) статистическим законам турбулентного течения.

Последовательные аналитические методы для таких систем в настоящее время отсутствуют. Решающее значение тут имеют эксперимент и метод подобия. Но применение последнего, если не ограничиваться анализом размерности случайно составленного перечня некоторых характерных величин, требует принятия определенного метода вывода безразмерных параметров процесса.

Такой общий метод, введенный автором, основан на допущении того, что в целом все взаимодействия, имеющие место в двухфазном потоке любой сложности, для каждой его отдельной области описываются теми же уравнениями, что и для системы с одной непрерывной поверхностью раздела. Вследствие этого критерии подобия могут выводиться из этих уравнений для всей сложной системы в целом. При этом необходимо дополнительно ввести еще уравнения или параметры, определяющие размеры образующихся дискретных элементов потока и вероятность их распределения в пространстве.

На рис. 21.10 приведены результаты ряда опытов по теплоотдаче при развитом стабильном пузырьковом кипении, т. е. когда число центров парообразования достаточно велико, а свободная однофазная тепловая конвекция на процесс уже не влияет. Отчетливо видна автомодельность относительно размеров поверхности нагрева. Очевидно, что это обстоятельство свидетельствует о равновероятном вступлении в действие статистически равномерно распределенных центров парообразования. В то же время данные рис. 21.11 показывают известное влияние заселенности поверхности этими центрами.

Связь между коэффициентом теплоотдачи и плотностью теплового потока хорошо аппроксимируется логарифмической прямой с показателем степени $q$ от 0,6 до 0,7. Для массовых расчетов можно принять, как предложил Д. А. Лабунцов,

$$\alpha \sim q^{2/3}. \tag{21.5.1}$$

При этом коэффициент теплоотдачи определяется по разности температуры поверхности нагрева и температуры насыщения под плоскостью при данном давлении в жидкости. Отсюда

$$\alpha \sim \Delta T^2. \tag{21.5.2}$$

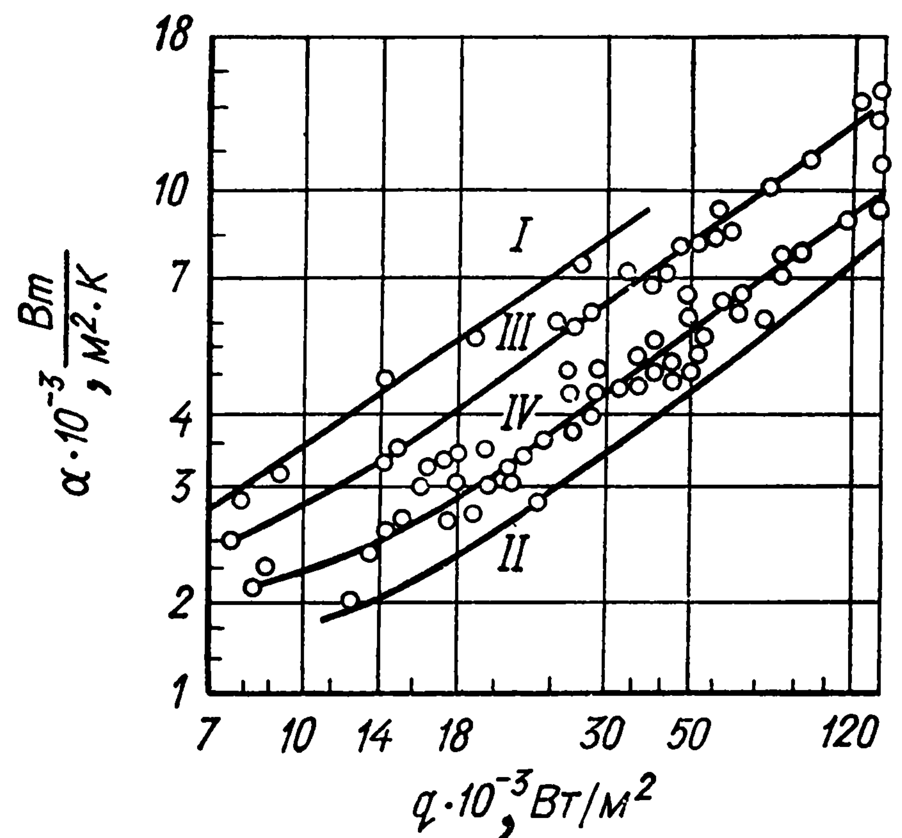



Рис. 21.11. Зависимость $\alpha$ от $q$ по опытам с водой ($p = 98\cdot10^3$ Па) при различной длительности работы нагрева:

*I* — свежеполированная трубка, отсчет непосредственно после начала кипения, Крайдер; *II* — после длительного кипения в неограниченном объеме воды, Якоб; *III* — технически чистая трубка, С. С. Кутателадзе; *IV* — технически чистая трубка после нескольких суток кипячения, С. С. Кутателадзе

Характер влияния давления на коэффициент теплоотдачи при развитом пузырьковом кипении так же более или менее одинаков для разных жидкостей, если строить эту зависимость в относительных координатах, выбранных из соображений термодинамического подобия веществ. Такого рода обработка большого числа опытов, проведенная В. М. Боришанским, показана на рис. 21.12. Высота слоя жидкости влияет на теплоотдачу при кипении только тогда, когда становится соизмеримой с отрывным диаметром генерируемых паровых пузырей.

Изучение процесса кипения чрезвычайно сложно в связи с многочисленностью гидродинамических и термодинамических факторов, могущих так или иначе на него влиять, и тем, что большинство этих факторов одновременно меняется с изменением давления насыщения. Поэтому выделение гидродинамической основы механизма теплообмена при кипении является чрезвычайно существенным. Такое выделение возможно на основе введенной автором аналогии процессов кипения и барботажа жидкости газом через пористые поверхности. Опыты, проведенные совместно с И. Г. Маленковым, хорошо подтвердили существование этой аналогии и стабильность законов теплоотдачи через пористые поверхности с большим числом малых отверстий.

На рис. 21.13 представлены экспериментальные данные о теплоотдаче при кипении воды и барботаже воды азотом через микропористую металлическую пластину. Как видно, имеет место не только качественное, но в значительной мере и количественное согласование этих двух процессов. Здесь и в дальнейшем скорость барботажа определена как отношение объемного расхода газа с единицы полной площади пористой пластины. Соответственно скорость барботажа при кипении (скорость парообразования) определена как

$$w'' = q/(r\rho''). \tag{21.5.3}$$

На рис. 21.14, 21.15 показана зависимость коэффициента теплоотдачи при барботаже через микропористую пластину при изменении давления и молекулярной массы газа, а на рис. 21.16 — опыты по влиянию вязкости жидкости на

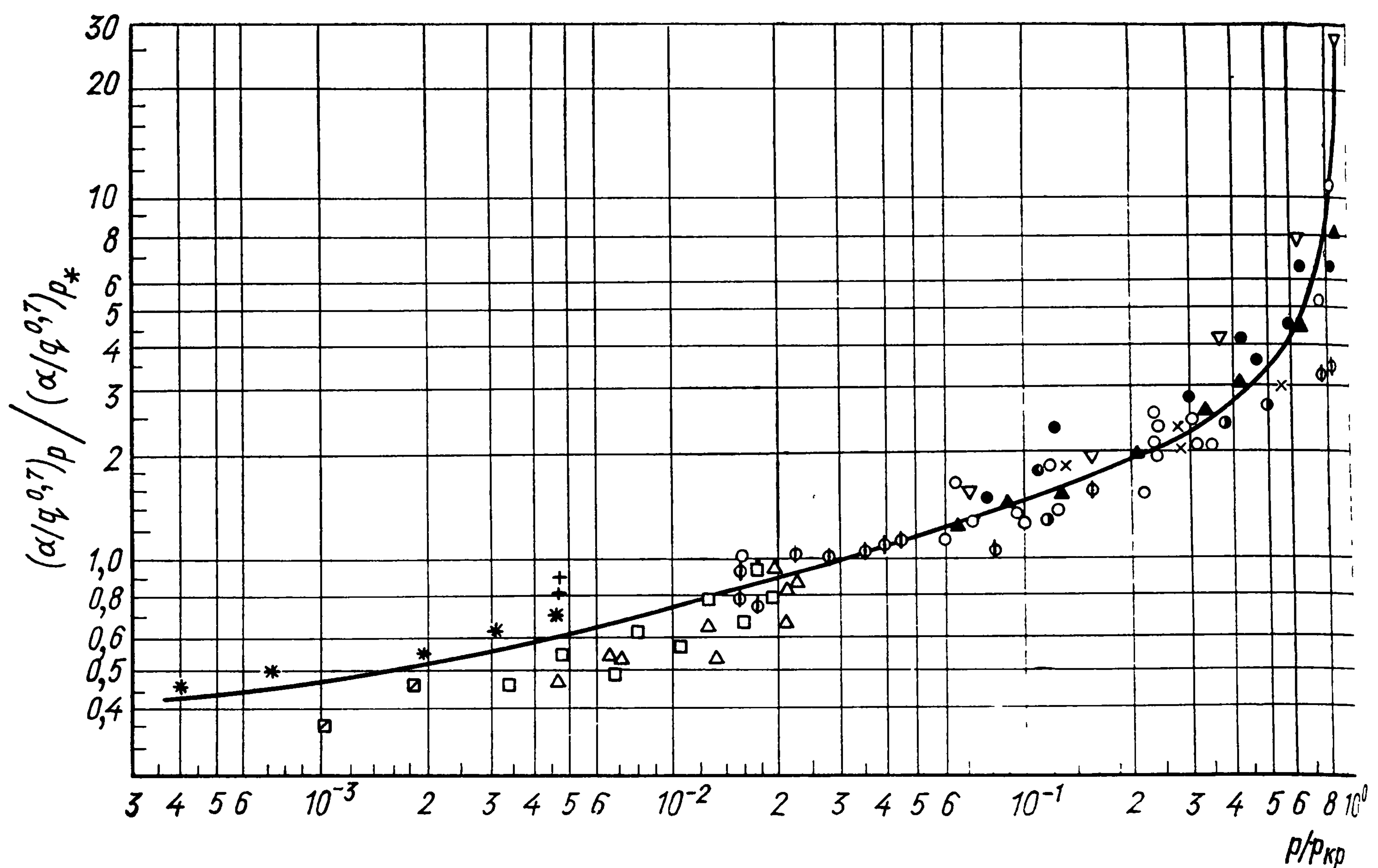



Рис. 21.12. Зависимость $\alpha^*_p/\alpha^*_{p*}$ от $p/p_{кр}$ по опытным данным с кипением различных жидкостей ($\alpha^*=\alpha/q^{0,7}$; $p_*=0,03p_{кр}$)

процесс теплоотдачи при барботаже. Все эти опыты проведены вблизи точки замерзания жидкости, т. е. при исключенном влиянии испарения.

Отчетливо выясняется существование трех режимов развитого пузырькового барботажа. Первый режим, при котором интенсивность теплообмена увеличивается с ростом скорости барботажа и с повышением давления; второй режим, при котором коэффициент теплоотдачи практически не меняется со скоростью барботажа; третий режим аналогичен первому, но с менее интенсивным теплообменом. При возрастании скорости барботажа третий режим заканчивается эффектом оттеснения жидкости от микропористой поверхности, т. е. явлением, аналогичным возникновению пленочного кипения. При этом вязкость жидкости существенно проявляется только во втором (переходном) режиме. Замечательно, что изменения плотности газа за счет варьирования давления и молекулярной массы оказываются неравносильными.

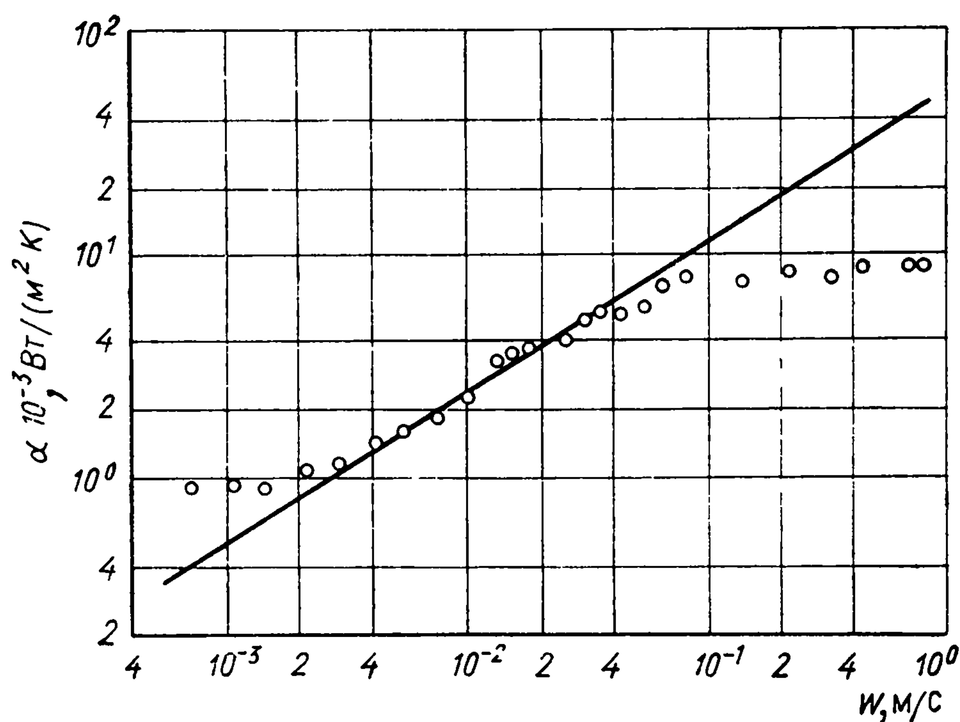



Рис. 21.13. Теплоотдача при кипении воды (прямая линия) и при барботаже воды азотом через пористую металлическую пластину (точки)

На рис. 21.17 описанные экспериментальные данные обобщены в координатах

$$\{Nu_* (M_*^2/Pe_*)^{2/3};\ w''\mu'/\sigma\}. \tag{21.5.4}$$

Критерии подобия здесь определены следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} Nu_* &= \frac{\alpha}{\lambda'}\sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho'-\rho'')}}; \\ Pe_* &= \frac{c'\rho'' w''}{\lambda'}\sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho'-\rho'')}}; \qquad M_*^2 = \frac{\rho''}{p}\sqrt{\frac{g\sigma}{\rho'-\rho''}}. \end{aligned}\right\} \tag{21.5.5}$$

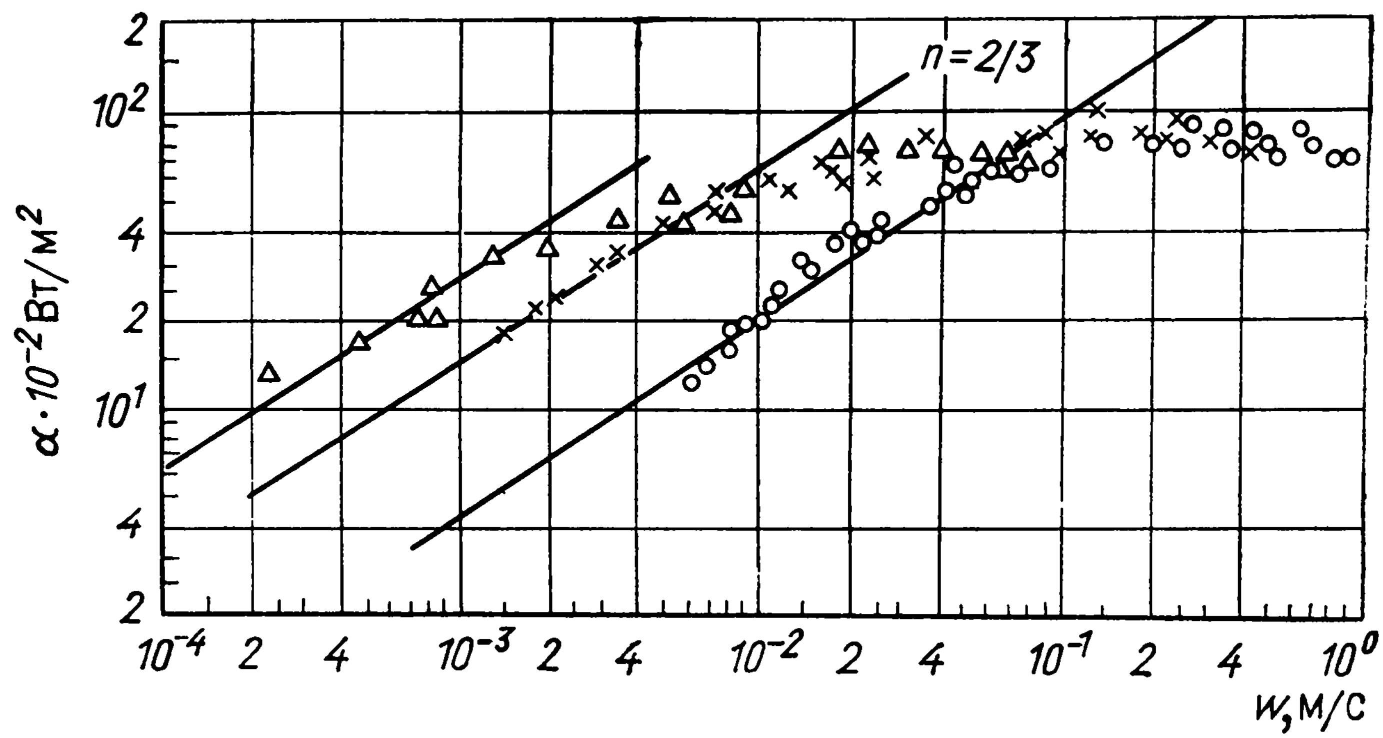



Рис. 21.14. Влияние давления на теплообмен при барботаже воды азотом:

○ — $1{,}02\cdot10^5$ Па; × — $6{,}12\cdot10^5$ Па; △ — $16{,}35\cdot10^5$ Па; ——— — опыты по кипению

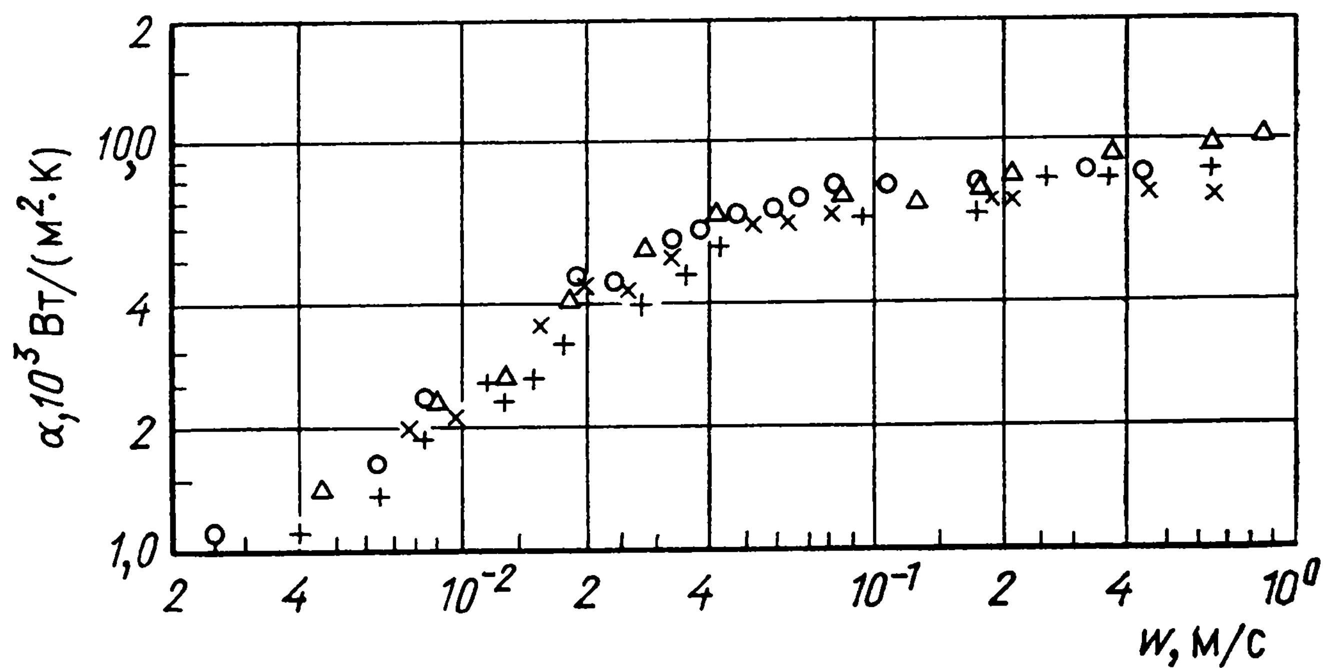



Рис. 21.15. Влияние молекулярной массы газа на теплообмен при барботаже воды ($p=1\cdot10^5$ Па):

○ — водород; △ — гелий; × — азот; + — аргон

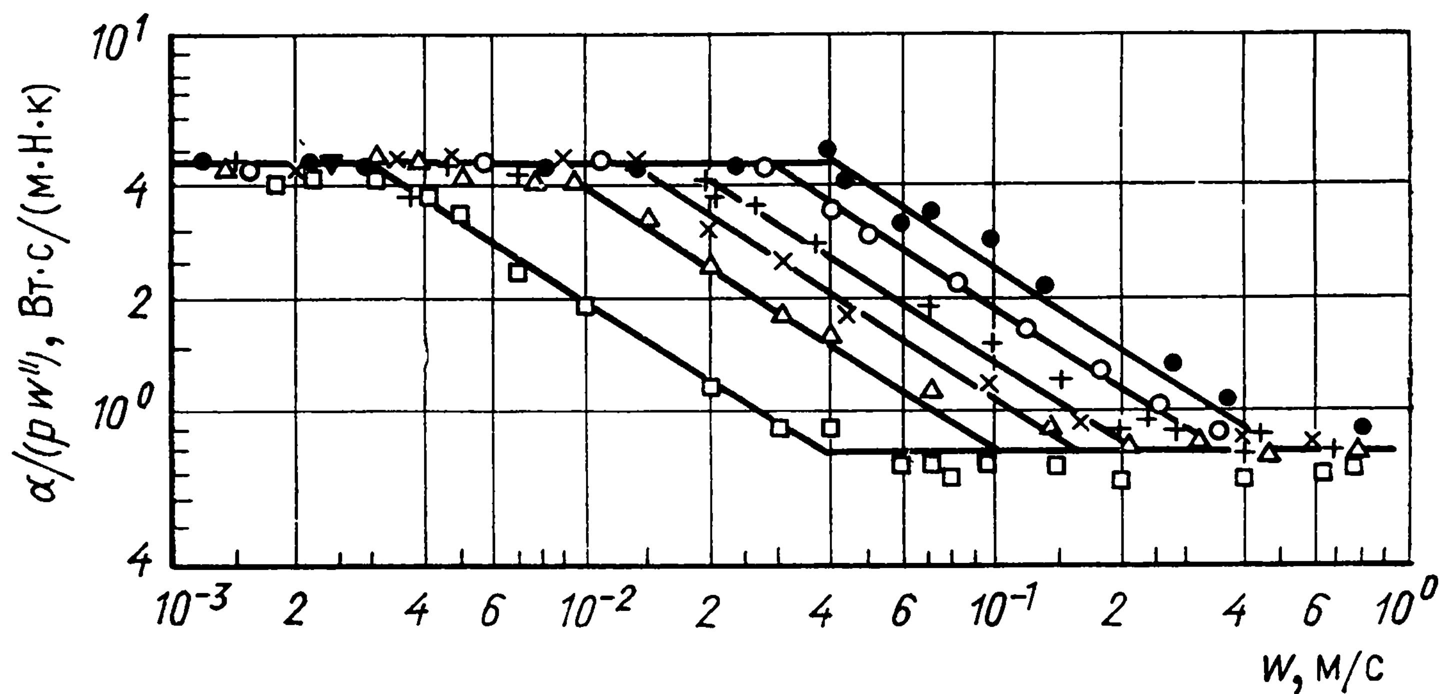



Рис. 21.16. Влияние вязкости на теплообмен при барботаже ($p=1\cdot10^5$ Па) для дистиллированной воды (●) и водоглицериновых растворов:

○ — 5% глицерина; + — 10%; × — 20%; △ — 30%; □ — 50%

Из рис. 21.18 видно, что автомодельность процесса относительно вязкости жидкости хорошо подтверждается внутри каждой серии опытов. Это, по-видимому, связано с турбулизирующим действием пузырей и разрушением вязкого подслоя.

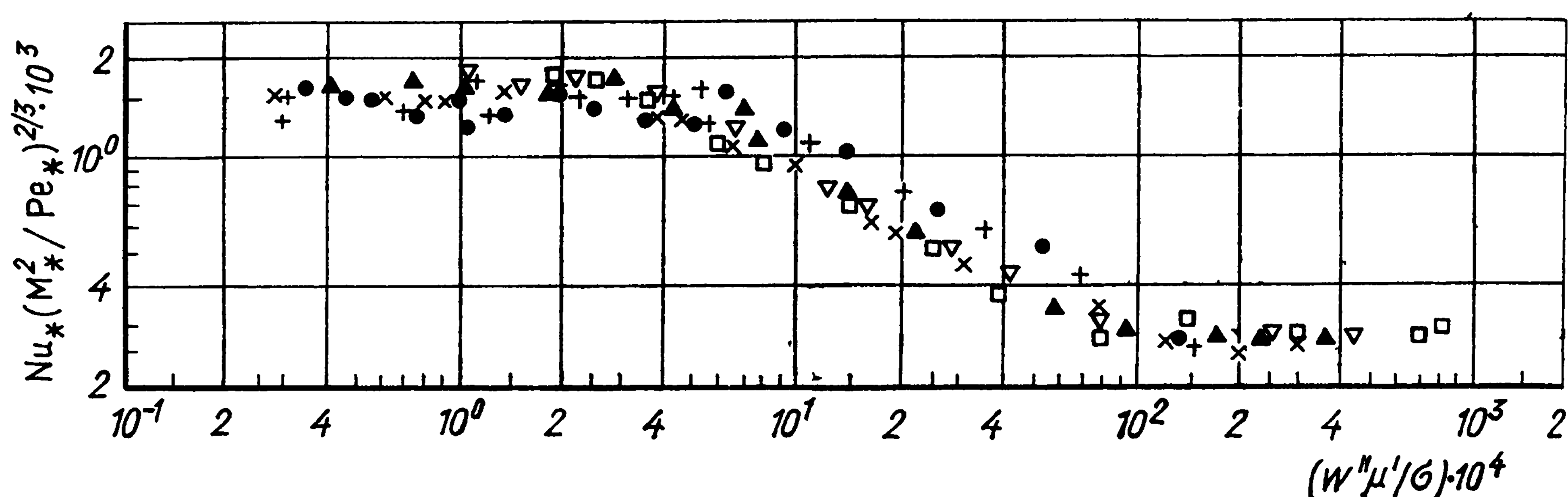



Рис. 21.17. Обобщенная зависимость $Nu_*(M_*^2/Pe_*)^{2/3}$ от $\mu' w''/\sigma$ при барботаже дистиллированной воды (●) и водоглицериновых растворов:
+ — 5% глицерина; × — 10%; ▲ — 20%; △ — 30%; □ — 50%

В пределах $\pm 25\%$ эти данные описываются формулой

$$\frac{\alpha}{\lambda'}\sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho'-\rho'')}}=1{,}5\cdot 10^{-3}\left(\frac{p w'' c'}{g\lambda'}\right)^{2/3}. \qquad (21.5.6)$$

В общем случае множитель пропорциональности в этой формуле зависит от геометрических характеристик поверхности нагрева, числа Прандтля и кри-

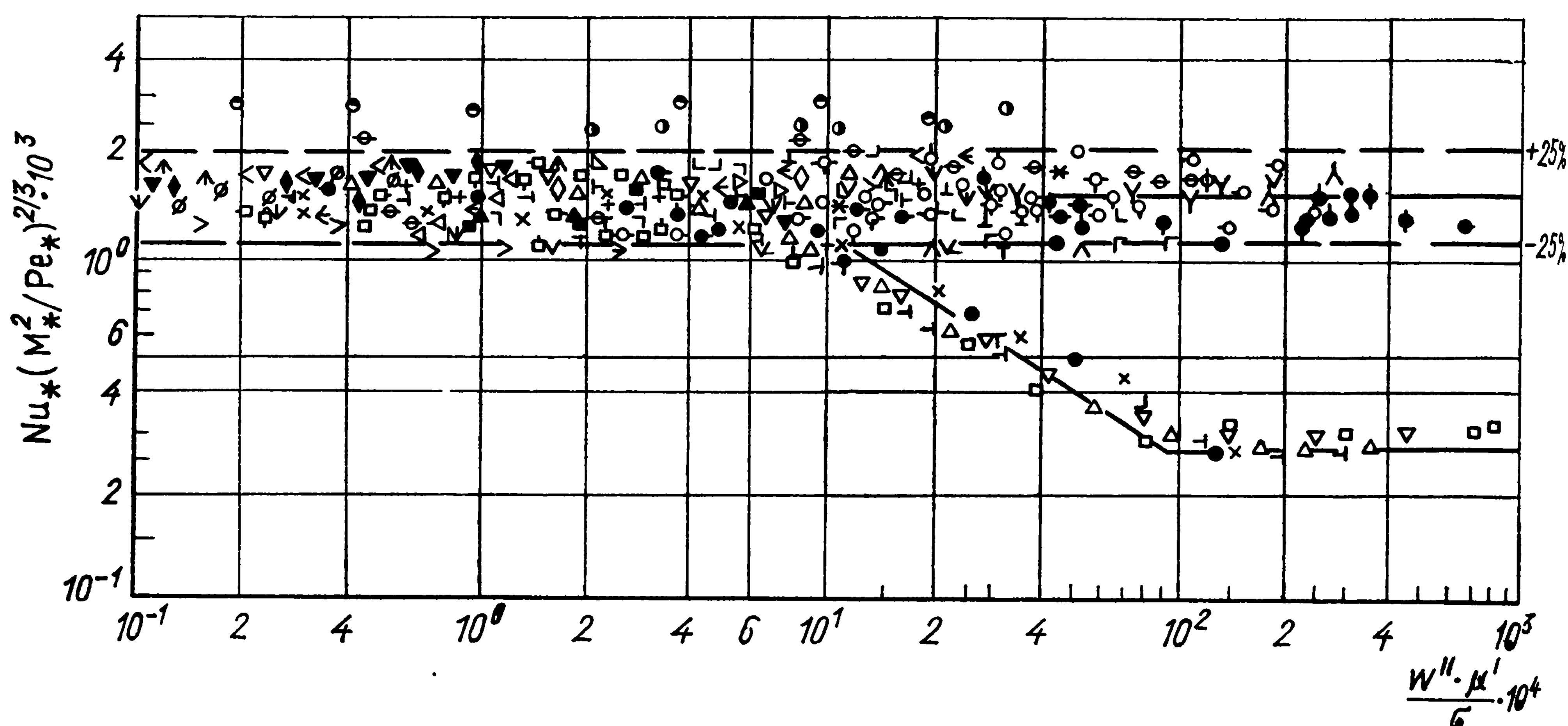



Рис. 21.18. Экспериментальные данные о теплообмене при развитом пузырьковом кипении жидких металлов, воды, спирта, сжиженных газов

териев, характеризующих акт зарождения паровых пузырей. Однако основной эффект учитывается удивительно простой и, очевидно, весьма глубокой по содержанию формулой (21.5.6).

## 21.6. ПУЗЫРЬКОВОЕ КИПЕНИЕ ПРИ ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТИ

Организованное движение жидкости может повысить интенсивность теплоотдачи при кипении. Степень этого влияния скорости течения жидкой фазы зависит от соотношения турбулентных возмущений, вызываемых организованным движением жидкости и собственно процессом парообразования. При

достаточно большой плотности теплового потока интенсивность теплоотдачи практически перестает зависеть от скорости организованного движения жидкости, поскольку конвективный перенос в пристенной области определяется практически целиком развивающимся в ней процессом парообразования. В

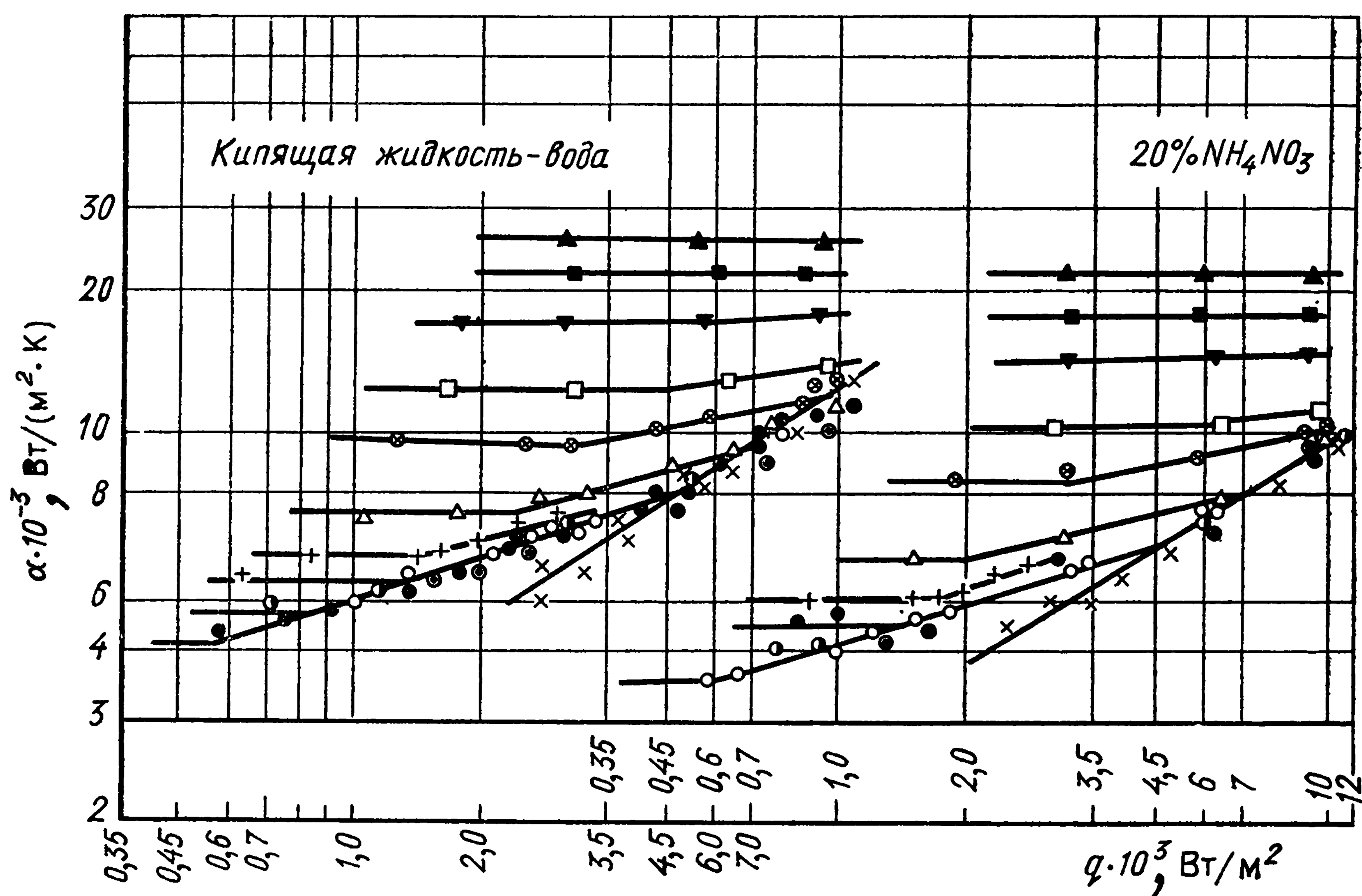



Рис. 21.19. Опытные данные о влиянии циркуляции жидкости на теплоотдачу при кипении воды и 20%-ного раствора $NH_4NO_3$ (скорость циркуляции $w$ от 0,5 до 5 м/с):
◑ — $w$=0,6 м/с; + — 0,8; ○ — 0,5; ● — 0,7; △ — 1,0; ⊗ — 1,5; ▼ — 3,0; ▲ — 5,0; □ — 2,0; ■ — 4,0. Естественная циркуляция: ×, ⊙

этом случае законы теплоотдачи в циркулирующей кипящей жидкости не отличаются от законов, установленных выше для кипения при свободной конвекции.

При заданной скорости циркуляции коэффициент теплоотдачи вначале или нечувствителен, или мало меняется с ростом теплового потока. Затем влияние теплового потока начинает сказываться все заметнее, пока не станет решающим. В результате огибающей кривых $\alpha$ ($q$, $w$) становится кривая $\alpha$ ($q$), близкая в соответствующей зависимости для кипения при свободной конвекции. На рис. 21.19 показаны опыты Р. Я. Ладиева с водой и раствором, отчетливо подтверждающие сказанное.

В общем случае теплоотдача в трубе определится системой критериев для теплоотдачи при кипении в условиях свободной конвекции, дополненной числом Рейнольдса вынужденного течения жидкости:

$$\mathrm{Re} = w_0 D/\nu, \tag{21.6.1}$$

где $w_0$ — скорость циркуляции, т. е. отношение объемного расхода жидкой фазы к полному сечению трубы; $D$ — внутренний диаметр трубы.

При значительных паросодержаниях гидродинамика зависит также от объемного $\beta$ или весового $x$ паросодержания потока и относительной плотности $\rho''/\rho'$.

Кроме этого, следует иметь в виду, что в пределе, при $\mathrm{Pe}_* \to 0$, коэффициент теплоотдачи стремится к значению, определяемому формулой для обычной вынужденной конвекции. Автором был предложен простой и в то же время достаточно эффективный метод учета совместного влияния скорости циркуляции и теплового потока на теплоотдачу при кипении, не связанный с рассмотрением сложных критериальных систем.

Идея этого метода сводится к тому, что соотношение влияния этих факторов оценивается соотношением соответствующих предельных значений коэффициентов теплоотдачи

$$\alpha/\alpha_J \approx f(\alpha_{00}/\alpha_0). \qquad (21.6.2)$$

Здесь $\alpha$ — коэффициент теплоотдачи к вынужденному потоку кипящей жидкости; $\alpha_0$ — коэффициент теплоотдачи при $x \to 0$, т. е. при отсутствии кипения; $\alpha_{00}$ — коэффициент теплоотдачи при развитом кипении, когда уже нет влияния скорости течения жидкости.

Вид этой зависимости схематически показан на рис. 21.20. Ее предельные свойства выражаются условиями

$$\alpha_{00}/\alpha_0 \to 0,\ f \to 1,\ \dot{f} \to 0;\ \alpha_{00}/\alpha_0 \to \infty;\ f \to \alpha_{00}/\alpha_0;\ \dot{f} \to 1. \qquad (21.6.3)$$

Простейшая интерполяционная формула, удовлетворяющая этим условиям, имеет вид

$$\alpha/\alpha_0 = \sqrt[n]{1+(\alpha_{00}/\alpha_0)^n}. \qquad (21.6.4)$$

На рис. 21.21 приведены опыты Л. С. Стермана по кипению воды в чистой трубе при скоростях циркуляции от 0,5 до 6,7 м/с и тепловых потоках от $2\cdot10^5$ до $10\cdot10^5$ Вт/м$^2$. По оси ординат отложена величина $\alpha_* = \alpha/q^{0,7}$, по оси абсцисс — плотность теплового потока. Параметром является скорость циркуляции. Отчетливо видно существование некоторого предельного значения величины $\alpha_*$, практически не зависящего от скорости течения жидкости. Чем выше скорость циркуляции, тем больше та плотность теплового потока, при которой величина $\alpha_*$ достигает этого предельного значения. Эти данные хорошо описываются формулой (21.6.4) при $n = 2$, что весьма удобно с расчетной точки зрения. Практически таким расчетом можно пользоваться при $\beta < 0,7$.

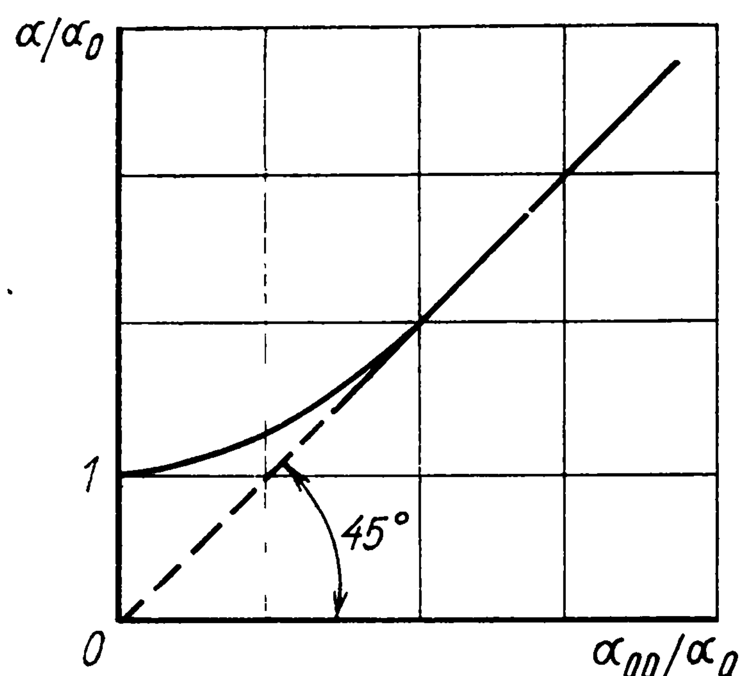



Рис. 21.20. Зависимость $\alpha$ от $\alpha_{00}/\alpha_0$

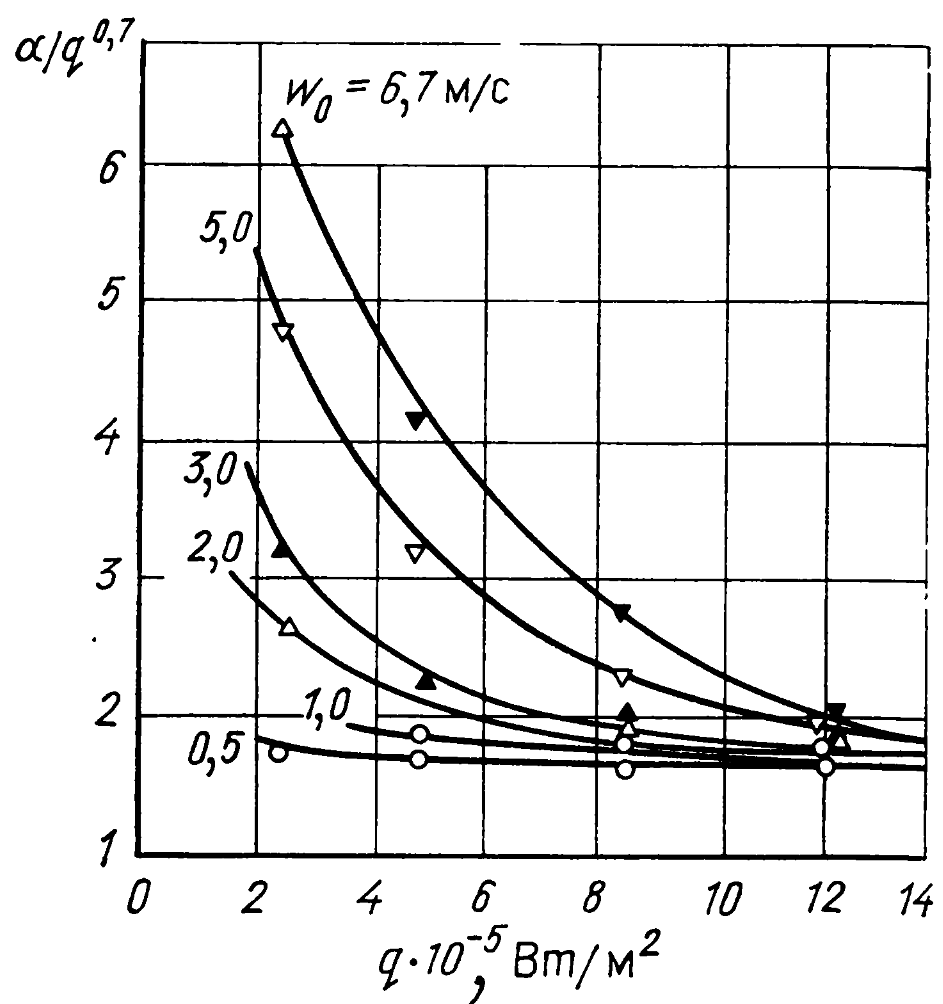



Рис. 21.21. Зависимость $\alpha_* = \alpha/q^{0,7}$ от $w_0$ и $q$ по опытам с кипением воды при $p = 2\cdot10^5$ Па в трубе $D = 16$ мм

При рассмотрении кипения в трубах необходимо иметь в виду наличие следующих трех зон с неодинаковыми условиями теплообмена:

1. Зона подогрева (экономайзерная) — от начала обогрева до сечения $L_1$, в котором стенка трубы достигает температуры насыщения. На этом участке имеет место обычный конвективный теплообмен. Если рассчитывать для простоты величину $\alpha$ по формуле (11.6.18), то длина этой зоны

$$\frac{L_1}{D} = \frac{c\rho' w_0}{4q}(T_1'' - T_1) - 10,4\left(\frac{\nu}{a}\right)^{0,4}\left(\frac{w_0 D}{\nu}\right)^{0,8}, \qquad (21.6.5)$$

где $T_1''$ — температура насыщения в сечении $L_1$;

$T_1$ — температура жидкости при входе в трубу.

2. Зона закипания жидкости — от сечения $L_1$ до сечения $L_2$, в котором жидкость полностью прогревается до соответствующей температуры насыщения. Расстояние до сечения $L_2$, отсчитываемое от начала обогрева трубы,

$$\frac{L_2}{D}=\frac{c\rho' w_0}{4q}(T''_2-T_1), \qquad (21.6.6)$$

где $T''_2$ — температура насыщения в сечении $L_2$. Длина зоны закипания

$$\frac{L_{2-1}}{D}=\frac{L_2-L_1}{D}=10{,}4\left(\frac{\nu}{a}\right)^{0,4}\left(\frac{w_0 D}{\nu}\right)^{0,8}-\frac{c\rho' w_0}{4q}(T''_1-T''_2). \qquad (21.6.7)$$

Здесь принято во внимание, что вследствие падения давления вдоль трубы $T''_1 > T''_2$. В этой зоне коэффициент теплоотдачи имеет значения, промежуточные между его значениями для первой и третьей зон.

3. Зона кипения, начинающаяся с сечения $L_2$. Для этой зоны справедливы все закономерности, рассмотренные выше в этой главе.

В расчетной практике вторую зону часто совмещают с третьей.

## 21.7. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ПЛЕНОЧНОМ КИПЕНИИ

Рассмотрим течение паровой пленки вдоль вертикальной плиты, полагая, что весь пар движется вдоль поверхности нагрева. Такое предположение вполне соответствует наблюдаемой картине движения пленки пара при не очень высоких нагревателях.

Пренебрегая в случае установившегося течения паровой пленки инерционными силами и считая ее течение ламинарным, записываем уравнение движения в виде

$$g(\rho'-\rho'')+\mu'' d^2 w''/dy^2=0. \qquad (21.7.1)$$

Константы интегрирования получаем из условий: $y=0$; $w''=0$; $y=\delta''$; $w''=w_{\text{гр}}$. Здесь $\delta''$ — толщина парового слоя и $w_{\text{гр}}$ — скорость движения жидкости на границе раздела фаз.

Интегрируя уравнение (21.7.1), получаем

$$w''=\bar{w}_{\text{гр}}\frac{y}{\delta^*}+\frac{g(\rho'-\rho'')}{2\mu''}(\delta'' y-y^2). \qquad (21.7.2)$$

При заданной постоянной по поверхности нагрева плотности теплового потока $q$ имеем

$$qx=\rho''[r+c''_p(T_{\text{ст}}-T'')/2]\int_0^{\delta''} w''\,dy. \qquad (21.7.3)$$

При свободной конвекции жидкости могут иметь место два предельных режима течения: когда $w_{\text{гр}}=0$ и когда вся масса жидкости движется со скоростью, равной скорости пара на границе раздела фаз. Теоретически последний случай соответствует невязкой жидкости, когда касательные напряжения на границе раздела фаз равны нулю, т. е. $(dw''/dy)_{\text{гр}}=0$.

Для этих предельных случаев решение системы уравнений (21.7.2) и (21.7.3) дает:

при $w_{\text{гр}}=0$

$$\delta''=\sqrt[3]{\frac{12\mu'' qx}{\varphi r\rho'' g(\rho'-\rho'')}}; \qquad (21.7.4)$$

при $(dw''/dy)_{\text{гр}}=0$

$$\delta''=\sqrt[3]{\frac{3\mu'' qx}{\varphi r\rho'' g(\rho'-\rho'')}}. \qquad (21.7.5)$$

Здесь $\varphi = 1 + c_v'' \Delta T/2r$. Решения отличаются только на постоянный множитель, равный $\sqrt[3]{12/3} = 1{,}59$. Общий коэффициент теплоотдачи складывается из коэффициентов конвективной и радиационной теплоотдачи:

$$\alpha_{сум} = \alpha_к + \alpha_р. \qquad (21.7.6)$$

Локальный коэффициент конвективной теплоотдачи определяется формулой

$$\alpha_x = \lambda''/\delta''. \qquad (21.7.7)$$

Для свободной конвекции

$$\alpha_x = \beta\lambda'' \sqrt[3]{\frac{\varphi r \rho'' g (\rho' - \rho'')}{\mu'' q x}}, \qquad (21.7.8)$$

где значение $\beta$ лежит в пределах между 0,436 и 0,690.

Средний коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = (3/2)\, \alpha_{x=L}. \qquad (21.7.9)$$

При вынужденном течении жидкости, когда

$$\frac{2\mu'' w_{гр}}{g (\rho' - \rho'')\, \delta''^2} \gg 1,$$

влиянием подъемной силы можно пренебрéчь и в правой части уравнения (21.7.2) сохранить только первый член. В этом случае

$$\delta'' = 2qx/(\varphi r \rho'' w_{гр}) \qquad (21.7.10)$$

и локальный коэффициент теплоотдачи при пленочном кипении прямо пропорционален скорости течения жидкости.

При заданном температурном напоре $\Delta T = T_{ст} - T''$ уравнение теплового баланса с учетом того обстоятельства, что пар образуется как за счет конвективной, так и за счет радиационной теплопередачи, примет вид

$$(\lambda''/\delta'' + \alpha_р)\Delta T dx = \varphi r \rho'' d\left(\int_0^{\delta''} w'' \, dy\right); \qquad (21.7.11)$$

$$d\left(\int_0^{\delta''} w'' \, dy\right) = \frac{\rho' - \rho''}{\mathrm{const}\, \mu''} \delta'' \, d\delta''. \qquad (21.7.12)$$

При $w_{гр} = 0$ const = 1/4, при $(dw''/dy)_{гр} = 0$ const = 1.

Приближенное интегрирование уравнения (21.7.11) основано на принятии допущения о том, что для заданных условий отношение $\alpha_p/\alpha = \alpha_p \delta''/\lambda'' = \mathrm{const}$ и дает для локального значения коэффициента теплоотдачи выражение

$$\alpha_x = \beta_1 \sqrt[4]{\frac{\lambda''^3 \varphi r \rho'' g (\rho' - \rho'')}{\mu'' \Delta T x (1 + \psi)}}, \qquad (21.7.13)$$

где $\psi = \alpha_p/\alpha$.

Коэффициент $\beta_1$ для предельных режимов имеет значения соответственно 0,500 и 0,705. Средний коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = \frac{4}{3} \beta_1 \sqrt[4]{\frac{\lambda''^3 \varphi r \rho'' g (\rho' - \rho'')}{\mu'' \Delta T L (1 + \psi)}}. \qquad (21.7.14)$$

В случае горизонтального цилиндра средний коэффициент теплоотдачи примерно на 20% меньше, т. е. множитель пропорциональности при корне лежит в пределах от 0,53 до 0,72. При этом в формулу (21.7.14) следует подставлять

вместо $L$ диаметр цилиндра $D$. Для быстродвижущейся жидкости при $\Delta T = \text{const}$

$$\alpha_x = 0{,}5\sqrt{\frac{\lambda'' \varphi r \rho'' w_{\text{гр}}}{\Delta T L (1+\psi)}}; \quad (21.7.15)$$

$$\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{\lambda'' \varphi r \rho'' w_{\text{гр}}}{\Delta T L (1+\psi)}}, \quad (21.7.16)$$

и в этом случае коэффициент теплоотдачи пропорционален корню квадратному из скорости течения жидкости. На рис. 21.22 приведены результаты сопоставления ряда опытов с расчетами в формуле (21.7.14). Как видно из графика, изменения коэффициента $\beta_1$ не выходят за теоретические пределы $a$.

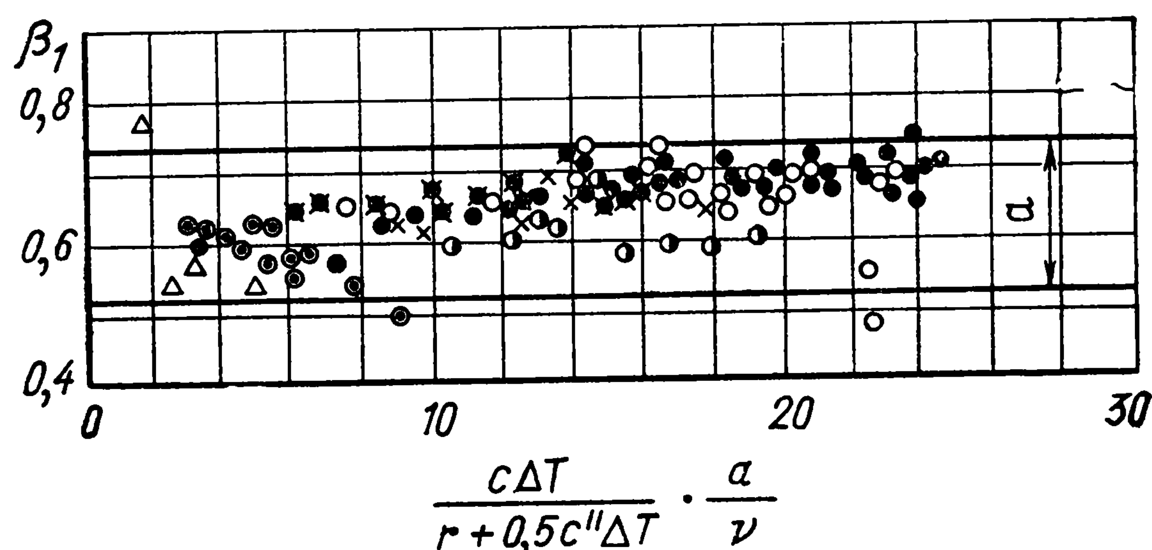



Рис. 21.22. Опытные данные о коэффициенте $\beta_1$ в формуле (21.7.14) по Бромлею:

△ — 2%-ный мыльный раствор; ○ — азот; ● — пентан; ◑ — бензин; × — четыреххлористый углерод; ⊙ — этиловый спирт

Опыты Бромлея по теплоотдаче при вынужденном поперечном обтекании цилиндров в условиях пленочного кипения и больших скоростей течения жидкости (рис. 21.23) привели к формуле

$$\bar{\alpha} = 2{,}7\sqrt{\lambda'' \varphi r \rho'' w/(\Delta T D)}, \quad (21.7.17)$$

т. е. подтвердили разработанную нами ранее теорию.

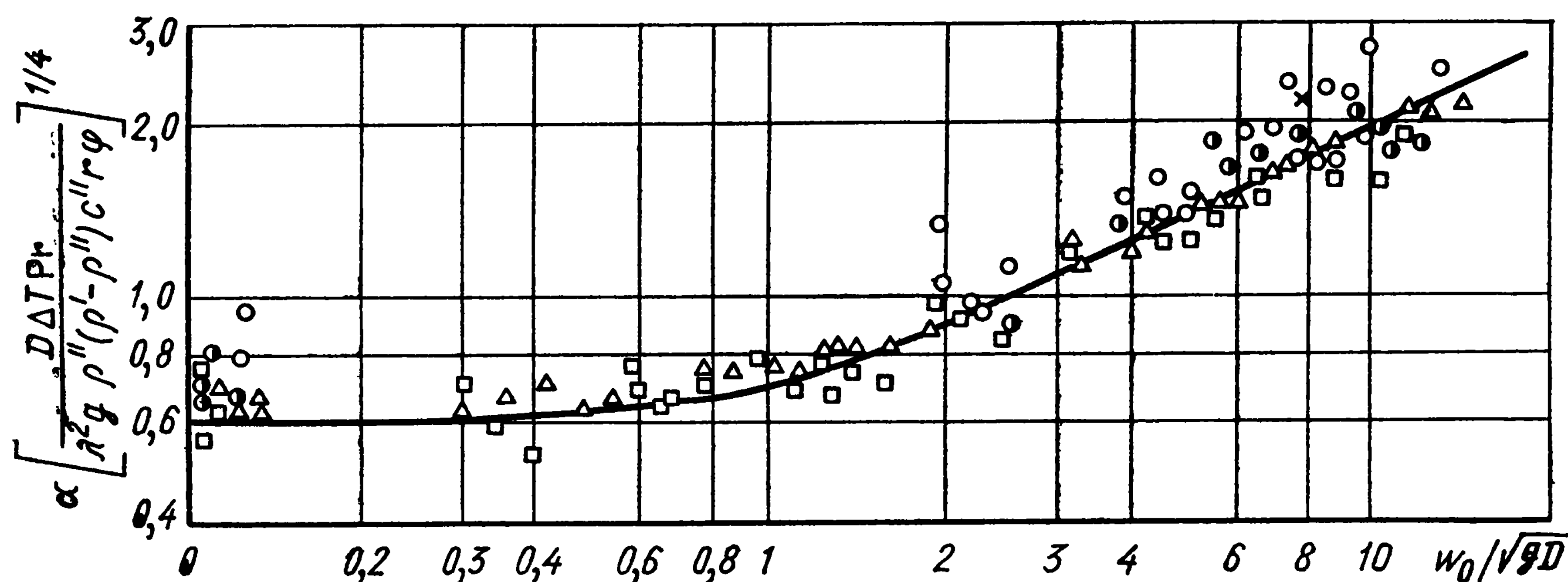



Рис. 21.23. Влияние скорости течения жидкости на теплоотдачу при пленочном кипении на горизонтальном поперечно обтекаемом цилиндре:

□ — бензол; ○ — четыреххлористый углерод; △ — этиловый спирт; ◑ — $n$-гексан

Чанг указал на связь процесса теплоотдачи и волновых явлений на границе паровой пленки и жидкости. В случае недогрева ядра потока жидкости до температуры насыщения коэффициент теплоотдачи при пленочном кипении возрастает с повышением этой величины.

Подробно проблема теплообмена при пленочном кипении рассмотрена в обзоре Э. К. Калинина, И. И. Берлина и В. В. Костюка.

## 21.8. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ СВОБОДНОМ РАСТЕКАНИИ ЖИДКОСТИ ПО ПОВЕРХНОСТИ НАГРЕВА

В ряде технологических процессов (закалка, охлаждение режущего инструмента и т. п.) имеет место свободное растекание жидкости по поверхности нагрева. При этом омывание поверхности может происходить как мелкими, так и крупными навесками жидкости.

На рис. 21.24 показана зависимость полного времени испарения капли воды от температуры поверхности нагрева* $T_{\text{ст}}$. Когда температура поверхности нагрева ниже температуры насыщения испаряемого вещества, капля жидкости, попадая на поверхность, растекается по ней тонким слоем и медленно испаряется. Когда температура поверхности нагрева превышает температуру насыщения, то в растекающейся жидкости наблюдается пузырьковое кипение. С дальнейшим повышением температуры поверхности нагрева пузырьковое кипение в растекающейся жидкости становится все более интенсивным, коэффициент теплоотдачи возрастает и соответственно уменьшается полное время испарения капли. Однако по достижении поверхностью нагрева некоторой температуры жидкость, попадая на поверхность, уже не растекается, а собирается в сферическую каплю, прерывисто контактирующую с поверхностью в течение всего периода испарения.

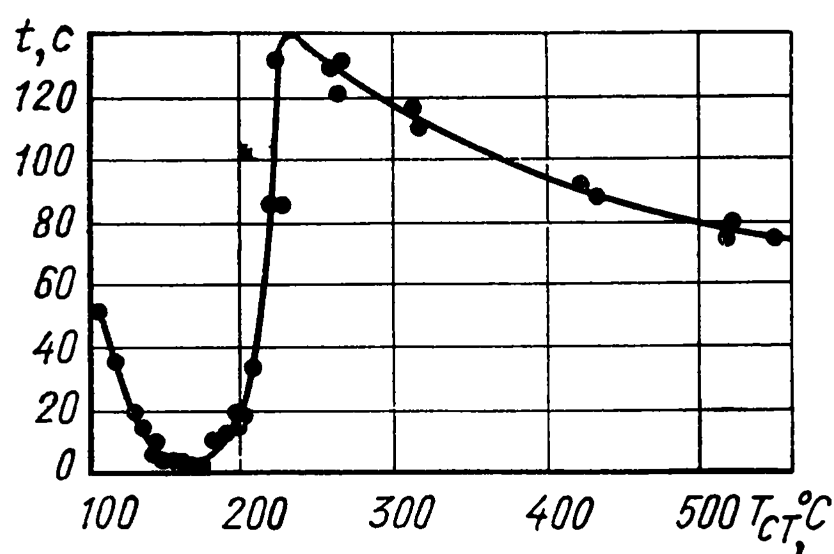


Рис. 21.24. Зависимость времени испарения капли ($V=0{,}0465$ см$^3$) от температуры стенки

При дальнейшем увеличении температуры $T_{\text{ст}}$ частота контактирования капли с поверхностью уменьшается, а время полного испарения растет, что свидетельствует о снижении интенсивности теплоотдачи к жидкости от поверхности нагрева. Причиной этого является образование парового слоя между жидкостью и поверхностью нагрева. Началу этого периода соответствует минимум на кривой $t\,(T_{\text{ст}})$. Возрастание времени испарения капли продолжается также только до некоторого значения температуры поверхности нагрева, соответствующей максимуму на кривой испарения. Эта точка кривой свидетельствует о прекращении контактирования капли с поверхностью нагрева и об образовании устойчивого парового слоя, полностью отделяющего жидкость от поверхности. Этому состоянию соответствует максимальное время полного испарения жидкости. В дальнейшем, по мере роста температуры поверхности нагрева, полное время испарения капли медленно уменьшается.

В литературе принято называть режим испарения навески жидкости, при котором она отделена от поверхности нагрева устойчивым слоем пара, испарением жидкости, находящейся в сфероидальном состоянии.

По мере увеличения объема жидкости, выливаемой на поверхность нагрева при $T_{\text{ст}} > T_{\text{кр}}$, его форма все более отклоняется от правильной сферы, принимая вид, который может быть условно назван «плоским» сфероидом. Дальнейшее увеличение выливаемого объема жидкости приводит к тому, что пар, образующийся на нижней поверхности жидкости, не успевает вытечь по периферии и время от времени прорывается через толщу жидкости в виде больших пузырей. Исследование этого вопроса показало, что по достижении определенного значения выливаемого объема жидкости интенсивность теплоотдачи к такому пузырьчатому сфероиду уже не зависит от количества жидкости и определяется при данных конкретных условиях испарения плотностью теплового потока $q$. При этом прорывающийся через толщу жидкости пар равновероятно распределяется по наружной поверхности жидкости в виде периодически

* Поверхность нагрева — горизонтальная металлическая пластинка. Каждая точка на графике соответствует полному испарению капли воды заданного начального объема

появляющихся и лопающихся паровых пузырей, а толщина слоя жидкости практически остается постоянной.

Произведем расчет теплоотдачи к плоскому сфероиду (рис. 21.25).

Теплоотдача от поверхности нагрева к навеске жидкости, принявшей форму плоского сфероида, происходит путем теплопроводности и радиации через разделяющий их слой пара. В дальнейшем будем считать, что теплоотдача и испарение на внешних поверхностях сфероида пренебрежимо малы по сравнению с процессом со стороны поверхности нагрева. Это условие точно соблюдается, когда сфероид окружен насыщенным паром того же вещества, и приближенно в ряде других случаев.

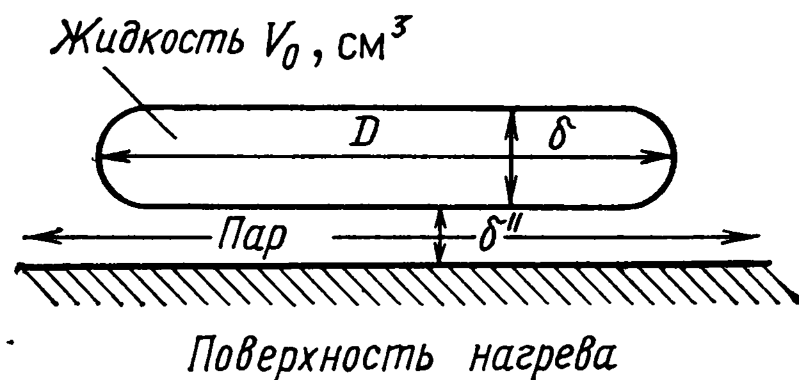



Рис. 21.25. Схема задачи об испарении плоского сфероида

Полагаем далее, что на нижней поверхности сфероида температура равна температуре насыщения. Уравнение теплового баланса примет вид (если пренебречь теплотой перегрева пара)

$$(\alpha_к + \alpha_р)(T_{ст} - T'')F = r\rho' \, dV/dt + c\rho' \, d(V\bar{T})/dt. \quad (21.8.1)$$

Здесь $\alpha_к$ и $\alpha_р$ — коэффициенты конвективной и радиационной теплоотдачи (см. гл. 19); $V$ — объем сфероида; $F$ — площадь проекции сфероида на поверхность нагрева; $\bar{T}$ — средняя температура жидкости в сфероиде. Скорость истечения пара по периферии сфероида

$$w'' = qD/(4r\rho''\delta''), \quad (21.8.2)$$

где $D$ — расчетный диаметр сфероида; $\delta''$ — толщина парового слоя.

Расчеты показывают, что в слое пара, отделяющего сфероид от поверхности нагрева, имеет место ламинарное течение. Следовательно,

$$\alpha_к = \lambda''/\delta''. \quad (21.8.3)$$

Наблюдения показывают, что толщина плоского сфероида практически не меняется в процессе испарения до тех пор, пока сохраняется его плоская форма, т. е.

$$\left.\begin{aligned} dV &= (\pi/2)\,\delta D dD; \\ F &= (\pi/4)\,D^2, \end{aligned}\right\} \quad (21.8.4)$$

где $\delta$ — толщина сфероида.

Считая температуру сфероида постоянной, т. е. вводя в расчет температуру, осредненную за время испарения, и принимая во внимание зависимости (21.8.3) и (21.8.4), приводим уравнение (21.8.1) к виду

$$\frac{\lambda''}{\delta''} + \alpha_р = 2\left[1 + \frac{c\,(T'' - \bar{T})}{r}\right] \frac{r\rho\delta}{T_{ст} - T''} \frac{dD}{Ddt}. \quad (21.8.5)$$

Сила тяжести, действующая на сфероид, уравновешивается давлением пара, развивающимся вследствие сопротивления истечению по периферии сфероида, и реактивной силой, возникающей вследствие отделения пара от жидкости на нижней поверхности сфероида. Последней практически можно пренебречь и считать, что сфероид поддерживается во взвешенном состоянии только за счет трения вытекающего пара.

Пар вытекает по периферии сфероида под влиянием избыточного давления, равного $g\delta\,(\rho' - \rho'')$*, т .е.

$$dG'' = \xi\pi D\delta''\sqrt{2g\delta\,(\rho' - \rho'')\,\rho''}\,dt, \quad (21.8.6)$$

где $\xi$ — коэффициент истечения, учитывающий форму периферии сфероида и характер его обтекания паром.

* В дальнейшем для простоты записи полагаем $\rho' - \rho'' \approx \rho'$.

С другой стороны, из материального баланса сфероида

$$dG'' = (\pi/2)\rho'\delta D dD. \quad (21.8.7)$$

Совмещая последние два уравнения, получаем

$$\delta'' = \frac{1}{2\xi}\sqrt{\frac{\rho'\delta}{2g\rho''}\frac{dD}{dt}}. \quad (21.8.8)$$

Подставляя значение $dD/dt$ из уравнения (21.8.8) в (21.8.5) и пренебрегая радиацией ($\alpha_к \gg \alpha_р$), получаем выражение для толщины парового слоя

$$\delta'' = \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{\lambda''(T_{ст}-T'')D}{r[1+c(T''-\bar{T})/r]}}\sqrt[4]{g\delta\rho\rho''}, \quad (21.8.9)$$

где $\eta = \sqrt[4]{32\xi^2}$.

Соответственно

$$\alpha_к = \eta\sqrt{\frac{\lambda''[r+c(T''-\bar{T})]}{(T_{ст}-T'')D}}\sqrt[4]{g\delta\rho'\rho''}. \quad (21.8.10)$$

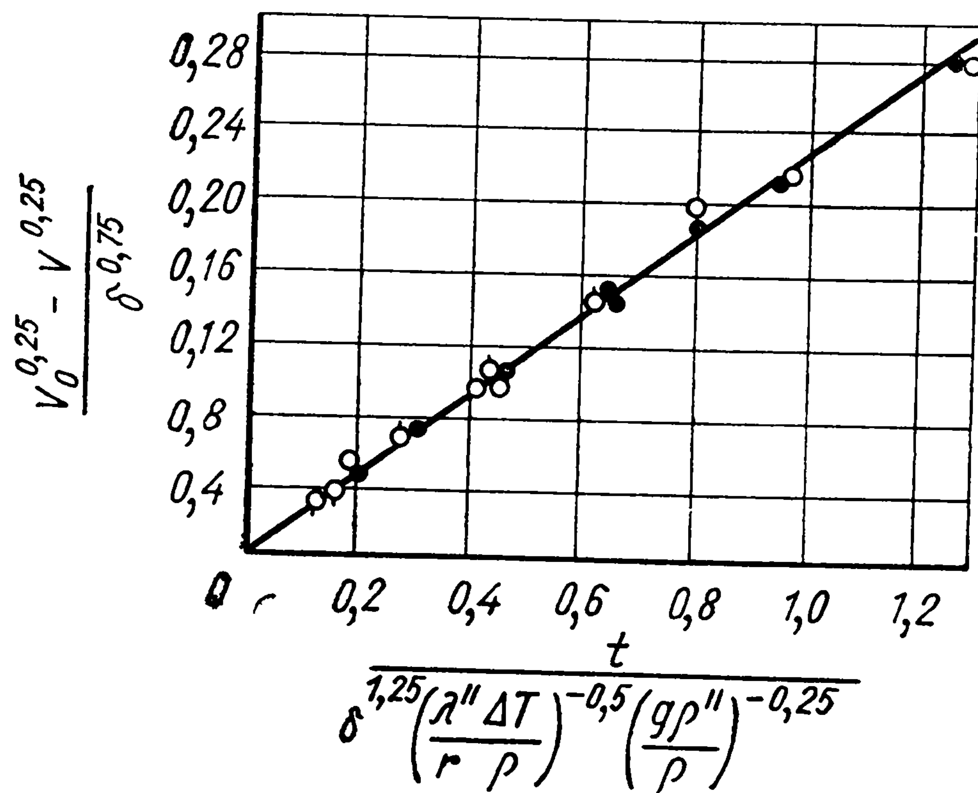



Рис. 21.26. Сопоставление формулы (21.8.11) с опытами

Пар между сфероидом и поверхностью нагрева перегрет, так как в нем устанавливается температурное поле в пределах от $T_{ст}$ до $T''$. Расход тепла на перегрев образующегося пара до средней температуры парового слоя можно приближенно учесть, вводя в приведенные выше формулы вместо $r$ выражение

$$r_* = r + c''_p(T_{ст} - T'')/2.$$

Подставляя значение $\delta''$ из уравнения (21.8.9) в (21.8.5) и пренебрегая величиной $\alpha_р$, после интегрирования получаем

$$V_0^{1/4} - V^{1/4} = \frac{\eta}{4{,}1}\left[\frac{\lambda''(T_{ст}-T'')}{\delta\rho'[r+c(T''-\bar{T})]}\right]^{1/2}\left(\frac{g\rho''}{\rho'}\right)^{1/4} t. \quad (21.8.11)$$

Здесь $V_0$ — начальный объем сфероида; $V$ — объем сфероида в момент времени $t$; $t$ — время, отсчитываемое от начала испарения сфероида объемом $V_0$.

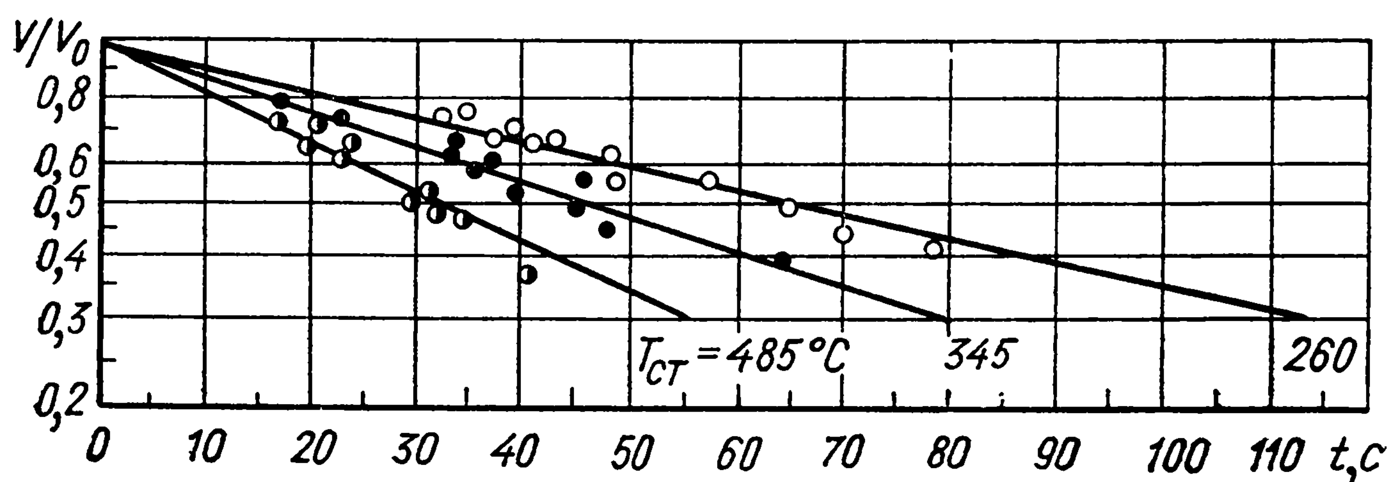



Рис. 21.27. Изменение объема пузырчатого сфероида во времени в полулогарифмических координатах (спирт)

На рис. 21.26 показаны результаты опытов, проведенных В. М. Боришанским, обработанные в координатах, соответствующих формуле (21.8.11). Согласование с теорией следует признать удовлетворительным. Значение $\eta$ по этим опытам равно 0,9.

Приведем уравнение (21.8.5) к виду

$$\frac{dV}{V} = -\frac{(\alpha_к+\alpha_р)(T_{ст}-T'')}{\delta\rho'[r+c(T''-\bar{T})]}dt. \quad (21.8.12)$$

В случаае пузырчатого сфероида входящие в это уравнение величины $\alpha$ и $\delta$ не зависят от объема $V$. Интегрируя уравнение (21.8.12) при этих условиях, получаем

$$\ln \frac{V}{V_0} = -\frac{(\alpha_к + \alpha_р)(T_{ст} - T'')}{\delta\rho' [r + c(T'' - \bar{T})]} t. \qquad (21.8.13)$$

На рис. 21.27 приведены результаты нескольких серий опытов, показывающих, что полулогарифмическая прямая, выражаемая формулой (21.8.13), действительно имеет место.

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*


1. **Боришанский В. М., Козырев А. П., Светлова Л. С.** Теплообмен при кипении воды в широком диапазоне изменения давления насыщения.— «Теплофизика высоких температур», 1964, № 1, с. 119.
2. **Вопросы** физики кипения. Сб. пер. статей. Под ред. И. Т. Аладьева. М., «Мир», 1964.
3. **Вопросы** теплообмена при изменении агрегатного состояния вещества. Сб. статей под общ. ред. С. С. Кутателадзе. М.—Л., Госэнергоиздат, 1953.
4. **Зысина-Моложен Л. М., Кутателадзе С. С.** К вопросу о влиянии давления на механизм парообразования в кипящей жидкости. — «Журн. техн. физики», 1950, т. XX, вып. 1, с. 110.
5. **Калинин Э. К., Берлин И. И., Костюк В. В.** Теплоотдача при пленочном кипении.— Advances in Heat Transfer, vol. II, New York, Academic Press, 1975.
6. **Кутателадзе С. С.** Теплопередача при конденсации и кипении. М., Машгиз, 1952.
7. **Кутателадзе С. С., Мамонтова Н. Н.** Исследование критических тепловых потоков при кипении жидкостей в большом объеме в условиях пониженных давлений. — «Инж.-физ. журн.», 1967, т. 12, № 2, с. 181.
8. **Лабунцов Д. А.** Приближенная теория теплообмена при развитом пузырьковом кипении.— «Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт», 1963, № 1, с. 58.
9. **Теплообмен** при кипении металлов в условиях свободной конвекции. М., «Наука», 1969. Авт.: В. И. Субботин, Д. Н. Сорокин, Д. М. Овечкин, А. П. Кудрявцев.
10. **Термогидродинамика** кипящих жидкостей. — В кн.: Проблемы теплофизики и физической гидродинамики. Новосибирск, «Наука», 1974, с. 176. Авт.: Г. И. Бобрович, И. И. Гогонин, И. Г. Маленков, Н. Н. Мамонтова.
11. **Boiling** heat transfer and burnout mechanism in boiling-water cooled reactor. — In: Materials of the Third United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva, 1964. Vol. 8, p. 146. Auth.: K. Torikai, M. Hori, M. Akiyama e. a.
12. **Bosnjakovič F.** Verdampfung und Flüssigkeitsüberhitzung.— «Tech. Mech. und Therm.», 1930, Bd 1, S. 358.
13. **Cumo M.** Aspetti fondamentali dell'elollizione. Roma, CNEN, 1968.
14. **Pwyer O. B.** Boiling liquid-metal heat transfer. A. N. S. Illinois, 1976.
15. **Stefanovič M. S.** Analiza fluktuacija temperature u dvofarnom toku pri podhladjenom kljucanju. Belgrad, Instituta «Boris Kidrič», 1975.
16. **Symposium** on Two Phase Flow. Department of Chemical Engineering University of Exeter. Devon, England, June 1965.
17. **Wachters L. H. J.** De warmteoverdracht van een hete wand. Naar druppels in de steroidale toestand. Helmond, 1965.
18. **Van Ouwerkerk H. J.** The role of the evaporating microlayer and dry surface areas in boiling. Drukkerij Demmenie, Leiden, [1970].
19. **Van Strahlen S. J. D.** Heat transfer to boiling binary mixtures at atmospheric and subatmospheric pressures.— «Chem. Engng. Sci.», 1956, v. 5, p. 290.

Глава 22

# КРИТИЧЕСКИЕ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА, ВЫЗЫВАЮЩИЕ ИЗМЕНЕНИЯ РЕЖИМА КИПЕНИЯ

## 22.1. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ПРИРОДА КРИЗИСОВ В МЕХАНИЗМЕ КИПЕНИЯ ЖИДКОСТИ

В предыдущей главе было выяснено, что существуют два основных режима кипения: пузырьковое, при котором пар выделяется в некоторых местах поверхности нагрева в виде отдельных пузырей, и пленочное, когда поверхность нагрева отделена от массы жидкости сплошным слоем пара. Переход от одного режима кипения к другому имеет все черты кризисного явления и сопровождается коренным изменением гидродинамической и тепловой обстановки процесса охлаждения поверхности нагрева.

Рассматриваемая проблема осложняется тем, что в механизме кипения имеют место не один, а два кризиса: первый, при котором происходит возникновение сплошной пленки пара на поверхности нагрева, и второй, при котором происходит разрушение паровой пленки и восстановление пузырькового режима кипения. При этом плотности теплового потока при первом кризисе существенно больше, чем при втором.

Если при значениях $q$, меньших $q_{кр_1}$, коэффициент теплоотдачи при пузырьковом кипении существенно возрастает с увеличением плотности теплового потока, то в околокритической области значение $\alpha$ остается почти постоянным.

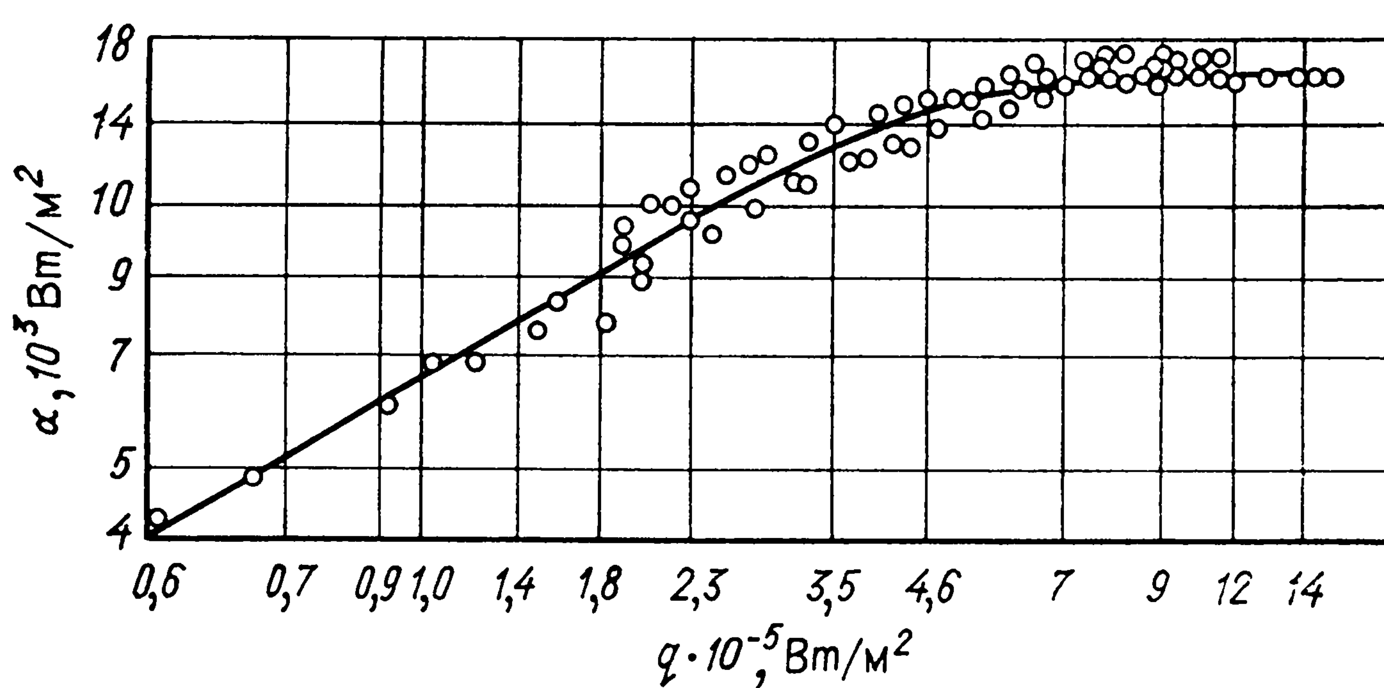



Рис. 22.1. Характер зависимости $\alpha$ от $q$ для кипящей воды при растянутом околокритическом режиме для разных серий опытов

Это явление можно объяснить следующим образом. При околокритическом режиме насыщенность паром двухфазного граничного слоя у поверхности нагрева столь велика, что дальнейшее увеличение паропроизводительности, с одной стороны, вызывает повышение турбулентности в жидкой фазе, а с другой, способствует вытеснению последней из граничной области. В некотором интервале значений $q$ эти два противоположных процесса в какой-то мере компенсируют друг друга, в результате чего коэффициент теплоотдачи остается более или менее постоянным. Но, в конце концов, устойчивость жидких пленок, пронизывающих двухфазный слой, окончательно нарушается, и жидкая фаза отделяется от поверхности нагрева сплошным слоем пара. Таким образом, возникновение пленочного режима кипения является результатом нарушения устойчивости той структуры граничного двухфазного слоя, которая имела место при предшествующем этой перестройке пузырьковом режиме кипения.

Точно так же двухфазный граничный слой, представляющий собой паровую пленку на поверхности и обтекающую ее массу жидкости, может устойчиво

существовать только до тех пор, пока кинетическая энергия текущего в этой пленке пара достаточна для поддержания во взвешенном состоянии масс жидкости, стремящихся под действием силы тяжести прорваться сквозь паровой слой к поверхности нагрева.

Поскольку возникновение и разрушение пленочного кипения представляют собой действительно особый гидродинамический кризис, они характеризуются не точными значениями критического теплового потока (или, что то же самое, критической скоростью парообразования), а некоторыми наиболее вероятными его значениями. Так, автору удавалось в опытах по возникновению пленочного кипения на графитовых стержнях, погруженных в большой объем воды, путем плавного увеличения тепловой нагрузки отодвигать возникновение кризиса до значений $q$, превышающих нормальные примерно в два раза. При этом интенсивность теплоотдачи в области «растянутого кризиса» практически оставалась постоянной (рис. 22.1). Аналогичный эффект наблюдался и в опытах автора и И. Г. Маленкова при эффекте оттеснения жидкости в условиях барботажа через микропористую поверхность.

## 22.2. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХФАЗНОГО ГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В БОЛЬШОМ ОБЪЕМЕ КИПЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ (ПЕРВЫЙ КРИЗИС РЕЖИМА КИПЕНИЯ)

Как уже выяснено в предыдущей главе, гидродинамической моделью пузырькового кипения является барботаж жидкости газом, вдуваемым через пористую поверхность с достаточно малыми размерами отверстий. Существование этой аналогии, впервые указанной автором, было подтверждено в работах Уоллеса, И. Г. Маленкова, Сполдинга, Актюрка и др.

Однако следует иметь в виду и различие в механизме формирования пузырей при барботаже и кипении. В первом случае пузырь растет на поверхности в месте поступления газа через отверстие и, далее, оторвавшись от стенки, не меняет своей массы, если только не происходит его слияния с другими всплывающими пузырями. При этом после нарушения устойчивости пузырьковой структуры граничного двухфазного слоя возникает большой газовый колокол, который и является аналогом паровой пленки. При кипении же пузыри растут за счет испарения жидкости по всей их поверхности, их рост может продолжаться и после отрыва от поверхности нагрева. Точно так же после возникновения сплошной паровой пленки пар к ней подводится за счет испарения жидкости с ее внешней поверхности, в то время как в газовый колокол при барботаже газ поступает «изнутри» со стороны пористой стенки.

В связи с этим при кипении всегда существует поток массы испаряемой жидкости, направленный к поверхности нагрева, однако этот поток относительно невелик. Основная циркуляция жидкой фазы связана с увлечением присоединенной массы жидкости паровыми (газовыми) пузырями.

Рассмотрим условия устойчивости двухфазного несжимаемого граничного слоя над неограниченной горизонтальной пористой поверхностью, полагая, что жидкость обладает исчезающей вязкостью ($\mu \to 0$). В этом случае могут взаимодействовать только кинетическая энергия вдуваемого газа, гравитационные и поверхностные силы в двухфазном граничном слое. По порядку величины динамический напор газа равен $\rho'' w''^2$, а работа, затраченная на оттеснение жидкости из образующегося газового колокола (газовой или паровой пленки), $g\delta(\rho' - \rho'')$. Здесь $\delta$ — средняя толщина возникающего газового слоя.

Порядок значения величины $\delta$ определяется лапласовой постоянной $\sqrt{\sigma/g(\rho' - \rho'')}$, что непосредственно следует из соображений размерностей. Поскольку в рассматриваемой модели возникновение кризиса (потери устойчивости пузырьковой структуры двухфазного пограничного слоя) равноверо-

ятно в любом месте протяженной пористой поверхности, то соотношение рассматриваемых величин должно быть некоторым числом, т. е.

$$\frac{\rho'' w_{кр}''^2}{g\delta(\rho'-\rho'')} \sim \frac{\rho'' w_{кр}''^2}{\sqrt{g\sigma(\rho'-\rho'')}} = \text{const}. \qquad (22.2.1)$$

Здесь $w_{кр}''$ имеет смысл «приведенной» критической скорости барботажа, т. е. критического объемного расхода газа с единицы полной поверхности рассматриваемой пластины. Извлекая для удобства из этого выражения квадратный корень, получаем критерий устойчивости вида

$$k = w_{кр}'' \sqrt{\rho''} / \sqrt[4]{g\sigma(\rho'-\rho'')}. \qquad (22.2.2)$$

Рис. 22.2. Зависимость первой критической плотности теплового потока от давления при кипении воды в большом объеме

Для рассмотренных выше условий ($\mu \to 0$, горизонтальная неограниченная пластина, неограниченный объем в целом неподвижной несжимаемой среды)

$$k = \text{const}. \qquad (22.2.3)$$

При кипении

$$w_{кр}'' = q_{кр}/(r\rho''). \qquad (22.2.4)$$

Для большого объема жидкости с исчезающей вязкостью при свободной конвекции для критического теплового потока автором в 1950 г. было получено выражение

$$q_{кр} = kr\sqrt{\rho''}\sqrt[4]{g\sigma(\rho'-\rho'')}, \qquad (22.2.5)$$

где $k$ — некоторая константа для несжимаемого двухфазного граничного слоя.

Приведенный выше вывод не связан с какими-либо специальными соображениями о структуре двухфазного потока, и поэтому критерий устойчивости (22.2.2) имеет весьма общее значение.

Рассмотренный в свое время Рэлеем случай устойчивости двух плоскопараллельных невязких потоков жидкости, когда тяжелая жидкость течет под легкой и имеют место возмущения типа $\exp[i(kx - nt)]$, где $x$ — координата и $t$ — время, характеризуется критерием $k$ с точностью до множителя $1 + \rho''/\rho'$. Зубер, применив метод Рэлея к системе кубических ячеек жидкости с вписанными в них сферическими паровыми пузырями, нашел, что для такой модели

$$\sqrt{\pi/(128\sqrt{3})} < k < \sqrt{\pi/128} \qquad (22.2.6)$$

или

$$k \approx \pi/24 \approx 0{,}13. \qquad (22.2.7)$$

На рис. 22.2 приведена зависимость $q_{кр}$, от давления для кипящей воды, рассчитанная по формуле (22.2.5) при $k = 0{,}14$. Там же нанесены результаты опытов Е. А. Казаковой с пластинами при естественной циркуляции в большом объеме дистиллированной воды. Отчетливо вырисовывается максимум значений первой критической плотности теплового потока в области давлений $(70 \div 100) \cdot 10^5$ Па, т. е. при $p/p_{кр} \approx 1/3$. Здесь $p_{кр}$ — критическое в термодинамическом смысле давление.

В областях глубокого вакуума и околокритического давления величина $q_{кр}$ стремится к нулю, т. е.

$$\left(\rho'' \to 0 \vee \begin{matrix} r \to 0 \\ \sigma \to 0 \end{matrix}\right) \Rightarrow q_{кр} \to 0. \qquad (22.2.8)$$

Эксперименты автора и И. Г. Маленкова показали, что при барботаже критерий устойчивости $k$ является отчетливой функцией критерия сжимаемости двухфазного слоя $M_*$. Соответствующие экспериментальные данные приведены на рис. 22.3 и 22.4 и описываются эмпирической формулой

$$k \doteq 30 M_*^{2/3}. \qquad (22.2.9)$$

При кипении в области $M_* > 3 \cdot 10^{-4}$ величина $k$ остается практически постоянной в пределах разброса опытных данных.

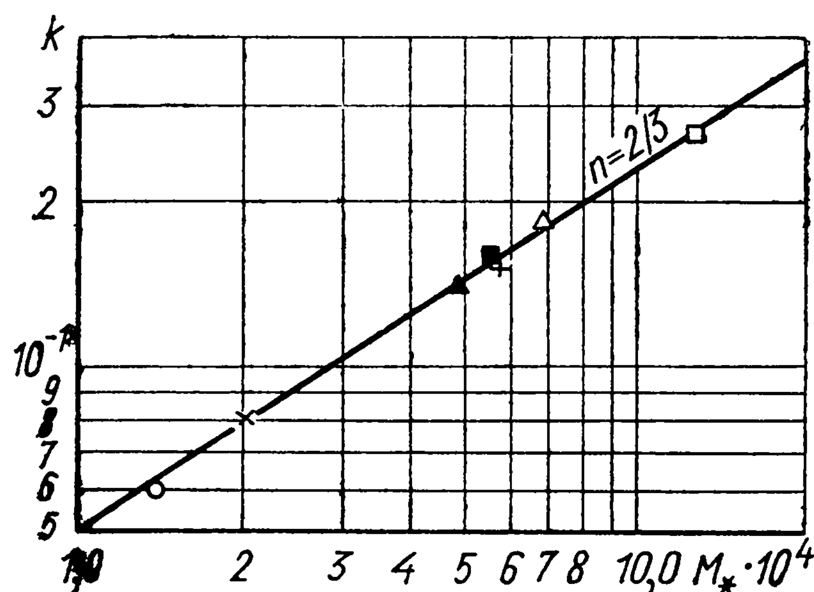



Рис. 22.3. Зависимость $k$ от сжимаемости при барботаже

*воды*: ○ — водородом, × — гелием, + — азотом, △ — аргоном; *этилового спирта*: ▲ — азотом, ■ — аргоном

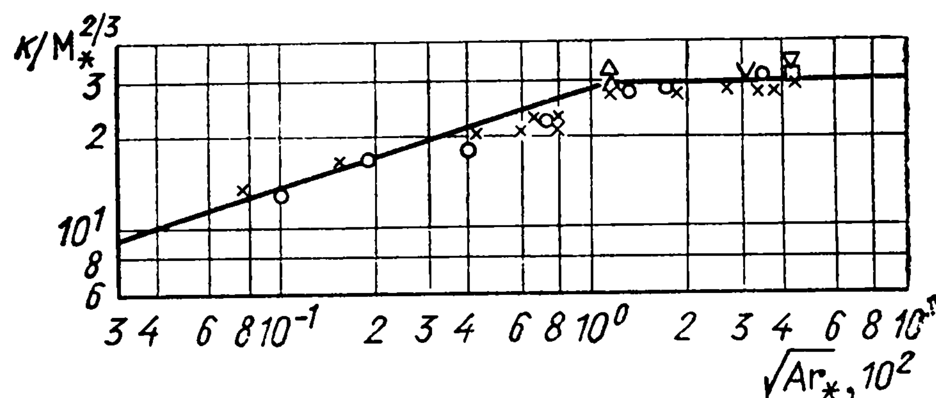



Рис. 22.4. Зависимость $k/M_*^{2/3}$ от $\sqrt{Ar_*}$ различных растворов и газов:

*растворы глицерина*: × — азот, ○ — гелий; *вода*: \/ — ксенон, ▽ — аргон, □ — азот; *этанол*: △ — аргон, /\ — азот

Автомодельность критерия $k$ относительно вязкости жидкости имеет место, по опытам автора и И. Г. Маленкова, при числах $Ar_* \geqslant 1 \cdot 10^4$.

## 22.3. ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРА И СОСТОЯНИЯ ПОВЕРХНОСТИ НАГРЕВА НА ВЕЛИЧИНУ $q_{кр}$

Шероховатость поверхности нагрева повышает значение критической плотности теплового потока, что, по-видимому, связано с повышением устойчивости жидких пленок при наличии выступов и впадин. Имеет значение также и ориентация поверхности нагрева относительно направления вектора силы тяжести, а именно: при горизонтальном расположении пластинки конечных размеров значение $q_{кр_1}$ меньше, чем для той же пластинки, поставленной на ребро. Объясняется это тем, что на нижней части горизонтальной пластинки скапливаются крупные паровые пузыри, способствующие более легкому возникновению сплошного парового слоя.

При кипении на горизонтальной трубе, обогреваемой изнутри конденсирующимся па-

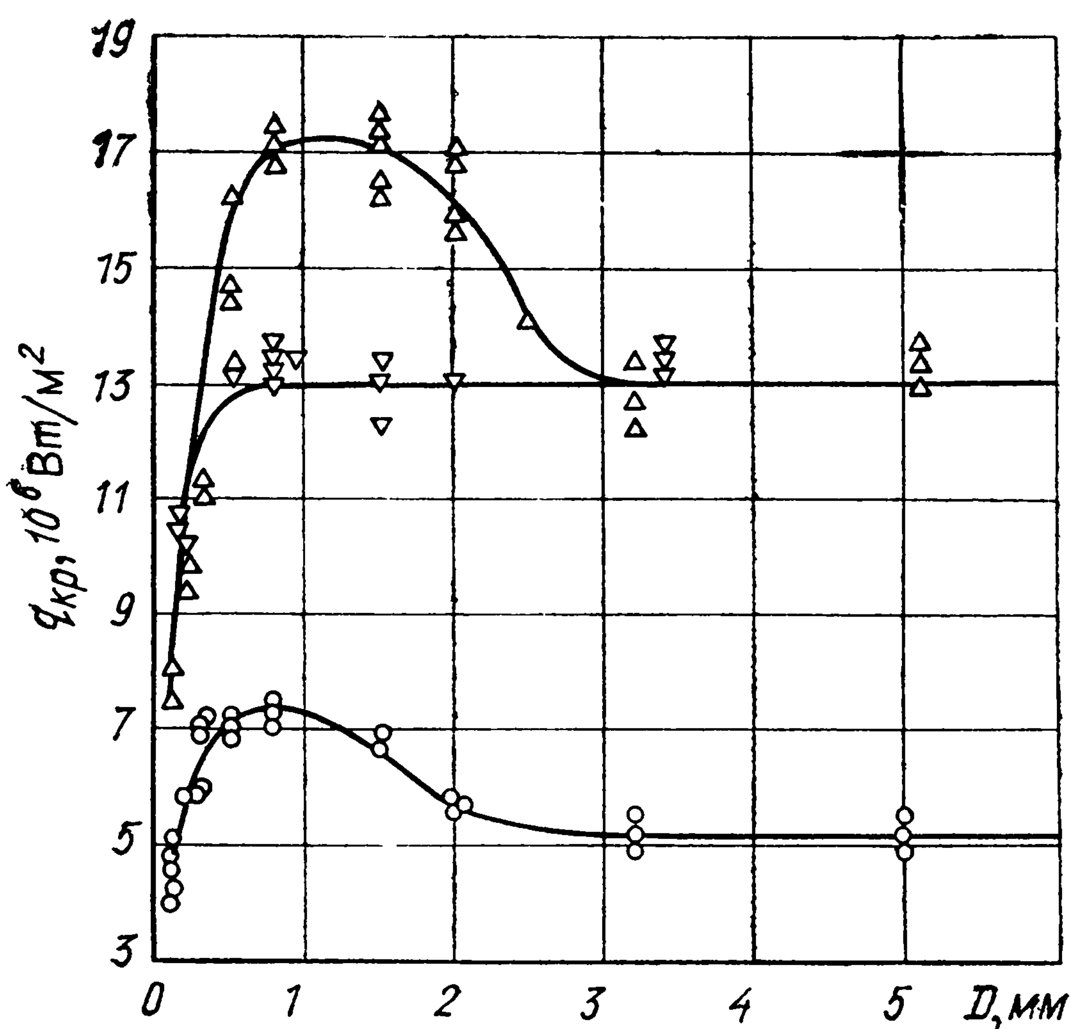



Рис. 22.5. Зависимость первой критической плотности теплового потока от поперечного размера поверхности нагрева при температуре насыщения при $p = 98 \cdot 10^3$ Па:

△ — вода, горизонтальные участки; ▽ — вода, вертикальные участки; ○ — этиловый спирт, горизонтальные участки

ром, значения первой критической плотности теплового потока также оказываются заметно ниже, чем при кипении на трубах, обогреваемых электрическим током. Так, в опытах Эйкина и Мак-Адамса значение $q_{кр_1}$ при кипении воды под атмосферным давлением на медной трубе диаметром 13 мм

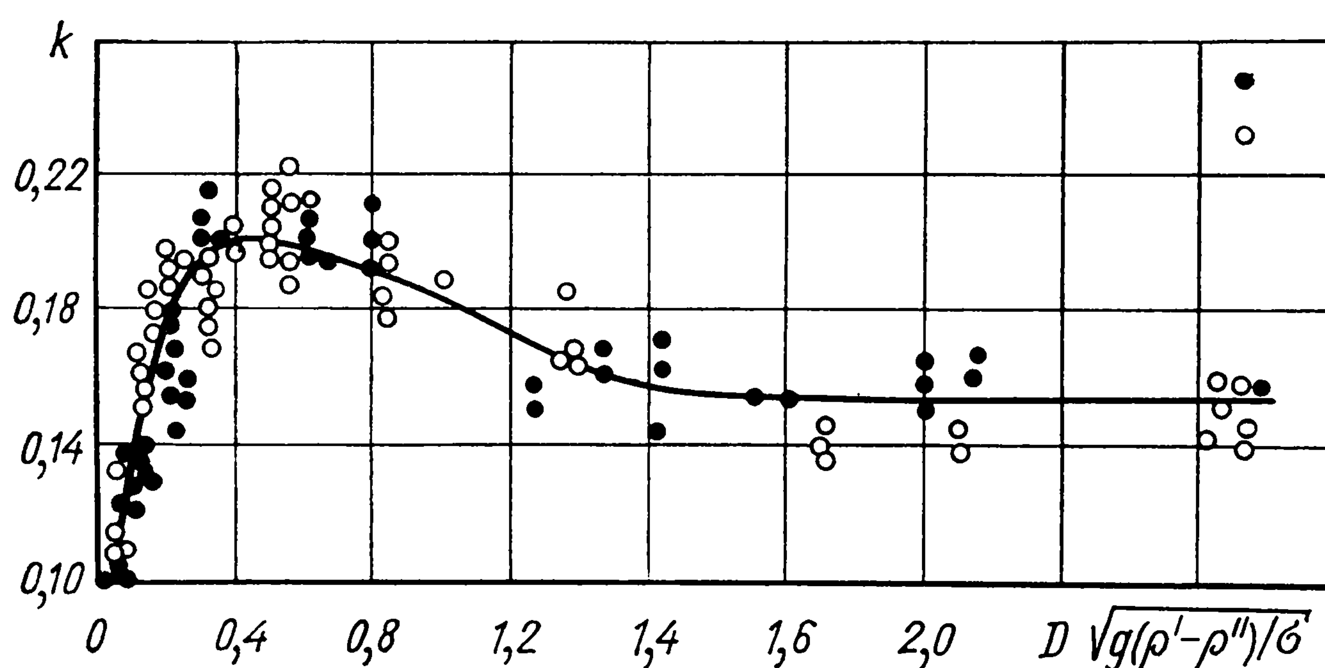



Рис. 22.6. Зависимость критерия устойчивости $k$ от комплекса $D\sqrt{g(\rho'-\rho'')/\sigma}$:

● — вода; ○ — этиловый спирт

оказалось равным 600 000 Вт/м², в то время как для горизонтальной плиты и электрически обогреваемых цилиндров соответствующее значение $q_{кр_1}$ больше 1 000 000 Вт/м². Такое существенное расхождение связано не только с некоторым застоем паровых пузырей в нижней части трубы, но и с существенной неравномерностью теплового потока по окружности горизонтальной трубы при конденсации в ней пара. Эта неравномерность обусловлена затоплением нижней части трубы конденсатом, в результате чего при сравнительно низком значении средней плотности теплового потока его локальные значения на верхней половине трубы могут достигнуть и даже превзойти истинные критические значения.



Рис. 22.7. Фотография кипения воды на тонкой проволоке при $p=98\cdot10^3$ Па и околокритической нагрузке

При размерах поверхности нагрева, соизмеримых с отрывным диаметром пузырей, т. е. порядка $\sigma/g\,(\rho'-\rho'')$, автомодельность кризиса кипения относительно этого фактора нарушается. Влияние поперечного размера поверхности нагрева на $q_{кр_1}$ было исследовано автором, Г. И. Бобровичем, И. И. Гогониным. Нагревателями служили достаточно протяженные цилиндры диаметром от 0,1 до 6 мм и пластины, теплоизолированные снизу и сверху с шириной от 5 до 500 мм. Здесь же нанесены данные Лайона при кипении гелия на торцевой поверхности цилиндра ($d$ = 9,91), теплоизолированной снизу и сверху. На рис. 22.5 показана соответствующая зависимость для воды и спирта при температурах насыщения. Отчетливо видна область, в которой критический тепловой поток не зависит от размеров поверхности нагрева, и область, в которой эта зависимость существенно проявляется.

В последнем случае $q_{кр_1}$ зависит как от диаметра цилиндра, так и от его ориентации относительно вектора силы тяжести. При горизон-

тальном расположении цилиндров наблюдается отчетливый максимум в зависимости $q_{кр}$ от $D$, отсутствующий для вертикальных цилиндров. Это различие связано с неодинаковыми условиями эвакуации пузырей с поверхности нагрева при горизонтальном и вертикальном расположении.

В области малых диаметров имеет место условие $\partial q_{кр}/\partial D < 0$.

На рис. 22.6 экспериментальные данные представлены в виде зависимости критерия устойчивости $k$ от комплекса $D\sqrt{g(\rho' - \rho'')/\sigma}$.

Как видно, весьма разнородные по размерным параметрам данные удовлетворительно описываются одной и той же кривой для данной геометрии нагре-

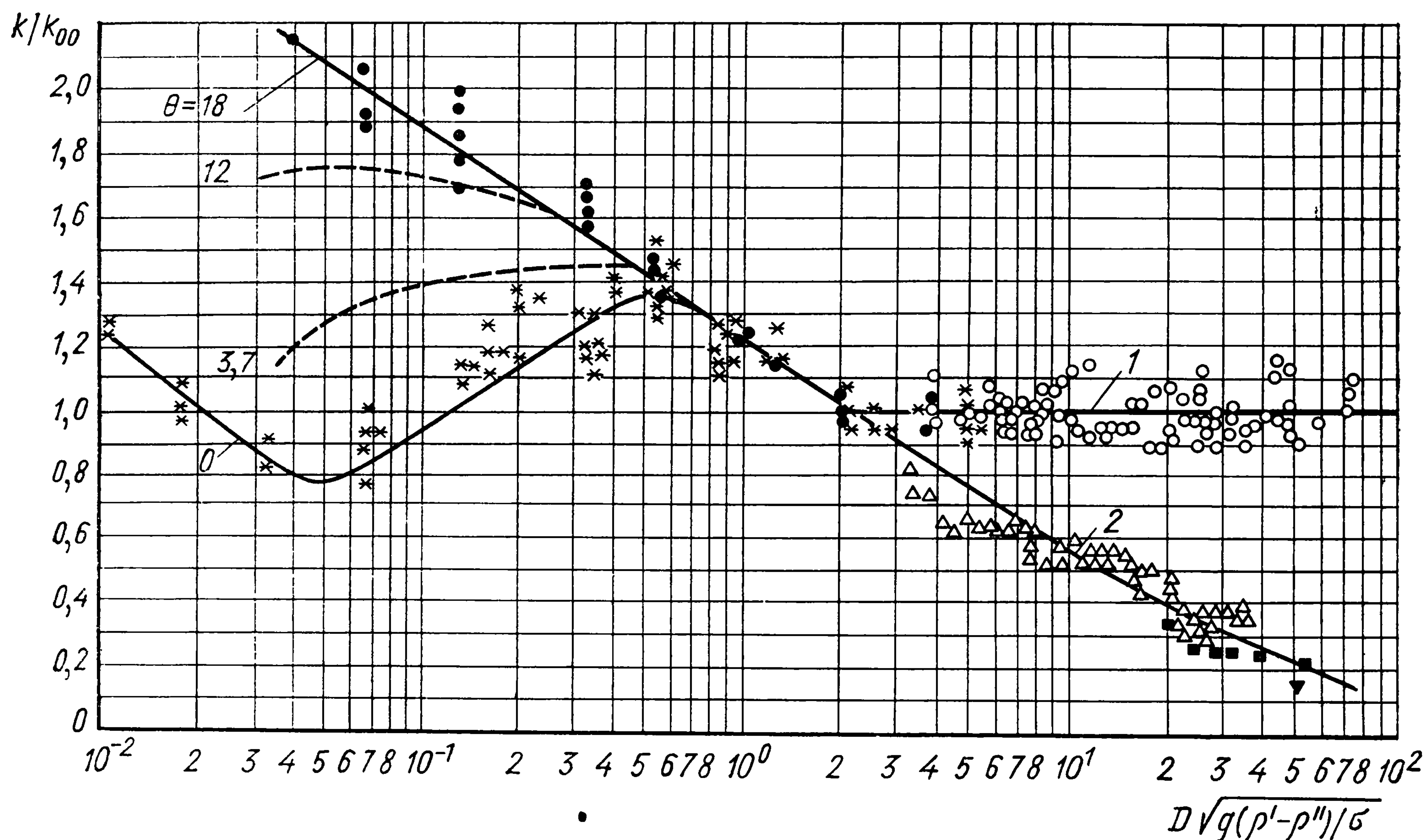



Рис. 22.8. Карта влияния размеров нагревателя на $q_{кр}$ при кипении в условиях свободной конвекции. Опыты на воде, этаноле, бензоле, спирто-водной смеси ($\theta = (c\vartheta/r)(\rho'/\rho'')^{3/4}$ — комплекс, учитывающий влияние недогрева жидкости до температуры насыщения):

1 — участок теплоизолирован снизу; 2 — участок теплоизолирован сверху

вателя (включая в это понятие и ориентацию относительно вектора силы тяжести). Таким образом, можно считать, что автомодельность кризиса кипения относительно размера нагревателя в условиях свободной конвекции для горизонтальных цилиндров имеет место при $D > 2\sqrt{\sigma/g(\rho' - \rho'')}$ и для вертикальных цилиндров при $D > 0{,}5\sqrt{\sigma/g(\rho' - \rho'')}$. Максимальное значение критерия $k$ для горизонтального цилиндра имеет место при

$$0{,}2 < D\sqrt{g(\rho' - \rho''/\sigma} < 0{,}8.$$

Как видно из рис. 22.7, при кипении на тонкой проволоке пузыри обволакивают в месте своего возникновения весь нагреватель, чем резко ухудшают локальный теплообмен и вызывают пережог, отождествляемый с кризисом кипения.

Полная картина влияния размеров нагревателя на первый критический тепловой поток при кипении насыщенной и недогретой жидкости в условиях свободной конвекции приведена на рис. 22.8 по данным, полученным автором, И. И. Гогониным и Н. В. Валукиной.

## 22.4. ПЕРЕХОД ОТ ПЛЕНОЧНОГО РЕЖИМА КИПЕНИЯ К ПУЗЫРЬКОВОМУ РЕЖИМУ (ВТОРОЙ КРИЗИС РЕЖИМА КИПЕНИЯ)

Второй кризис (прекращение пленочного кипения) выражается в распаде парового слоя и установлении на поверхности нагрева нормального пузырькового кипения.

В момент нарушения парового слоя в нем наблюдаются сильные пульсации. Поэтому можно полагать, что в данном случае устойчивость паровой пленки связана с соотношением динамических воздействий, пропорциональных $\rho'' w''^2$, и сил тяжести и поверхностного натяжения, т. е. также определяется величиной критерия устойчивости $k$.

Однако вследствие различий в начальных структурах двухфазного граничного слоя значение $k_2$ должно быть отличным от $k_1$.

При пленочном режиме кипения поверхность раздела фаз, а следовательно, и свободная энергия двухфазного граничного слоя меньше, чем при пузырьковом кипении. Поэтому, если скорость парообразования достаточна для равномерного питания уже возникшего сплошного парового слоя, последний более устойчив, чем двухфазный слой при пузырьковом кипении. Следовательно, при кипении в условиях свободной конвекции имеют место соотношения

$$\left(D \gg \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho'-\rho'')}} \wedge \begin{matrix} \mu' \to 0 \\ \mu'' \to 0 \end{matrix}\right) \Rightarrow \left(\frac{q_{кр_2}}{q_{кр_1}} = \mathrm{const} < 1\right). \qquad (22.4.1)$$

По имеющимся опытным данным, константа в этом уравнении близка к 0,2; при вынужденном течении роль поверхностного натяженияуменьшается и константа стремится к единице.

## 22.5. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХФАЗНОГО ГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Мерой относительной скорости течения жидкой компоненты двухфазного потока во многих случаях целесообразно считать модификацию числа Фруда

$$\mathrm{Fr}_* = w_0' \sqrt[4]{(\rho'-\rho'')/g\sigma}, \qquad (22.5.1)$$

где $w_0'$ — приведенная скорость жидкости, т. е. объемная скорость жидкой компоненты, отнесенная к полному сечению канала. При $\mathrm{Fr}_* \to 0$ имеет место первый предельный случай — свободная конвекция, основные законы которой для кипения в большом объеме жидкости рассмотрены выше. При $\mathrm{Fr}_* \gg 1$ кинетическая энергия жидкой фазы существенно превышает воздействие сил тяжести и поверхностного натяжения (второй, достаточно простой предельный случай).

Рассмотрим обтекание пластины неограниченным потоком жидкости, средняя температура которой меняется так, что становится равной температуре насыщения только вблизи выходной кромки. Тепловой поток, подводимый к пластине, равен критическому значению при заданных параметрах потока $\bar{T}' = T''$. Таким образом, в этой схеме устойчивый паровой слой может возникнуть только около выходной кромки, а основной поток не загроможден паровыми пузырями. На пластине развивается турбулентный пограничный слой жидкости, толщина которого пропорциональна скорости в степени, существенно меньшей единицы. С другой стороны, отрывной диаметр паровых пузырей при больших скоростях течения обратно пропорционален динамическому напору потока. Следовательно, при $\mathrm{Fr}_* \gg 1$

$$\delta/D_0 \sim w'^2, \qquad (22.5.2)$$

т. е. можно теоретически представить такое течение, в котором размеры пузырей существенно меньше толщины пограничного слоя. Кризис теплообмена наступает при вытеснении жидкости, находящейся между возникающими на

стенке паровыми пятнами, и появлении вследствие этого сплошного слоя пара.

Последний будет наиболее устойчивым, если в момент выброса пристенного слоя жидкости продольная компонента скорости течения жидкости около стенки будет минимальной. Эти условия аналогичны тем, которые имеют место при оттеснении пограничного слоя от проницаемой поверхности.

Как показано в гл. 21, при $\mu \to 0$ критический вдув через проницаемую поверхность определяется формулой

$$j_{кр} = 2c_{f_*} \rho_0' w_0'. \qquad (22.5.3)$$

Если паросодержание пристенного двухфазного слоя есть $\varphi_*$, то действительный поток, выбрасываемый в момент кризиса,

$$j_* = j_{кр}(1 - \varphi_*). \qquad (22.5.4)$$

Энергия, необходимая для создания потока $j_*$, берется за счет кинетической энергии генерируемого пара.

Полагая

$$\frac{j_*^2}{\rho'} \approx \left(\frac{q_{кр}}{\varphi_* r \rho''}\right)^2 \rho'', \qquad (22.5.5)$$

получаем формулу С. С. Кутателадзе и А. И. Леонтьева:

$$q_{кр} \approx 2c_{f_*} \varphi_* (1 - \varphi_*) r \sqrt{\rho' \rho''}\, w_0'. \qquad (22.5.6)$$

Отсюда с точностью до множителя $c_{f_*}\varphi_*(1 - \varphi_*)$ находим критерий устойчивости вида

$$\frac{w''_{кр}}{w_0'} \sqrt{\frac{\rho''}{\rho'}}. \qquad (22.5.7)$$

Физический смысл этого критерия ясен — он представляет собой меру отношения динамического потока газа (пара) к энергии, необходимой для ускорения частиц жидкости, отбрасываемых от стенки, до скорости основного потока. Поэтому этот критерий имеет более общее значение, чем данный выше его вывод в приложении к возникновению кризиса при кипении.

## 22.6. ВЛИЯНИЕ НЕДОГРЕВА ЖИДКОСТИ ДО ТЕМПЕРАТУРЫ НАСЫЩЕНИЯ НА КРИТИЧЕСКУЮ ПЛОТНОСТЬ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

Для возникновения паровой пленки на поверхности нагрева, погруженной в жидкость, средняя температура которой ниже температуры насыщения, необходим тепловой поток не меньше того, который требуется для создания критической скорости парообразования в насыщенной жидкости и поддержания на поверхности пленки температуры насыщения. Запишем этот поток в виде суммы:

$$q_{кр} \approx q_{кр*} + \alpha \Delta i, \qquad (22.6.1)$$

где $q_{кр*}$ — критический тепловой поток в насыщенной жидкости; $\alpha$ — коэффициент теплоотдачи от поверхности паровой пленки к потоку жидкости, определенный по разности энтальпий; $\Delta i = i - i'$ — разность энтальпий жидкости при температуре насыщения и температуре ядра потока.

При $c_p = \text{const}$ $\Delta i = c_p (T'' - \overline{T})$, где $\vartheta = T'' - \overline{T}$ — недогрев ядра потока жидкости до температуры насыщения. Отсюда

$$\tilde{q}_{кр} = q_{кр}/q_{кр*} \approx 1 + \alpha \Delta i / q_{кр*}. \qquad (22.6.2)$$

Допустим, что на поверхности пленки возникает квазистационарный пограничный слой жидкости. При $w \approx 0$ можно считать этот слой ламинарным и полагать, что

$$\mathrm{St} \sim \mathrm{Pr}^n \mathrm{Re}^{-1/2}, \qquad (22.6.3)$$

где $w \sim q_{\text{кр}}/(r\rho'')$; $l \sim \sqrt{\sigma/g(\rho'-\rho'')}$ и показатель степени $n$ при числе Прандтля равен —1/2 по схеме обтекания лобовой точки и —2/3 по схеме пограничного слоя на пластине. Тогда из уравнения (22.6.2) получим

$$\tilde{q}_{\text{кр}} \approx 1 + \zeta (\rho'/\rho'')^{3/4} \Delta i/r, \quad (22.6.4)$$

где

$$\zeta = \text{const}\, \text{Pr}^n \text{Ar}_*^{-1/4}.$$

Другая схема была предложена Трайбусом и Зубером. Ниже дается ее несколько модифицированное изложение.

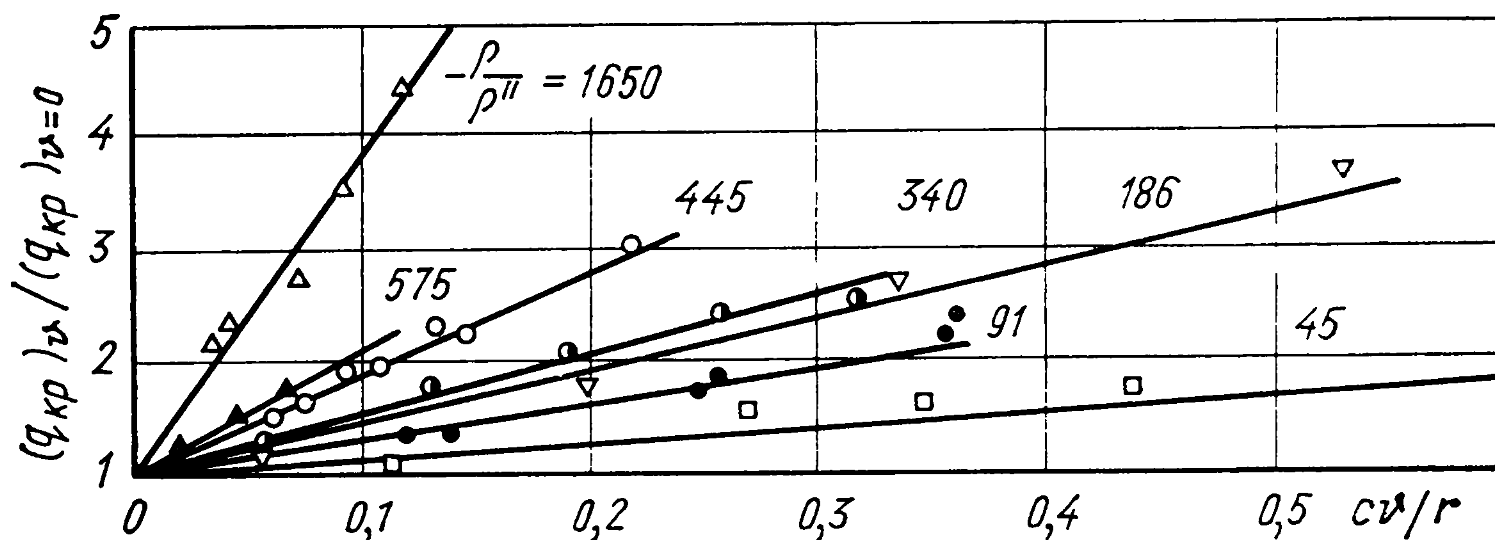



Рис. 22.9. Относительное изменение $q_{\text{кр1}}$ при кипении в недогретой жидкости (свободная конвекция) по опытам С. С. Кутателадзе и Л. Л. Шнейдермана:

*спирт*: ○ — $p = 98 \cdot 10^3$ Па, ◑ — $p = 19{,}6 \cdot 10^4$ Па, ● — $p = 49 \cdot 10^4$ Па, □ — $p = 18{,}6 \cdot 10^5$ Па; *вода*: △ — $p = 98 \cdot 10^3$ Па, ▲ — $p = 29 \cdot 10^4$ Па; *изооктан*: ▽ — $p = 98 \cdot 10^3$ Па

Допустим, что слои холодной жидкости, проникающие к поверхности парового слоя после отрыва от него очередного пузыря, прогреваются за счет молекулярной теплопроводности. Из теории теплопроводности известно, что плотность теплового потока на поверхности полуограниченного тела при мгновенном увеличении температуры на величину $\vartheta$

$$q = 2\vartheta \sqrt{\lambda c \rho t}. \quad (22.6.5)$$

Отсюда средняя плотность теплового потока на границе раздела фаз за период $= 1/U$, где $U$ — частота образования пузырей,

$$\bar{q}_{\text{гр}} = 2\vartheta \sqrt{\lambda' c' \rho'/U}. \quad (22.6.6)$$

Количество тепла, идущего на собственное парообразование, равно $q_{\text{кр}_0}$, а пузыри и волны на пленке образуют ячейки величиной порядка лапласовой постоянной. Тогда можно написать, что

$$U \approx 3q_{\text{кр}_0}/(r\rho'' R_0); \quad R_0 \approx \sqrt{\sigma/g(\rho'-\rho'')},$$

т. е.

$$U \approx 3k_1 \left(g\,\frac{\rho'-\rho''}{\rho''}\right)^{1/2} \left(g\,\frac{\rho'-\rho''}{\sigma}\right)^{1/4}. \quad (22.6.7)$$

Отсюда

$$\tilde{q}_{\text{кр}} \approx 1 + \bar{q}_{\text{гр}}/q_{\text{кр}_0} \approx 1 + 2\sqrt{3/k_1}\,(\text{Pr}^2 \text{Ar}_*)^{-1/4} (\rho'/\rho'')^{3/4} \Delta i/r, \quad (22.6.8)$$

что совпадает со схемой обтекания лобовой точки. Расхождение со схемой обтекания пластины имеет порядок $\text{Pr}^{1/6}$.

Значение комплекса $(\text{Pr}^2\text{Ar}_*)^{1/4}$ для многих жидкостей лежит в весьма узких пределах, претерпевая заметные изменения только вблизи критической точки. Так, при $0{,}01 p_{\text{кр}} < p < 0{,}5 p_{\text{кр}}$ для воды значение этого комплекса находится в пределах 34—45, для бензола — 45—55, для спирта — 35—47.

В связи с этим практически формулой (22.6.4) можно пользоваться, полагая $\zeta = \text{const} \approx 0{,}1$.

На рис. 22.9 показаны результаты опытов автора и Л. Л. Шнейдермана и более поздние данные других исследователей, хорошо подтверждающие формулу (22.6.4).

При больших скоростях течения паровая пленка тонкая и касательные напряжения в ней близки к напряжениям на стенке, т. е. $\mathrm{St} \approx c_{f_0}/2$. Тогда из формул (22.6.4) и (22.5.6) следует, что при $\mathrm{Fr}_* \gg 1$

$$\tilde{q}_{\text{кр}} \approx 1 + \zeta (\rho'/\rho'')^{1/2} \Delta i/r, \tag{22.6.9}$$

где $\zeta^{-1} = 4\varphi_* (1 - \varphi_*)$. При $\varphi_* \approx \pi/4$ $\zeta \approx 1{,}5$. Из выражения (22.6.9) следует, что при больших недогревах, когда $q_{\text{кр}} \gg q_{\text{кр}_0}$, имеет место особый тип вырождения кризиса кипения, характеризуемый условием

$$\{\tilde{q}_{\text{кр}} \gg 1, \;\; q_{\text{кр}} \to (c_{f_0}/2)\, \rho' w_0' \,\Delta i\}. \tag{22.6.10}$$

## 22.7. КРИТИЧЕСКИЙ ТЕПЛОВОЙ ПОТОК В ОБЛАСТИ УМЕРЕННЫХ СКОРОСТЕЙ ТЕЧЕНИЯ

При обтекании пластины неограниченным потоком жидкости величина $q_{\text{кр}}$ с ростом скорости течения меняется плавно от значений, определяемых формулами (22.2.5)—(22.6.4), до значений, определяемых формулами (22.5.6)—(22.6.9).

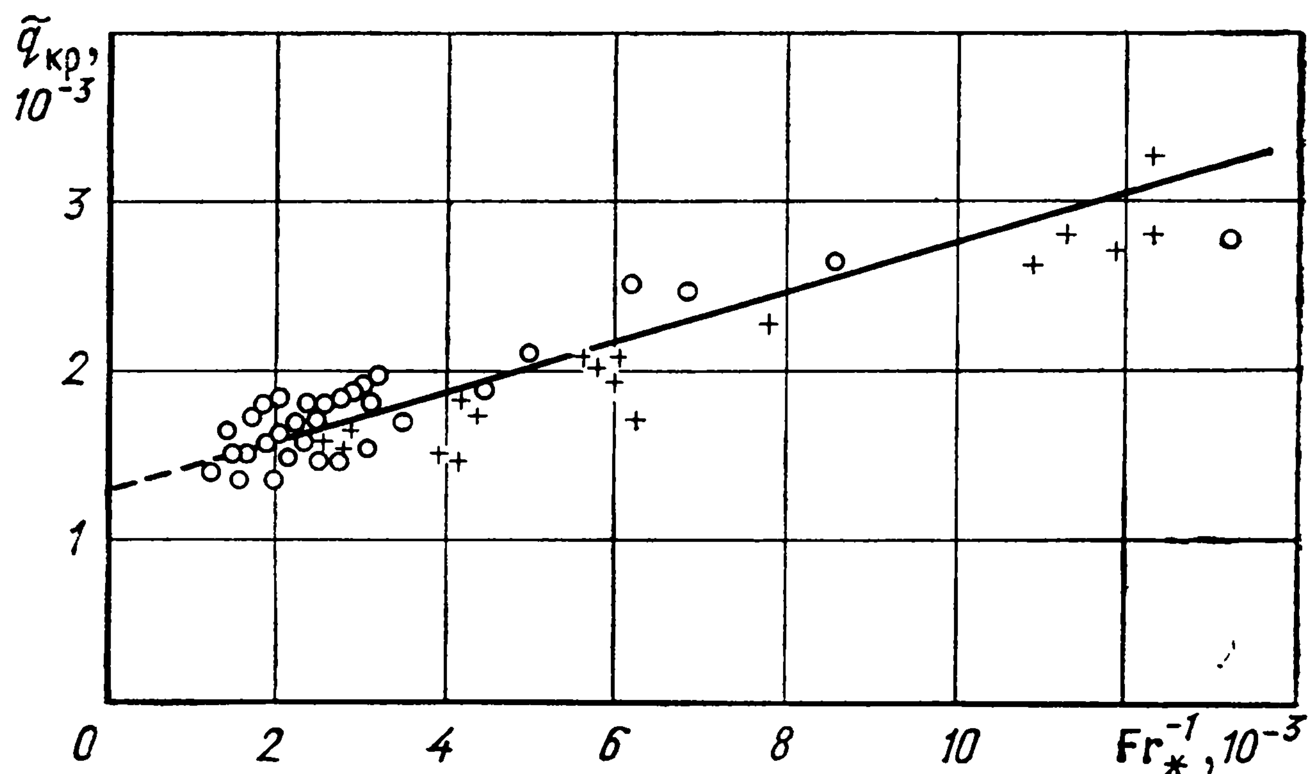



Рис. 22.10. Сопоставление экспериментальных данных с формулой (22.7.2) для спирта в интервале давлений $(5 \div 55) \cdot 10^5$ Па и для аммиака при $p = 35 \cdot 10^5$ Па: ○ — спирт; + — аммиак

Простейшая интерполяция может быть записана как сумма этих значений, поскольку критический тепловой поток при больших скоростях течения существенно больше, чем при свободной конвекции:

$$q_{\text{кр}_0} \approx k_{00}\, r \sqrt{\rho''}\, \sqrt[4]{g\sigma(\rho' - \rho'')} + k_0\, r \sqrt{\rho' \rho''}\, w_0'. \tag{22.7.1}$$

Здесь $k_{00}$ — значение константы в формуле (22.2.5) и $k_0$ — значение константы в выражении (22.5.6). Для области больших и умеренных скоростей влияние недогрева можно учитывать по формуле (22.6.9). Тогда при $\varphi_* \approx \pi/4$

$$\tilde{q}_{\text{кр}} \approx k_0 + k_{00}\, \mathrm{Fr}_*^{-1}, \tag{22.7.2}$$

где

$$\tilde{q}_{\text{кр}} = q_{\text{кр}} / r w_0' \sqrt{\rho' \rho''}\, \left(1 + 1{,}6 \sqrt{\rho'/\rho''}\, \Delta i/r\right);$$

$$\mathrm{Fr}_* = w_0' \sqrt[4]{\frac{\rho'^2}{g\sigma(\rho' - \rho'')}}.$$

На рис. 22.10 дано сопоставление этой формулы с опытами Л. С. Штоколова и Д. Р. Бартца для значений параметра $(\Delta i/r)\sqrt{\rho'/\rho''} < 3$. При больших значениях этого параметра наблюдается более медленное изменение критического

теплового потока с ростом энтальпии недогрева, а кризис возникает не на выходной кромке, а сразу по всей поверхности нагрева. Однако рассмотрение этого еще мало изученного явления выходит за рамки данной книги.

Аналогичные зависимости имеют место и при охлаждении пластины перпендикулярно набегающей на нее струей жидкости (рис. 22.11). Опыты были проведены Б. Ш. Чхеидзе под руководством автора. Для струи диаметром, примерно равным диаметру поверхности нагрева, при энтальпии недогрева

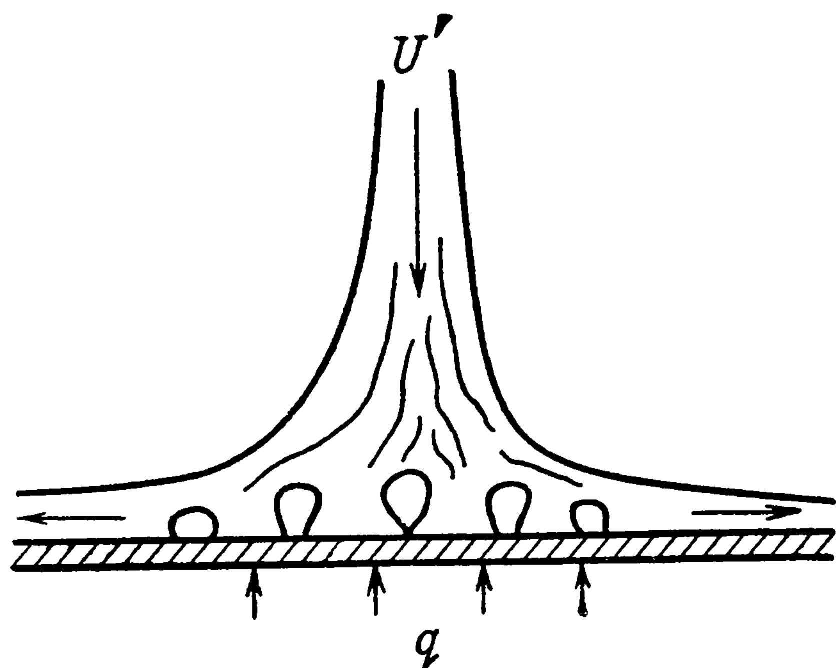


Рис. 22.11. Схема задачи об охлаждении пластины набегающей струей

$$\Delta i < 0{,}9r\sqrt{\rho''/\rho'} \qquad (22.7.3)$$

получена зависимость

$$k = 0{,}14 + 0{,}014\,\mathrm{Fr}_*. \qquad (22.7.4)$$

При

$$\Delta i > 0{,}9r\sqrt{\rho''/\rho'} \qquad (22.7.5)$$

$$\tilde{q}_{\text{кр}} = 1 + 0{,}4\,(\Delta i/r)\sqrt{\rho'/\rho''}. \qquad (22.7.6)$$

Соответствующие экспериментальные данные показаны на рис. 22.12. Отчетливо наблюдаются область автомодельности относительно параметра недогрева и область существенного влияния энтальпии недогрева на критический тепловой поток.

При течениях в трубах картина возникновения кризиса кипения при сравнительно небольших скоростях циркуляции ($w_0 = w_0' + w_0''\rho''/\rho'$) может быть весьма сложной. В этом случае параметр $\Delta i/r = 1/\underset{\sim}{K}$ можно рассматривать как «отрицательное массовое паросодержание» потока $-\tilde{x}$, а при $\Delta i < 0$, т. е. когда $\bar{i} > i'$, этот параметр точно равен массовому паросодержанию потока.

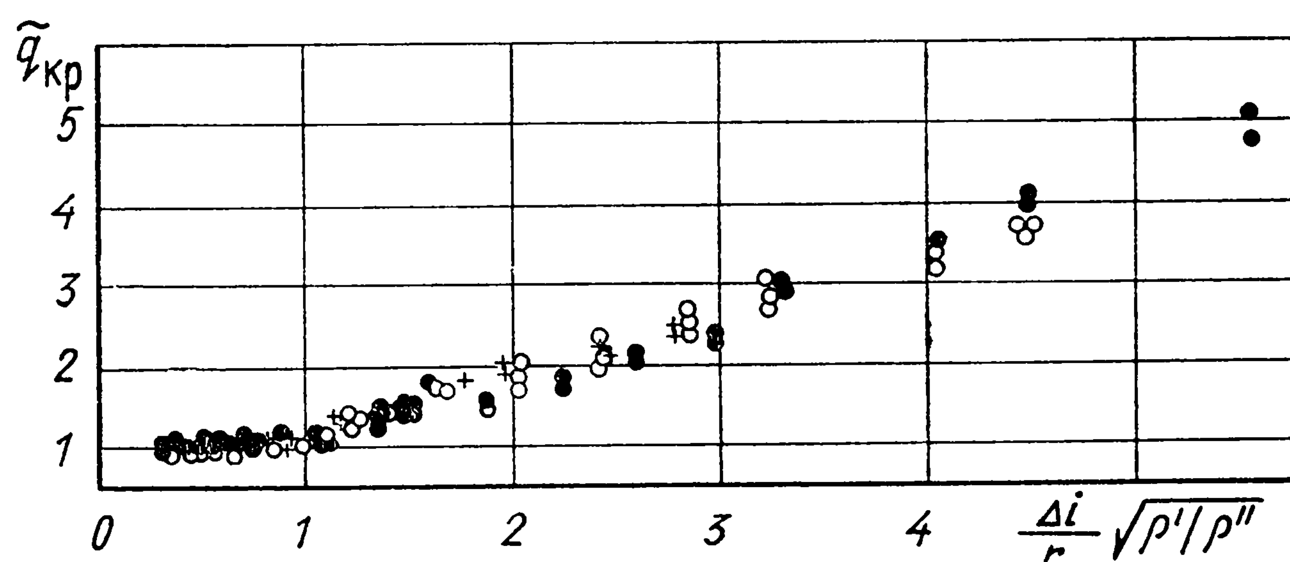


Рис. 22.12. Обобщение экспериментальных данных по критическим тепловым потокам при охлаждении поверхности пластины падающей струей:

● — вода; ○ — этанол; + — фреон-113

Проведенный выше анализ предельных режимов возникновения пленочного кипения показывает, что в общем случае должна существовать связь между следующими гидродинамическими и тепловыми параметрами потока:

$$k = \Phi\left(\mathrm{Fr}_*;\ \mathrm{Ar}_*;\ \mathrm{Pr};\ \rho'/\rho'';\ \underset{\sim}{K};\ \delta\sqrt{g(\rho'-\rho'')/\sigma};\ L/\delta\right), \qquad (22.7.7)$$

где $\delta$ — характерный поперечный размер канала и $L$ — длина канала.

На рис. 22.13 приведена характерная зависимость $q_{\text{кр}}$ от $\tilde{x}$ для беспульсационных режимов в круглых трубах по опытам В. Е. Дорощука и Ф. П. Фрид. В области «отрицательных паросодержаний» отчетливо видны прямолинейные зависимости. В области положительных паросодержаний продолжается монотонное снижение значения критического потока, но зависимость $q_{\text{кр}} = f(x)$ носит более сложный характер.

При пульсациях в циркуляционном контуре величина $q_{\text{кр}}$ имеет максимумы в области значений $0 < x < 0{,}2$. Эти максимумы, обнаруженные впервые

в опытах М. А. Стыриковича, З. Л. Миропольского и М. Е. Шицмана, отчетливо наблюдаются при низких давлениях и вырождаются при высоких давлениях.

В области сравнительно небольших чисел Fr (<100) и $\tilde{x} < 0$ критерий устойчивости $k$ приблизительно пропорционален корню квадратному из числа

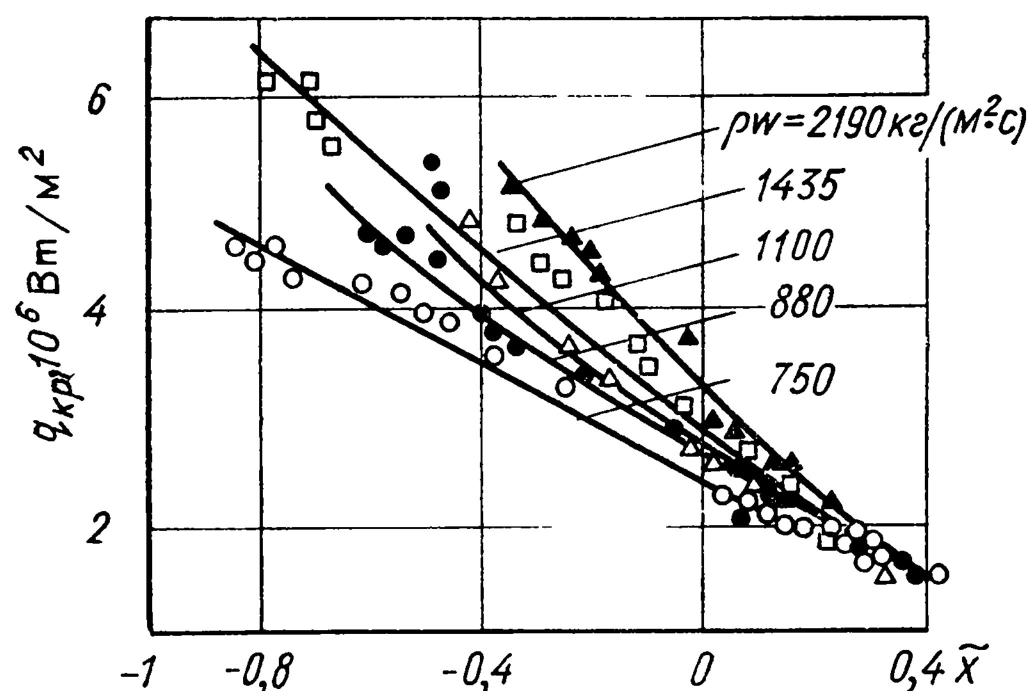



Рис. 22.13. Зависимость $q_{кр}$ от паросодержания при кипении воды в трубе ($p=170\cdot10^5$ Па)

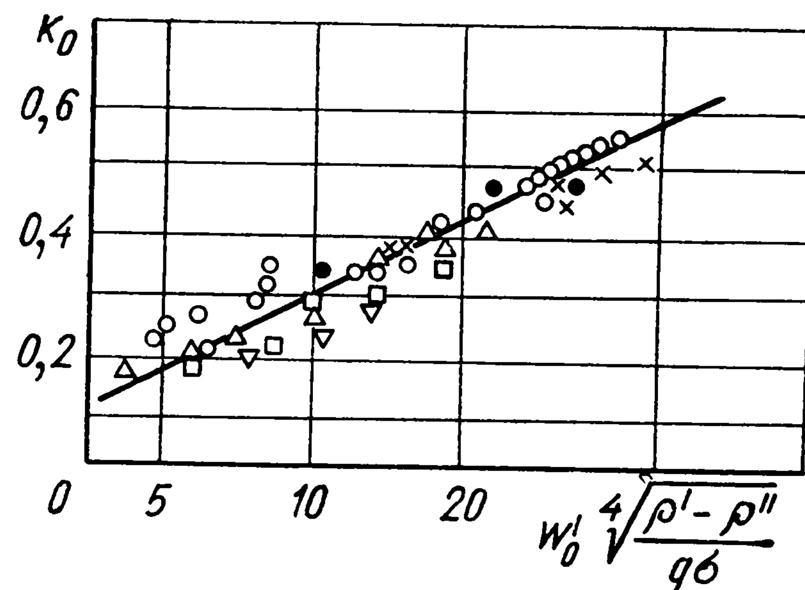



Рис. 22.14. Зависимость критерия $k$ от критерия $Fr_*$ при $x=0$ по опытам с широкими щелями:

○ — $p = 98\cdot10^3$ Па, С. С. Кутателадзе; ●, △, □, ▽ — $p=98\cdot10^3$Па, $3\cdot10^6$, $5\cdot10^6$ $9\cdot10^6$, Е. К. Аверин и Г. Н. Кружилин, ×—$p=(1\div22)\cdot10^6$ Па, В.С. Чиркин и Юкин;

Фруда. Так, показанные на рис. 22.14 опыты автора, Е. К. Аверина и Г. Н. Кружилина, В. С. Чиркина и Юкина с щелевыми каналами описываются эмпирической зависимостью ($\tilde{x} \approx 0$)

$$k \approx 0{,}085\sqrt{Fr_*}, \qquad (22.7.8)$$

а опыты З. Л. Миропольского и М. Е. Шицмана с круглыми трубами — зависимостью ($\tilde{x} \approx 0$)

$$k = 0{,}023\sqrt{Fr_*}. \qquad (22.7.9)$$

В более широких диапазонах параметров, но все же в области умеренных значений $Fr_*$, зависимость имеет более сложный характер. Так, В. И. Субботин

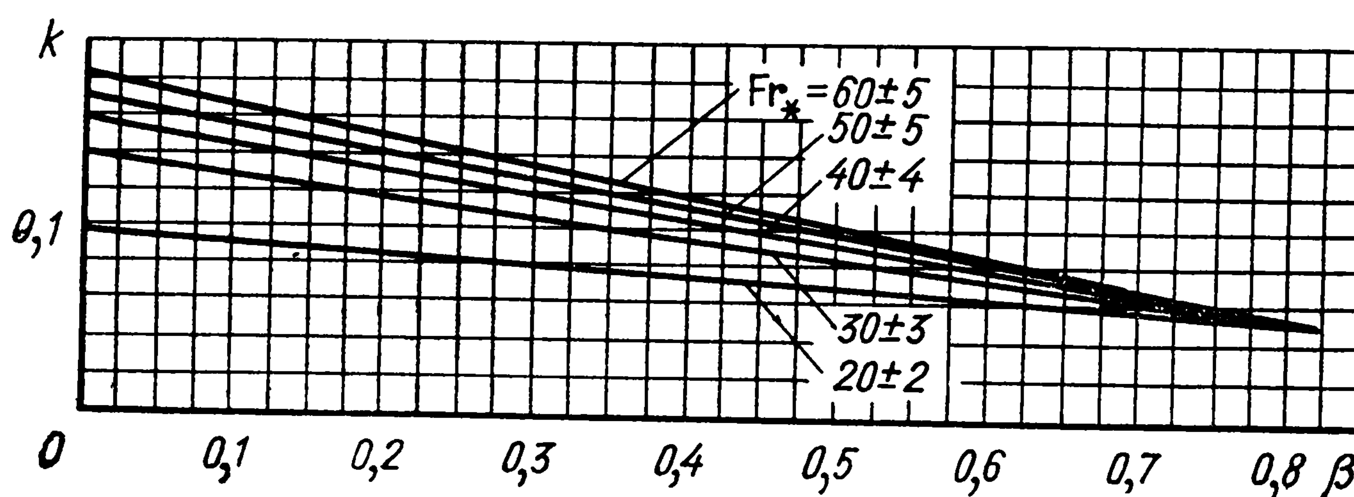



Рис. 22.15. Зависимость критерия $k$ от β и $Fr_*$ в области положительных значений паросодержания (β<0,8)

и его сотрудники обнаружили, что при очень больших скоростях течения в области низких давлений наблюдается даже некоторый минимум в зависимости $q_{кр}(w_0')$.

На рис. 22.15 показана зависимость ($\tilde{x} \approx 0$)

$$k = f\,(Fr_*;\ \beta), \qquad (22.7.10)$$

где β — объемное расходное паросодержание потока, построенное Р. А. Рыбиным по большому количеству опытов с кипением воды в протяженных круглых трубах, для умеренных значений $Fr_*$ и $\beta < 0{,}8$. При $\beta > 0{,}8$ однозначность этой функции нарушается.

Однако в широком интервале давлений, паросодержаний (положительных и отрицательных), скоростей течения зависимость критических тепловых потоков от этих факторов очень сложна, неоднозначна и до сих пор еще мало изучена.

Попыткой как-то упорядочить данные хотя бы для простейшей ситуации явились рекомендации по расчету кризиса теплоотдачи при кипении воды в равномерно обогреваемых круглых трубах. Эти рекомендации были составлены

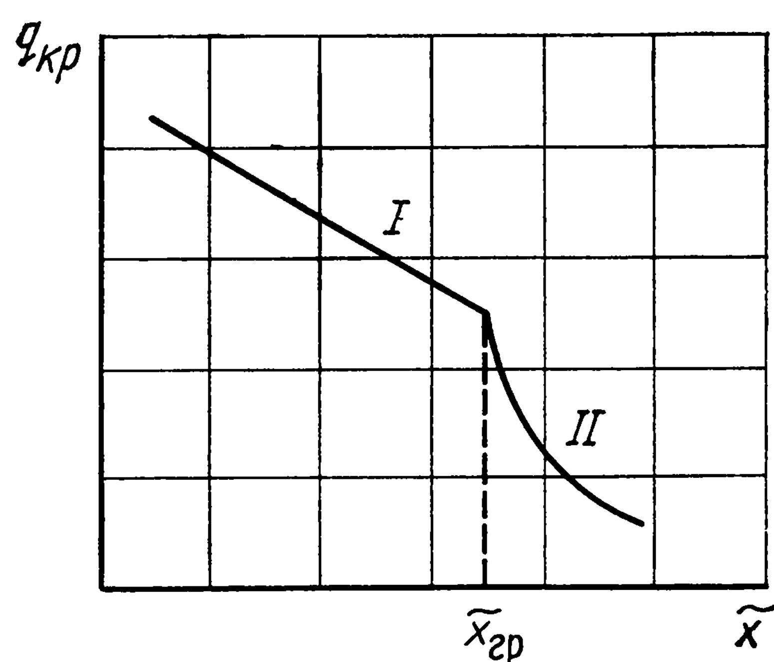


Рис. 22.16. Схема зависимости критической плотности теплового потока от массового паросодержания при кипении в трубе при умеренных давлениях, когда орошение стенки трубы не интенсивно

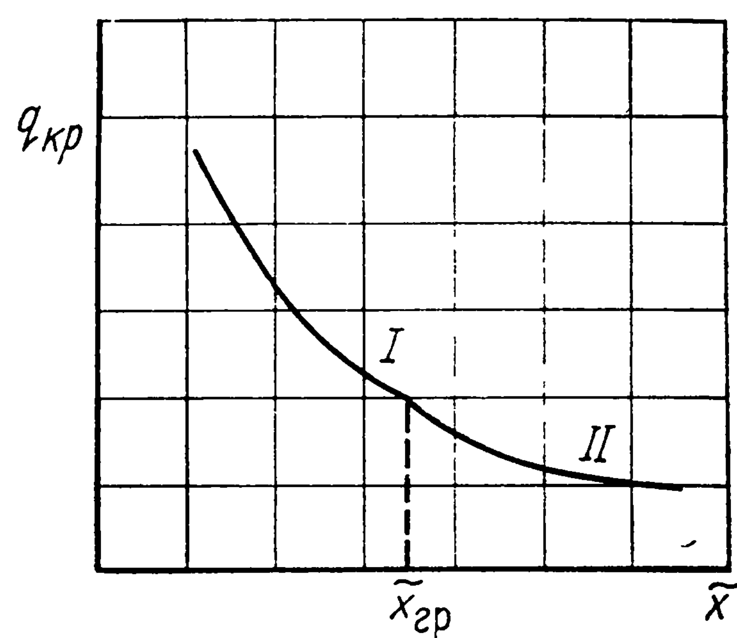


Рис. 22.17. Схема зависимости $q_{кр}(\tilde{x})$ при интенсивном орошении стенки трубы из потока пара, несущего диспергированную влагу

большой рабочей группой под председательством Б. С. Петухова. Различают два рода кризисов — гидродинамический, связанный с возникновением пленочного кипения (который только и рассматривался выше), и кризис высыхания (полного испарения) пристенной пленки жидкости, который может протекать как при наличии, так и в отсутствие орошения стенки трубы уносимыми потоками пара каплями жидкости.

На рис. 22.16 показана схема изменения критического теплового потока с ростом положительного массового паросодержания при давлениях меньше 15 МПа. Кривая *I* соответствует явлению возникновения пленочного кипения (кризис первого рода по терминологии В. Е. Дорощука). Кривая *II* соответствует процессу высыхания пленки при дисперсно-кольцевом течении жидкой фазы (кризис второго рода). На рис. 22.17 показаны характерные графики размытого перехода от одного критического режима к другому, наблюдаемые при высоких давлениях. Зависимость первого типа (см. рис. 22.16) соответствует слабому орошению стенки трубы каплями жидкости из потока пара. Размытая картина (см. рис. 22.17) соответствует значительному орошению. В первом случае наступление кризиса второго рода условно можно характеризовать некоторым критическим (граничным) массовым паросодержанием $\tilde{x}_{гр}$ (табл. 22.1). Соответствующие критические плотности тепловых потоков приведены в табл. 22.2.

Таким образом, накопленный в настоящее время обширный экспериментальный материал о кризисах теплообмена при кипении в трубах и каналах пока еще не обобщен надлежащим образом. В литературе к данной главе приведены источники, достаточно полно освещающие имеющееся положение и содержащие сводки различного рода эмпирических формул и рекомендаций.

Таблица 22.1

**Граничные массовые паросодержания при кипении воды в круглой трубе диаметром 8 мм**

| $\rho' w_0$, кг/(м²·с) \ $p$, МПа | 3—5 | 7 | 10 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|
| 750 | 0,75 | 0,70 | 0,60 | 0,55 | 0,45 |
| 1000 | 0,65 | 0,60 | 0,50 | 0,45 | 0,35 |
| 1500 | 0,55 | 0,45 | 0,40 | 0,35 | 0,30 |
| 2000 | 0,45 | 0,40 | 0,30 | 0,30 | 0,30 |
| 2500 | 0,40 | 0,35 | 0,30 | 0,30 | — |
| 3000 | 0,35 | 0,30 | 0,30 | — | — |
| 4000 | 0,30 | 0,25 | — | — | — |
| 5000 | 0,30 | — | — | — | — |

Таблица 22.2

**Выборочные данные из скелетной таблицы критических плотностей теплового потока (мВт/м²) при кипении воды в круглой трубе диаметром 8 мм при различных давлениях**

| $\rho' w_0$, кг/(м²·с) \ $\tilde{x}$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | $\rho' w_0$, кг/(м²·с) \ $\tilde{x}$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $p = 3$ МПа | | | | | 16 МПа | | |
| 750 | | 7,50 | 6,75 | 5,50 | 750 | 2,00 | 1,50 | 1,20 | 0,80 |
| 1500 | 8,00 | 6,55 | 5,40 | 3,80 | 1500 | 2,30 | 1,60 | 1,15 | 0,45 |
| 2500 | 7,60 | 5,50 | 4,25 | 2,30 | 2500 | 2,65 | 1,80 | 1,25 | 0,50 |
| 4000 | 7,20 | 4,80 | 3,50 | | 4000 | 3,15 | 2,10 | 1,45 | 0,70 |
| 5000 | 7,05 | 4,30 | 3,30 | | 5000 | 3,75 | 2,40 | 1,65 | 0,80 |
| | | 10 МПа | | | | | 20 МПа | | |
| 750 | 4,55 | 3,55 | 3,05 | 2,55 | 750 | 1,35 | 0,80 | 0,65 | 0,45 |
| 1500 | 4,50 | 3,30 | 2,60 | 1,55 | 1500 | 1,50 | 1,15 | 0,85 | 0,40 |
| 2500 | 4,30 | 2,80 | 2,05 | | 2500 | 1,75 | 1,45 | 1,10 | 0,55 |
| 4000 | 4,50 | 2,40 | 1,55 | 0,55 | 4000 | 2,00 | 1,70 | 1,40 | 0,75 |
| | | | | | 5000 | 2,30 | 2,10 | 1,70 | 0,90 |

## 22.8. КРИЗИС КИПЕНИЯ В БИНАРНЫХ СМЕСЯХ

Работами Ван-Вийка, Ван-Стралена, В. Г. Фастовского, Р. И. Артыма, Г. И. Бобровича, В. Н. Москвичевой и др. было обнаружено, что при кипении растворов критическая плотность теплового потока зависит от концентрации компонент весьма сложным образом. Автором и его сотрудниками подробно был исследован кризис кипения бинарных смесей, образующих нестабильные пены на примере спирто-водяных растворов (рис. 22.18). Аналогичные зависимости имеют место и для систем вода—*н*-пропанол, вода—метилэтилкетон, вода—*н*-бутанол и некоторых других.

Отчетливо обнаруживаются максимумы значений $q_{кр}$, которые зависят как от размеров нагревателя, так и от давления в системе. Эти максимумы не объясняются изменением физических свойств, входящих в формулу (22.2.5), что видно из сопоставления экспериментальных кривых на рис. 22.18 с кривой, рассчитанной по формуле (22.2.5) при подстановке в нее физических свойств смеси при данной концентрации. В области низких концентраций спирта в воде экспериментальные данные для пластины приближаются к расчетным зна-

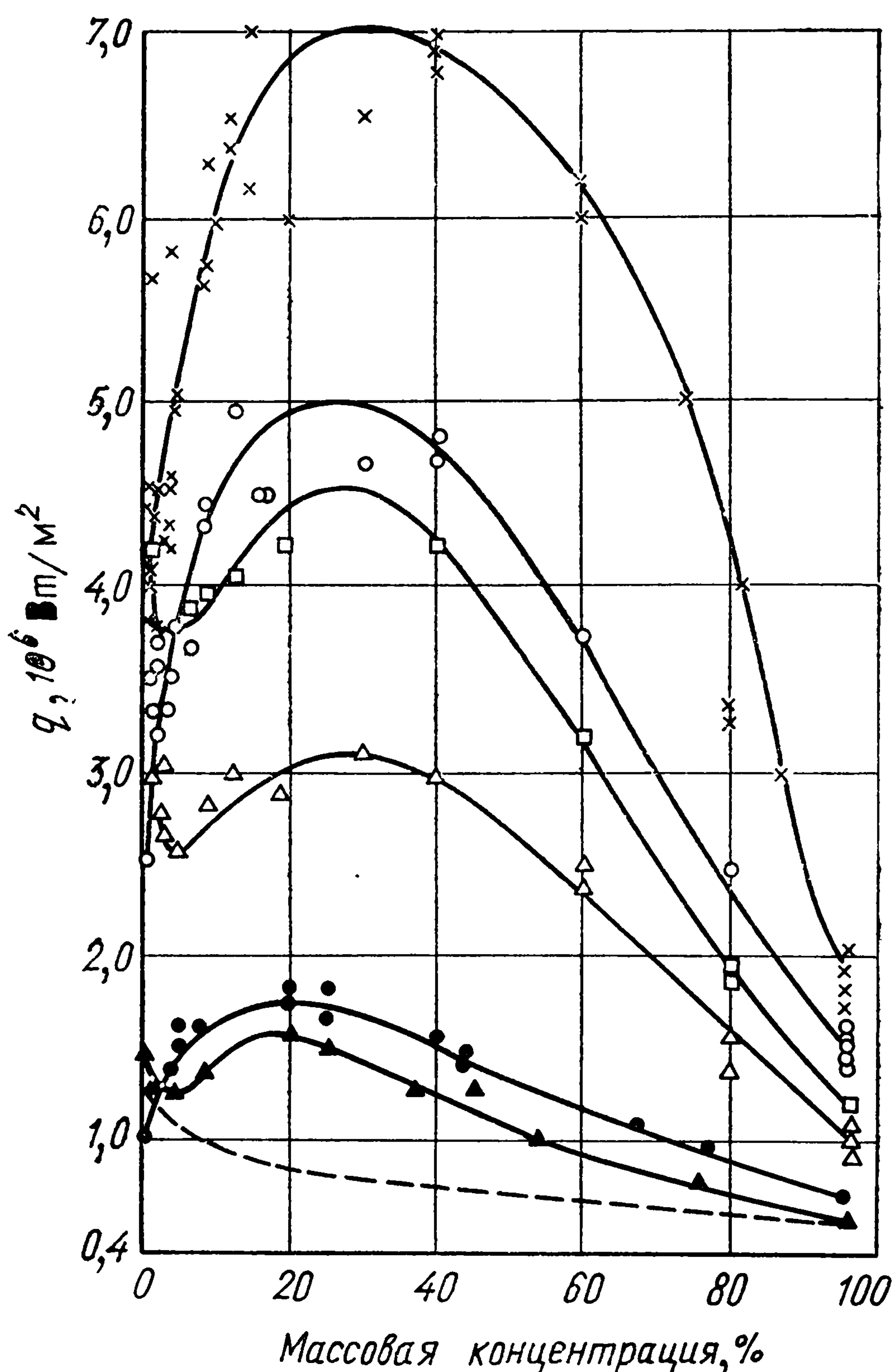



Рис. 22.18. Зависимость $q_{кр_1}$ от массовой концентрации спирта в воде для разных размеров поверхности нагрева:

● — проволока ($D = 0{,}5$ мм), $p = 98 \cdot 10^3$ Па; ▲ — пластина на ребре, $p = 98 \cdot 10^3$ Па; — — — — расчетная кривая для $p = 98 \cdot 10^3$ Па; △ — пластина на ребре, $p = 11 \cdot 10^5$ Па; □ — пластина на ребре, $p = 31 \cdot 10^5$ Па; ○ — проволока $D = 0{,}5$ мм, $p = 11 \cdot 10^5$ Па; × — проволока $D = 0{,}5$ мм, $p = 31 \cdot 10^5$ Па

чениям, а при больших концентрациях характер опытных кривых резко меняется.

Как видно из рис. 22.19, максимум этой зависимости находится примерно в той же зоне концентраций $C$, что и максимум зависимости $q_{кр}(C)$.

Особенностью кипения таких растворов, как спирто-водяная смесь, является склонность к образованию нестабильной пены. Интенсивность пенообразования в определенной мере качественно характеризуется кривой $\Delta C$. Поэтому изменения в структуре пены при кипении смеси формально можно оценить величиной

$$\widetilde{\Delta C} = \Delta C / \Delta C_m, \qquad (22.8.1)$$

где $\Delta C_m$ — максимальная разность летучей компоненты в паровой и жидкой фазах. Если механизмы перехода от одной структуры к другой одинаковы (т. е. рассматривается группа подобных по своим физико-химическим свойствам бинарных смесей), то в первом приближении должна существовать однозначная связь между величинами $k$ и $\widetilde{\Delta C}$. Прямым подтверждением существования такой связи должно быть совпадение зависимостей $k(\widetilde{\Delta C})$, построенных по экспериментальным точкам для левой и правой ветвей зависимостей $q_{кр}(C)$. Эти соображения подтверждаются данными, приведенными на рис. 22.20.

Как видно, зависимость $k(\widetilde{\Delta C})$ близка к линейной, а угол наклона определяется относительным размером нагревателя. Чем больше величина $D/\sqrt{\sigma/g(\rho' - \rho'')}$, тем меньше угол наклона этих прямых, что формально и описывает уменьшение максимумов на кривых $q_{кр}(C)$.

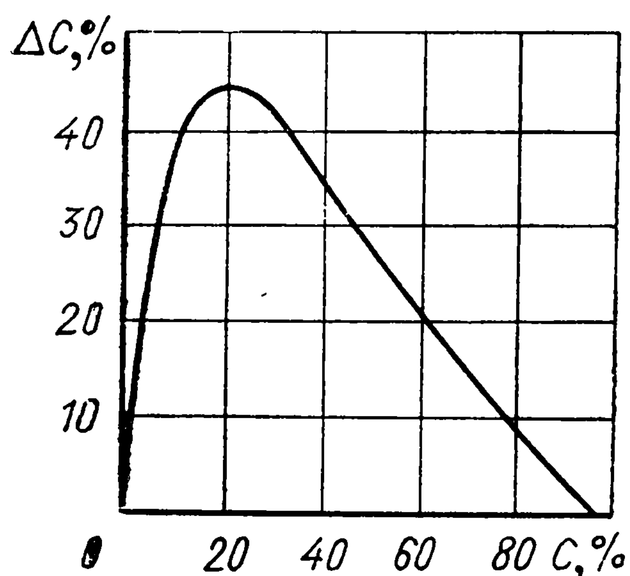



Рис. 22.19. Зависимость разности массовой концентрации спирта в паровой и жидкой фазах $\Delta C$ от массовой концентрации спирта в жидкой фазе $C$

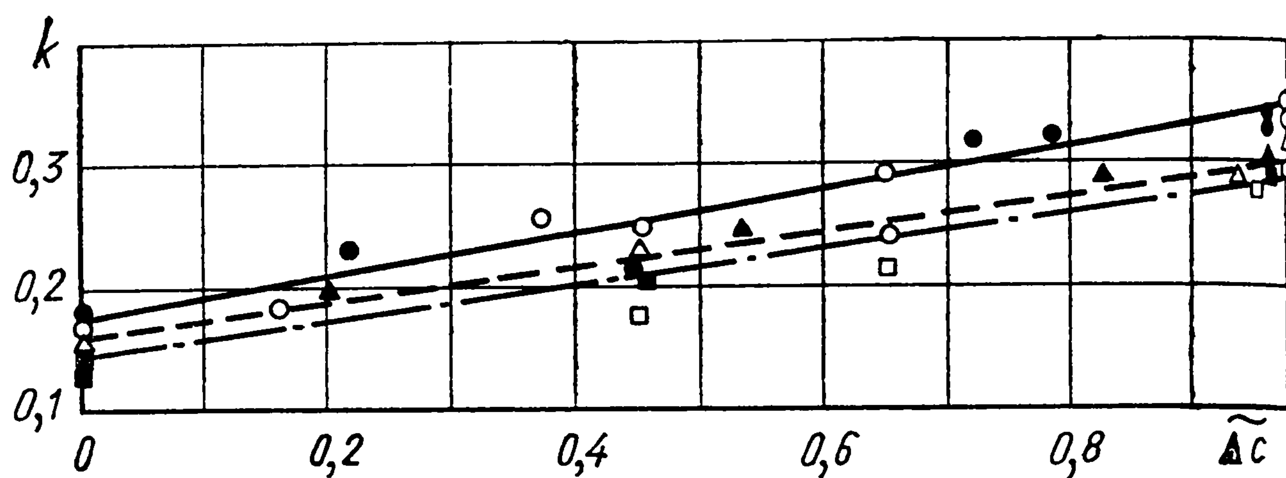



Рис. 22.20. Зависимость критерия $k$ от $\widetilde{\Delta C}$:

●, ○ — проволока $D = 0{,}5$ мм; ▲, △ — пластина, поставленная на узкую грань; □, ■ — пластина, поставленная на широкую грань

## 22.9. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ ПЕРЕХОД ОТ ОДНОФАЗНОЙ КОНВЕКЦИИ К ПЛЕНОЧНОМУ КИПЕНИЮ

На поверхностях нагрева, обедненных центрами парообразования, возникает значительный перегрев пристенного слоя жидкости по отношению к температуре насыщения при данном давлении над плоскостью. Это явление отчетливо наблюдается в металлических и неметаллических жидкостях при низких давлениях, когда существующие потенциальные центры парообразования выключаются вследствие увеличения критического радиуса зародыша с понижением давления.

В такой метастабильной ситуации пленочное кипение может возникнуть, минуя режим развитого пузырькового кипения. Это явление имеет место и при кипении на очень тонких проволоках. По опытам автора, Г. И. Бобровича, Б. П. Авксентюка, Н. Н. Мамонтовой и В. Н. Москвичевой, этот переход имеет кавитационный характер — происходит взрывообразное возникновение облака микропузырей в окрестности нагревателя, испарение пристенного слоя жидкости и формирование паровой пленки. Некоторые фотографии такого процесса показаны на рис. 22.21. Ниже излагается модель этого явления, предложенная автором и Б. П. Авксентюком.

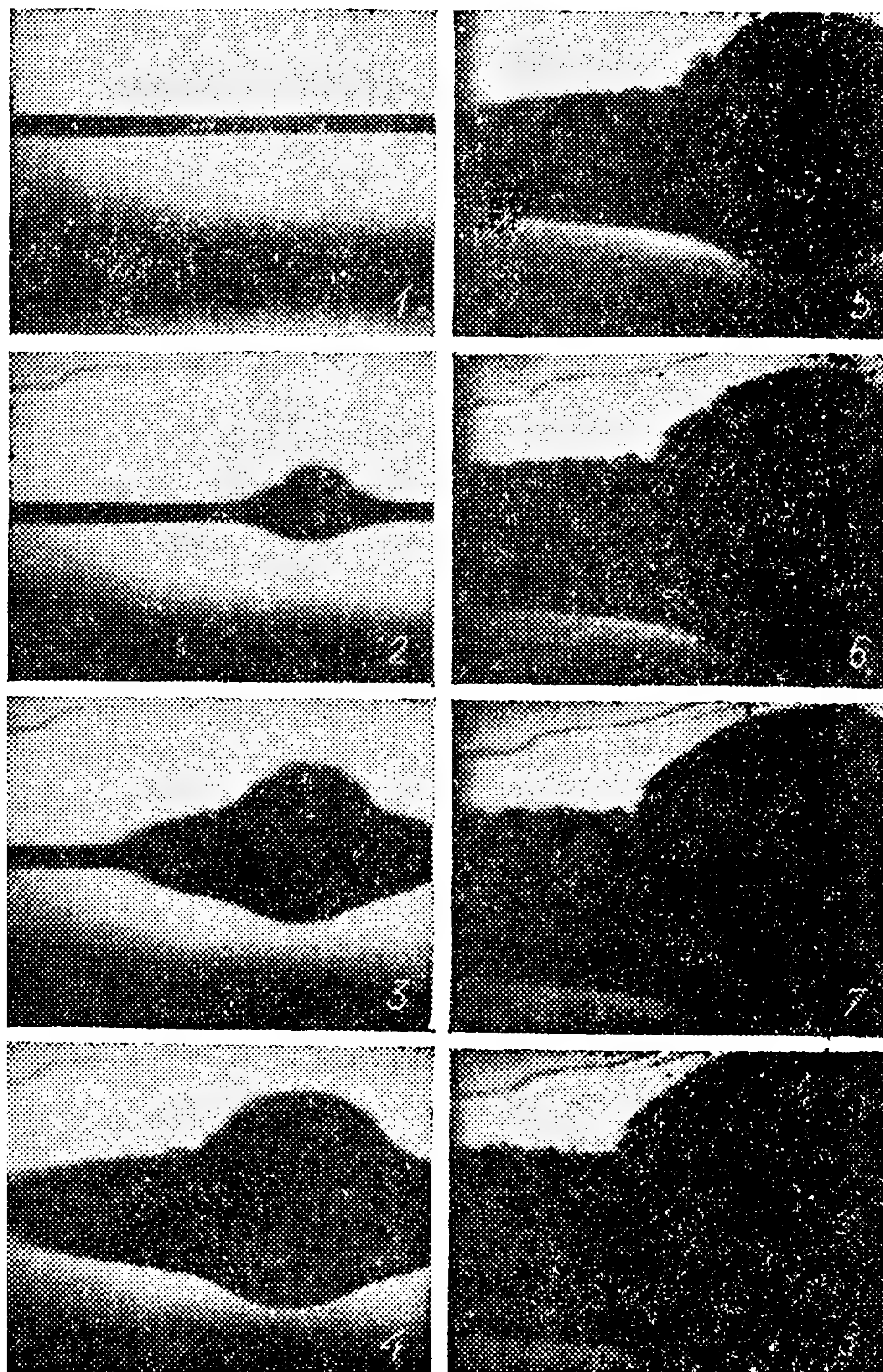


Рис. 22.21. Фотография взрывообразного возникновения паровой пленки на проволочном нагревателе при кипении бензола ($p=10^4$ Па)

Критические тепловые потоки, имеющие место при нестабильном кипении, лежат в диапазоне между $q_{кр_1}$, обусловленной описанным ранее гидродинамическим механизмом, и $q_{кр_2}$, соответствующей минимальному тепловому потоку, вызывающему непосредственный переход от однофазной тепловой конвекции к пленочному кипению. При этом должно иметь место условие

$$q_{кр_2} < q_{кр_3} < q_{кр_1}. \qquad (22.9.1)$$

В качестве критерия кавитационного механизма такого перехода можно ввести величину

$$\sigma R_{кр}^2/(\rho' v_*^2 V_*'), \qquad (22.9.2)$$

где $R_{кр}$ — критический радиус зародыша паровой фазы; $v_*$ — характерная скорость перемещения границы раздела фаз; $V_*'$ — эффективный объем жидкости, присоединенный к движению границы раздела. Числитель этого выражения является масштабом работы возникновения паровой фазы, а знаменатель — масштабом воздействия кавитационного импульса. При этом принято $\rho'' \ll \rho'$.

Масштабом максимальной конечной скорости перемещения границы раздела фаз может быть ее значение при радиусе пузыря порядка $R_{кр}$, а масштабом присоединенного объема жидкости — его максимальное значение, соответствующее радиусу лапласовой постоянной. Тогда, определяя скорость пе-

ремещения поверхности пузыря по модели теплового удара (см. гл. 21), получим

$$\left.\begin{aligned} &v=\frac{dR}{dt}\sim\frac{\lambda' c' \rho'}{R}\left(\frac{\Delta T}{r\rho''}\right)^2;\\ &R\sim R_{\text{кр}}\sim \sigma T''/(r\rho''\,\Delta T);\\ &v_*\sim\frac{\lambda' c' \rho'}{\sigma r\rho''\,T''}\,\Delta T^3;\\ &V'_*\sim\left[\frac{\sigma}{g(\rho'-\rho'')}\right]^{3/2}. \end{aligned}\right\} \tag{22.9.3}$$

Подставляя эти масштабы характерных величин в выражение (22.9.2), получаем безразмерное число критического перегрева жидкости при свободной конвекции:

$$\Delta\widetilde{T}_{\text{кр}_3}=\frac{(c\lambda')^{1/4}\rho'^{3/16}\,\Delta T_{\text{кр}_3}}{g^{3/16}\sigma^{7/16}\,T''^{1/2}}. \tag{22.9.4}$$

Расчет по этой формуле приведен в табл. 22.3.

Таблица 22.3

**Значения критического перегрева насыщенной жидкости около поверхности нагрева, обедненной центрами парообразования**

| Вещество | Интервал давлений, $10^{-5}$ Па | $\Delta T_{\text{кр}_3}$, К | Вещество | Интервал давлений, $10^{-5}$ Па | $\Delta T_{\text{кр}_3}$, К |
|---|---|---|---|---|---|
| Бензол | 0,1—0,5 | ~100 | Цезий | 0,05—1,8 | ~145 |
| Калий | 0,01—1,5 | ~130 | Этанол | 0,05—0,4 | 83—96 |

На рис. 22.22 приведена характерная диаграмма границы вскипания по опытам с двумя неметаллическими жидкостями. На рис. 22.23 представлены результаты обработки опытных данных по критерию (22.9.4) для калия, цезия, бензола и этанола.

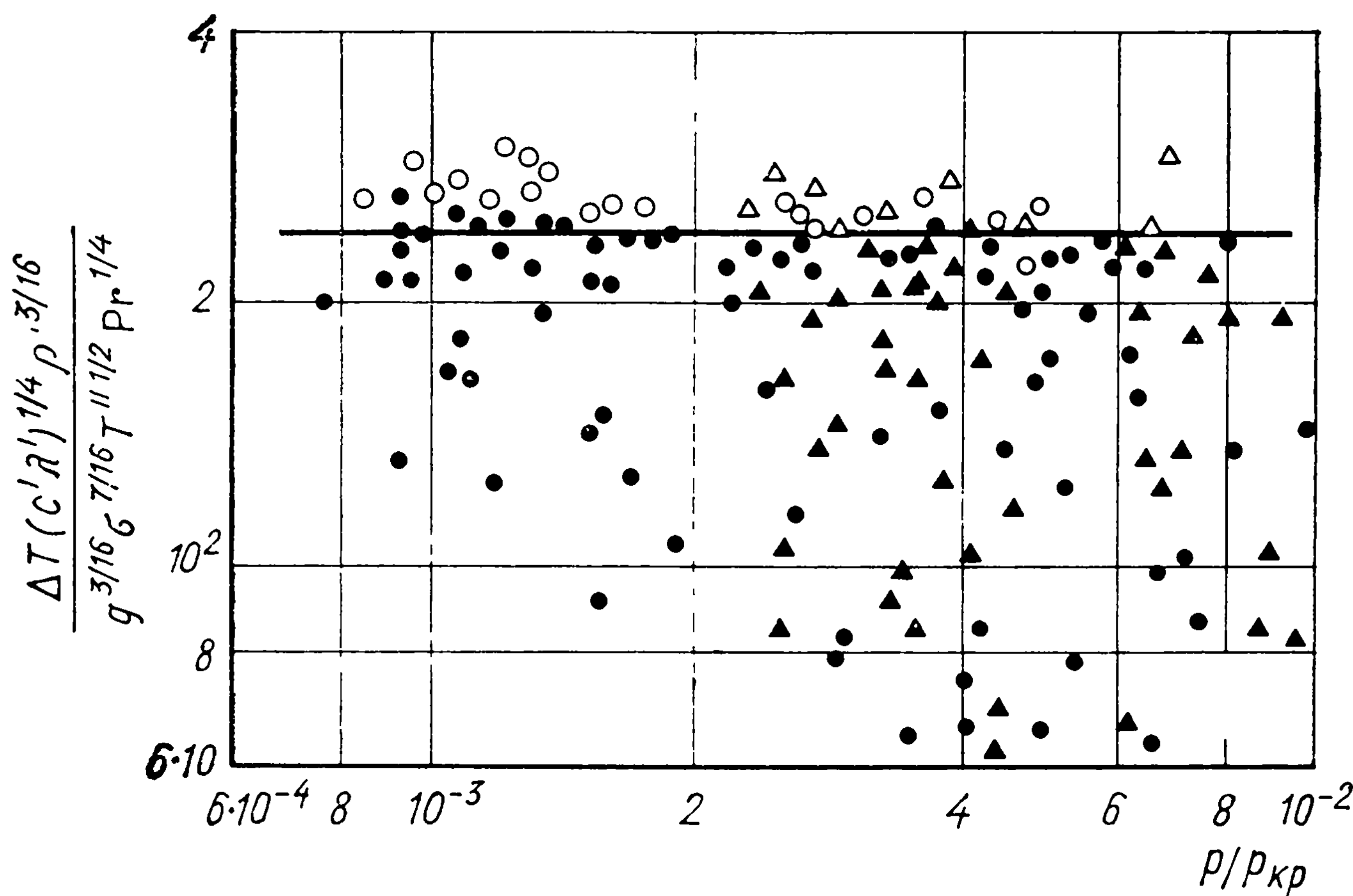



Рис. 22.22. Обработка экспериментальных данных по перегревам перед вскипанием для этанола и бензола:

●, ▲ — переход к пузырьковому кипению; ○, △ — переход к пленочному кипению

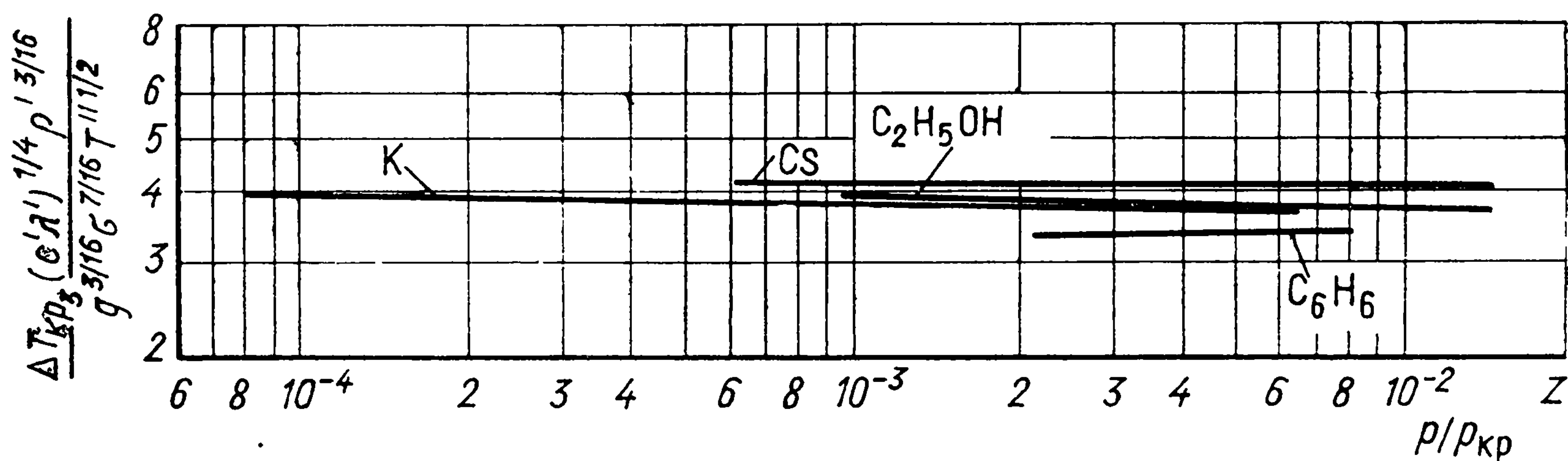



Рис. 22.23. Минимальные перегревы, при которых вскипание приводит к пленочному кипению (обработка опытных данных)

Как видно, кавитационная модель непосредственного перехода однофазной тепловой конвекции в пленочное кипение качественно вполне правильно описывает наблюдаемые факты. Количественное согласование имеющихся экспериментальных данных также можно считать удовлетворительным.

## 22.10. ВЛИЯНИЕ МЕТАСТАБИЛЬНОСТИ ПРИСТЕННОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ НА ПЕРВУЮ КРИТИЧЕСКУЮ ПЛОТНОСТЬ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

В металлических жидкостях при критических режимах кипения имеет место заметный отвод тепла через жидкость даже в условиях нормальной гидродинамической неустойчивости пристенного двухфазного слоя. В ослабленном виде этот эффект наблюдается и при кипении неметаллических жидкостей под низким давлением.

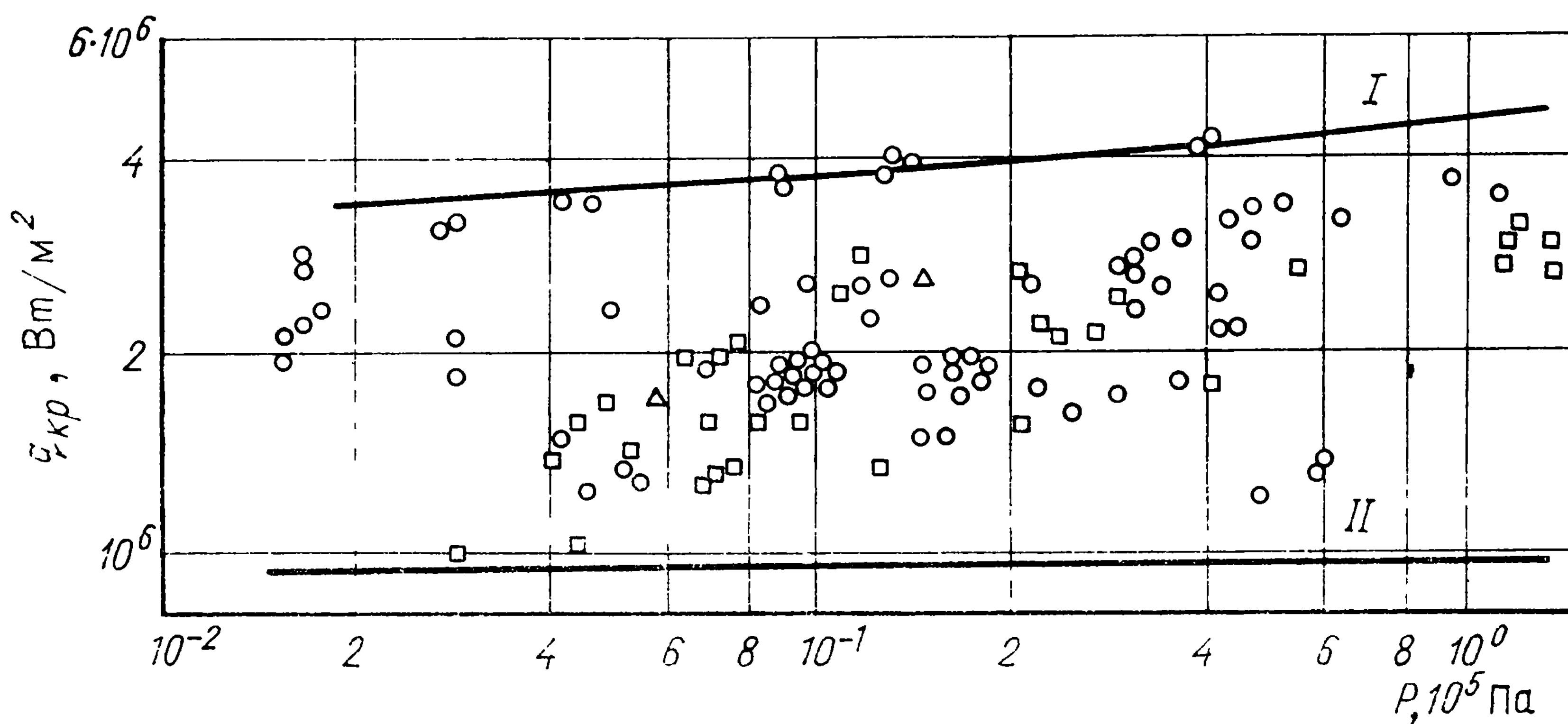



Рис. 22.24. Опытные данные по критическим тепловым потокам при кипении натрия:

○ — данные В.И. Субботина, Г.Н. Сорокина и др.; □ — данные Найса и Лурье, △ — данные Кесвела и Бальшисера; *I* — расчет по формуле (22.10.5); *II* — расчетная кривая при $\Delta\tilde{T}_{\text{кр}_3} = 3{,}8 \cdot 10^2$ для минимальных тепловых потоков, при которых вскипание приводит к пленочному кипению

Допустим, что тепловой поток, отводимый в момент кризиса теплопроводностью через жидкость, определяется формулой теплового удара, т. е.

$$q_{\text{м}} \sim \Delta T_{\text{м}} (\lambda' c' \rho' / t)^{1/2}, \qquad (22.10.1)$$

где $\Delta T_{\text{м}}$ — разность температур, определяющая теплопроводность в толщу жидкости.

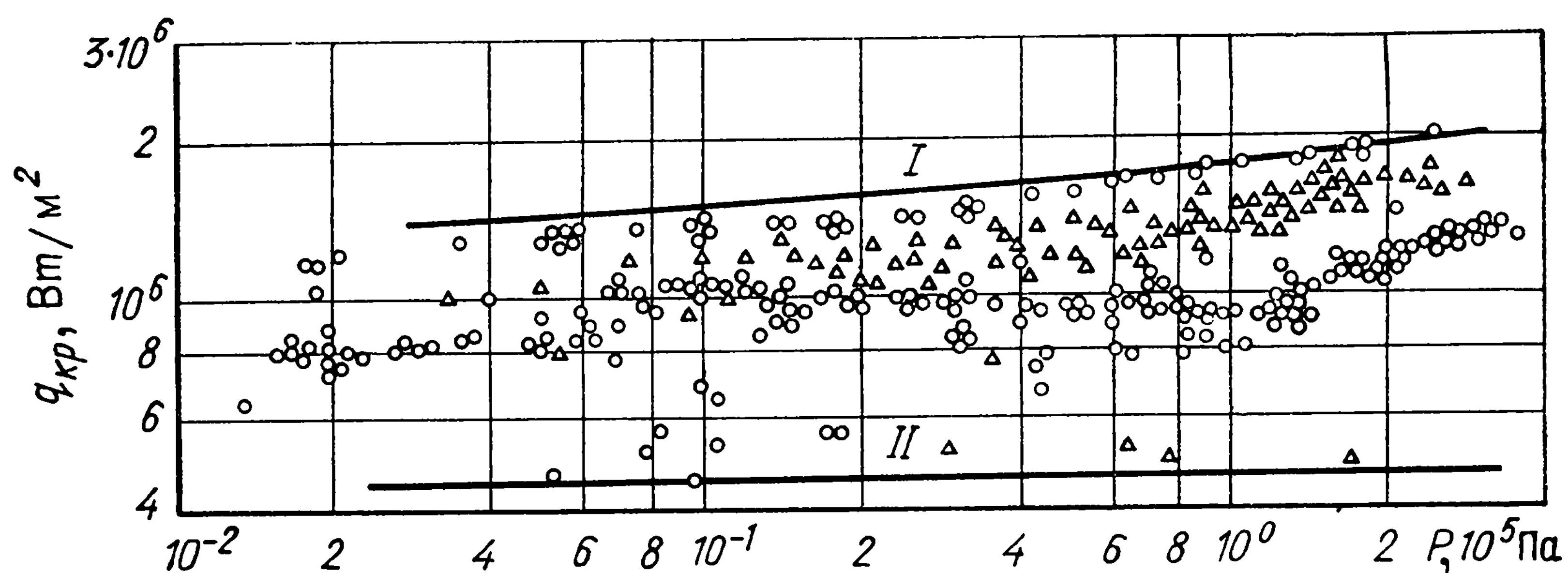



Рис. 22.25. Опытные данные по критическим тепловым потокам при кипении цезия:

○ — данные В.И. Субботина, Д.Н. Сорокина и др.; △ — данные авторов; *I* — расчет по формуле (22.10.5); *II* — расчетная кривая при $\Delta \widetilde{T}_{\text{кр}_3} = 3{,}8 \cdot 10^2$ для минимальных тепловых потоков, при которых вскипание приводит к пленочному кипению

Полагая, что характерное время тепловых импульсов имеет порядок времени пробега капиллярных волн в модели нормального гидродинамического кризиса кипения, запишем:

$$t \sim \frac{\delta}{(g\delta)^{1/2}} \sim \frac{\sigma^{1/4}}{g^{3/4}(\rho' - \rho'')^{1/4}}, \qquad (22.10.2)$$

и если $\Delta T'_{\text{м}} \sim \Delta T_{\text{кр}_3}$, то при $\rho' \gg \rho''$

$$q_{\text{м}} \sim g^{9/16}\, T''^{1/2} (\lambda' c')^{1/4} \sigma^{5/16} \rho'^{7/16}. \qquad (22.10.3)$$

Суммарный поток

$$q_{\text{кр}_1} \approx q_{\text{кр}_{10}} + q_{\text{м}}. \qquad (22.10.4)$$

По имеющимся опытным данным можно принять (без поправки на $M_*$) при $\text{Pr} \ll 1$

$$q_{\text{кр}_1} \approx 0{,}14 r \rho''^{1/2} (\sigma g \rho')^{1/4} + 170 g^{9/16}\, T''^{1/2} (\lambda' c')^{1/4} \sigma^{5/16} \rho'^{7/16}. \qquad (22.10.5)$$

На рис. 22.24 и 22.25 приведены экспериментальные данные, подтверждающие, что при нестабильном кипении щелочных металлов первые критические тепловые потоки лежат между рассмотренными выше пределами.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Авксентюк Б. П., Кутателадзе С. С.** Неустойчивость режима теплообмена на поверхностях, обедненных центрами парообразования.— «Теплофизика высоких температур», 1977, т. 15, № 1, с. 115.
2. **Бобрович Г. И., Гогонин И. И., Кутателадзе С. С.** Влияние размера поверхности нагрева на критический тепловой поток при кипении в большом объеме жидкости. — «Журн. прикл. механ. и техн. физ.», 1964, № 4, с. 137.
3. **Бобрович Г. И., Кутателадзе С. С.** Влияние концентрации спирто-водяной смеси на критическую плотность теплового потока.— «Журн. прикл. механ. и техн. физ», 1964, № 2, с. 146.
4. **Вопросы** теплообмена при изменении агрегатного состояния. Сб. статей под общ. ред. С. С. Кутателадзе. М.— Л, Госэнергоиздат, 1953.
5. **Вопросы** теплоотдачи и гидравлики двухфазных сред. Сб. статей под общ. ред. С. С. Кутателадзе. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961.
6. **Исследование** теплоотдачи к пару и воде, кипящей в трубах при высоких давлениях. М., Атомиздат, 1958.
7. **Исследование** критических тепловых потоков в пучках стержней. Семинар ТФ-74. М., Ин-т атомной энергии им. И. В. Курчатова, 1974.
8. **Котлотурбостроение.** Тр. ЦКТИ, вып. 57—59. Л., 1965.
9. **Кризис** теплообмена при кипении в каналах. Сб. статей. Обнинск, ФЭИ, 1974.
10. **Кризис** теплоотдачи в трубах. Е-11, ОБ-17, ФЭИ, 1976.

11. **Кутателадзе С. С., Москвичева В. Н.** О связи гидродинамики двухкомпонентного слоя с теорией кризисов в механизме кипения.— «Журн. техн. физ», 1959, т. 29, № 9, с. 1135.
12. **Маленков И. Г.** Критические явления в процессах барботажа и кипения.— «Журн. прикл. механ. и техн. физ.», 1963, № 6, с. 166.
13. **Орнатский А. П., Винярский Л. С.** Кризис теплообмена в условиях вынужденного движения недогретой воды в трубках малого диаметра. — «Теплофизика высоких температур», 1965, т. 3, № 3, с. 444.
14. **Орнатский А. П.** Обобщение опытных данных по гидравлическому сопротивлению при поверхностном кипении.— «Журн. прикл. механ. и техн. физ., 1965, № 3, с. 113.
15. **Поварнин П. И., Семенов С. Т.** Исследование кризиса кипения при течении недогретой воды в трубках малых диаметров при высоких давлениях.— «Теплоэнергетика», 1960, № 1, с. 79.
16. **Рекомендации** по расчету кризиса теплоотдачи при кипении воды в равномерно обогреваемых круглых трубах. Научный совет по комплексной проблеме «Теплофизика», препринт 3—004, БТД ОКБ ИВТАН, 1975.
17. **Штоколов Л. С.** Опыт обобщения данных о критических тепловых потоках при кипении жидкостей в области больших скоростей течения. — «Журн. прикл. механ. и техн. физ.», 1964, № 1, с. 134.
18. **Штоколов Л. С.** Кризис теплообмена при кипении этилового спирта в области больших скоростей течения.— «Инж.-физ. журн.», 1964, т. 7, № 12, с. 3.
19. **Cumo M.** Elementi di termotecnica del reattore. Roma, C. N. E., 1971.
20. **Jacket H. S., Roarty J. D., Zerbe J. E.** Investigation of burnout heat flux in rectangular channels at 2000 psia. — «Transactions ASME», 1958, v. 80, N 2, p. 391.
21. **Sims G. E., Aktürk U., Evans-Lutterodt K. O.** Simulation of pool boiling heat transfer by gas injection at the interface. — «Intern. J. Heat and Mass. Transfer», 1963, v. 6, N 6, p. 513.
22. **Van Stralen S.** Wärmteoverdracht aan kokende binare vloeist tofmegesels. Wageningen, 1959.
23. **Wallis C. B.** Some hydrodynamic aspects of two phase flow and boiling.— «International Developments in Heat Transfer». Proc. 1961—62 Heat Transfer Conf. Pt. 2. New York, Amer. Soc. Mech. Eng., 1961, p. 319.
24. **Zuber N.** Hydrodynamics aspects of boiling heat transfer. AECV, 439, 1959.
25. **Zuber N., Tribus M., Westwater J. W.** The hydrodynamic crisis in pool boiling of saturated and subcooled liquids.— «International Developments in Heat Transfer». Proc. 1961—62. Heat Transfer Conf. Pt. 2. New York, Amer. Soc. Mech. Eng., 1961, p. 230.

## Глава 23 ЭЛЕМЕНТЫ МАГНИТНОЙ ТЕРМОГИДРОДИНАМИКИ

### 23.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Проводящими жидкостями являются расплавленные металлы, которые практически можно считать несжимаемыми, электролиты и плазма. Если проводящая среда пересекает магнитные силовые линии, то в ней индуцируется электрический ток, что приводит как к изменению магнитного поля, так и к появлению пондеромоторной объемной силы в среде. Возникает также дополнительный механизм диссипации энергии за счет джоулева нагрева.

Течение проводящей среды в магнитном поле описывается системой уравнений магнитной гидродинамики. Для несжимаемой жидкости с постоянной электропроводностью и вязкостью система уравнений имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\mathbf{H}}{dt}=\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}+(\mathbf{w}\,\mathrm{grad})\,\mathbf{H}=(\mathbf{H}\,\mathrm{grad})\,\mathbf{w}+\eta\nabla^2\mathbf{H}.\\
&\rho\,\frac{d\mathbf{w}}{dt}=\mathbf{g}\rho-\mathrm{grad}\,p+\rho\nu\nabla^2\mathbf{w}+\mu_e(\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\times\mathbf{H});\\
&\mathrm{div}\,\mathbf{H}=0;\ \ \mathbf{j}=\mathrm{rot}\,\mathbf{H};\\
&\qquad\qquad \mathrm{div}\,\mathbf{w}=0;\\
&\rho T\,\frac{dS}{dt}=\rho\frac{di}{dt}-\frac{dp}{dt}=\mu\,[\nabla^2 w^2-2\mathbf{w}\,(\nabla^2\mathbf{w})-(\mathrm{rot}\,\mathbf{w})^2]+\\
&+\mathrm{div}\,(\lambda\,\mathrm{grad}\,T)+\frac{1}{\sigma}(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})^2.
\end{aligned}\right\}\qquad(23.1.1)$$

Здесь $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля; $\mu$ — динамическая вязкость; $\eta=1/\mu_e\sigma$ — коэффициент магнитной диффузии, или коэффициент магнитной вязкости; $\mu_e=4\pi\cdot10^{-7}$ кг·м/К$^2$ — магнитная проницаемость; $\sigma$ — проводимость; $S$ — энтропия единицы объема.

Первое из этих уравнений (уравнение индукции) получено в результате исключения плотности тока $\mathbf{j}$ и электрического поля $\mathbf{E}$ из уравнений электродинамики и описывает влияние поля скоростей $\mathbf{w}$ на магнитное поле $\mathbf{H}$. При $\mathbf{w}=0$ оно принимает вид

$$\partial\mathbf{H}/\partial t=\eta\nabla^2\mathbf{H},\qquad(23.1.2)$$

т. е. становится аналогичным уравнению диффузии. Для идеально проводящей среды ($\sigma\to\infty$, $\eta\to0$) уравнение индукции переходит в уравнение $d\mathbf{H}/dt=(\mathbf{H}\,\mathrm{grad}\,)\mathbf{w}$, или

$$d\mathbf{H}/dt=\mathrm{rot}\,(\mathbf{w}\times\mathbf{H}).\qquad(23.1.3)$$

Это уравнение эквивалентно уравнению для вихря скорости $\mathrm{rot}\,\mathbf{w}=0$ в гидродинамике невязкой жидкости, которое означает, что вихревые линии движутся вместе с жидкостью. Следовательно, из уравнения (23.1.3) следует, что линии магнитного поля $\mathbf{H}$ движутся вместе с веществом. Этот эффект известен как эффект «вмороженности» магнитного поля в идеально проводящую среду. В общем случае движущейся жидкости с произвольной проводимостью эффект диффузии, описываемый членом $\eta\nabla^2\mathbf{H}$, и эффект «вмороженности», описываемый членом $(\mathbf{H}\,\mathrm{grad}\,)\mathbf{w}$, будут суммироваться.

Отношение этих двух членов дает безразмерный параметр

$$\mathrm{Re}_m=wl/\eta,\qquad(23.1.4)$$

имеющий структуру, аналогичную структуре числа Рейнольдса, и называемый магнитным числом Рейнольдса.

Воздействие магнитного поля на движение проводящей среды описывается последним членом второго из уравнений (23.1.1). Влияние магнитного поля можно качественно оценить, взяв отношение двух последних членов этого уравнения. Если выражение

$$R_\mu = \mu_e H^2 l/(\mu w), \tag{23.1.5}$$

характеризующее отношение магнитной силы к силе вязкости, умножить на магнитное число Рейнольдса, то можно выделить так называемое число Гартмана:

$$\mathrm{Ha} = \mu_e H l \sqrt{\sigma/\mu}. \tag{23.1.6}$$

Можно заметить, что в некоторых случаях число Гартмана является формальным аналогом числа Маха—Маиевского. Влияние магнитного поля, конечно, можно оценивать не только по отношению к вязкому члену, но и по отношению к другим членам второго из уравнений (23.1.1).

В табл. 23.1 приводится сравнение значений чисел $\mathrm{Re}_m$ и Ha для некоторых сред при условии, что $l = 1$ см, $\mu_e H = 10^{-4}$ $T$, $w = 1$ см/с.

Таблица 23.1

**Значения гидродинамического числа Рейнольдса, магнитного числа Рейнольдса и числа Гартмана для некоторых сред**

| Вещество | Hg | Na | K | Li | Bi | Al | Морская вода |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Температура, К | 290 | 370 | 370 | 470 | 570 | 970 | 280 |
| Re | 874 | 135 | 193 | 886 | 605 | 82 | 78,5 |
| $\mathrm{Re}_m$, $10^{-5}$ | 1,04 | 10,3 | 6,4 | 2,2 | 0,77 | 4,8 | $3{,}82\cdot10^{-6}$ |
| Ha, $10^{-2}$ | 2,6 | 12,5 | 124 | 6,3 | 2,15 | 3,9 | 5,4 |

## 23.2. ВЛИЯНИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОГО К ТЕЧЕНИЮ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ГИДРОДИНАМИКУ И ТЕПЛООБМЕН В ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ

Простейшим примером взаимодействия магнитного поля с потоком проводящей жидкости является напорное течение в плоскопараллельном канале, рассмотренное Гартманом.

Пусть ширина щели $2\delta$, а магнитное поле перпендикулярно стенкам канала. Последние могут быть как непроводящими, так и проводниками с проводимостью $\sigma_1$, $\sigma_2$ соответственно для толщин стенок $\delta_1$ и $\delta_2$. Течение осуществляется в направлении оси $x$. Вследствие неравномерности скоростей течения по оси $y$, направленной перпендикулярно к ограждающим стенкам, возникает $x$-компонента напряженности магнитного поля $H_x$. Индуцированное электрическое поле $E$ направлено вдоль оси $z$.

Решение уравнений (23.1.1) с соответствующими граничными условиями имеет вид

$$w = w_0 \frac{\mathrm{ch\,Ha} - \mathrm{ch\,Ha}\,\xi}{\mathrm{ch\,Ha} - 1}, \tag{23.2.1}$$

где $\xi = y/\delta$. Скорость жидкости на оси ($\xi = 0$)

$$w_0 = \Phi \frac{\nu \bar{P}}{\delta\,\mathrm{Ha}} \frac{\mathrm{ch\,Ha} - 1}{\mathrm{sh\,Ha}}, \tag{23.2.2}$$

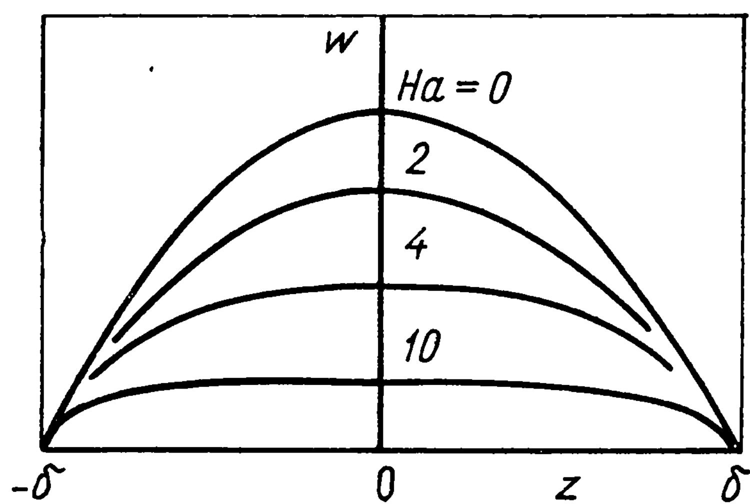



Рис. 23.1. Профили скоростей для течения жидкости в поперечном магнитном поле между непроводящими пластинами в зависимости от значений числа Ha

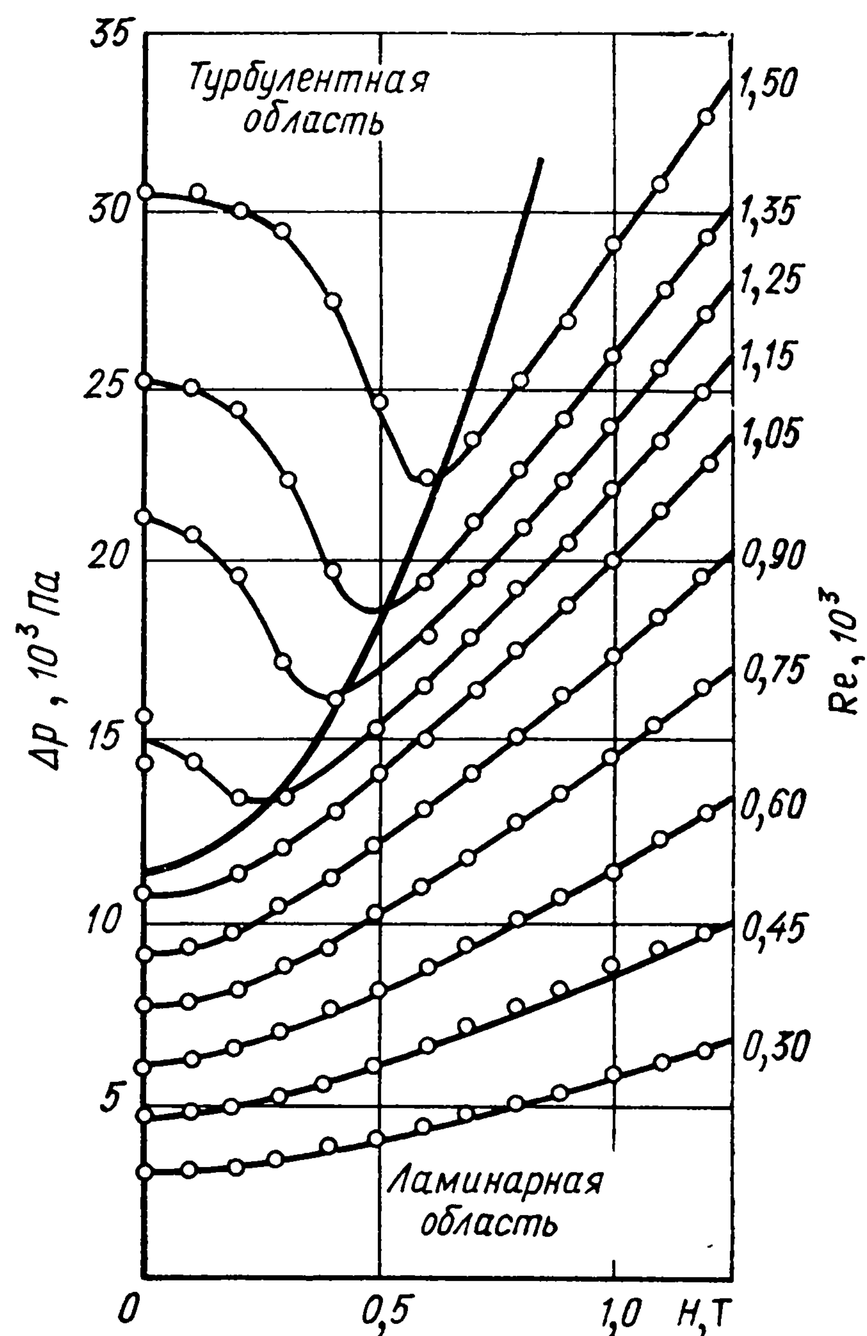



Рис. 23.2. Зависимость перепада давления в трубе ($d$=0,689 мм, $l$=280 мм) от значения магнитного поля H при различных значениях Re для течения ртути в поперечном магнитном поле

где

$$\Phi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + 2}{(\varphi_1 + \varphi_2)\,\mathrm{Ha}\,\mathrm{cth}\,\mathrm{Ha} + 2}\,;\quad \varphi_1 = \frac{\sigma_1 \delta_1}{\sigma\delta}\,;\quad \varphi_2 = \frac{\sigma_2 \delta_2}{\sigma\delta}\,;$$

$$\overline{P} = \frac{\delta^2 \dfrac{\partial p}{\partial x} \sqrt{\mu_e \rho}}{\rho \mu_e H \nu}\,;\quad \mathrm{Ha} = \mu_e H \delta \sqrt{\sigma/\rho\nu}\,.$$

Если пластины являются изоляторами, то $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Характер деформации профиля скоростей в зависимости от числа Гартмана показан на рис. 23.1 при постоянных значениях $\partial p/\partial x$. На рис. 23.2 приведены результаты экспериментальных исследований течения ртути в круглой трубе Гартманом и Лазарусом. По горизонтальной оси отложено значение магнитного поля $H$, по вертикальной — перепад давления в трубе, сплошной кривой разграничены области турбулентного и ламинарного режимов течения ртути.

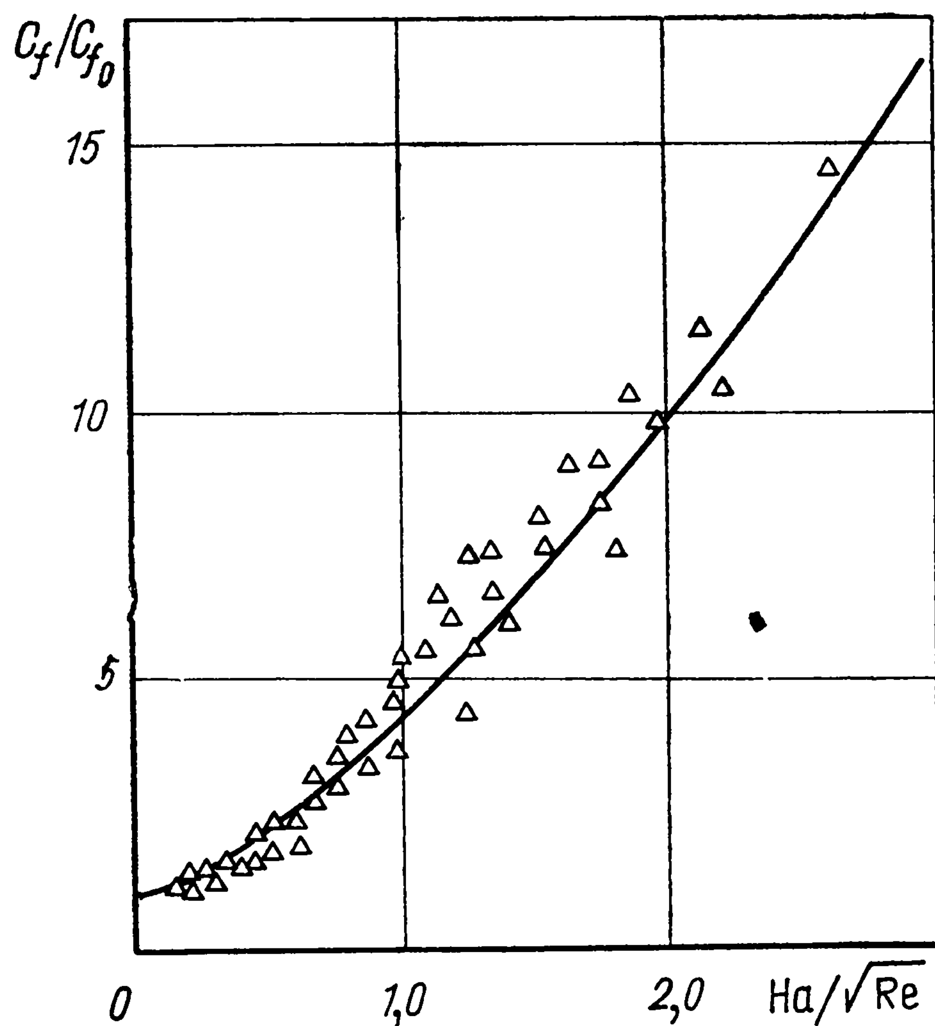



Рис. 23.3. Зависимость относительного коэффициента сопротивления пластины от параметра Ha/$\sqrt{\mathrm{Re}}$ (опытная кривая соответствует зависимости (23.2.3)

На рис. 23.3 показаны результаты опытов А. Б. Цинобера по продольному обтеканию плоских пластин электропроводной жидкостью в магнитном поле, перпендикулярном вектору скорости течения вне пограничного слоя. При Ha = 0 хорошо воспроизводится закон трения Блазиуса для ламинарного пограничного слоя. Результаты опытов описываются зависимостью

$$c_f = \frac{1,328}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}\left(1 + 3,5\,\frac{\mathrm{Ha}^{1,4}}{\mathrm{Re}^{0,7}}\right). \quad (23.2.3)$$

Соответствующая деформация профилей скоростей в пограничном слое показана на рис. 23.4.

В области $3 \cdot 10^3 < \mathrm{Re} < 1 \cdot 10^4$ и $0 < \mathrm{Ha} < 53$ для неограниченного, поперечно обтекаемого цилиндра было найдено, что

$$c_f = c_{f_0}\left(1 + 3{,}4\,\mathrm{Ha}/\sqrt{\mathrm{Re}}\right), \tag{23.2.4}$$

а для шара —

$$c_f = c_{f_0}\left(1 + \mathrm{Ha}/\sqrt{\mathrm{Re}}\right). \tag{23.2.5}$$

При этом происходит также смещение точки отрыва пограничного слоя в сторону кормы. По не очень точным опытам А. Б. Цинобера и др., при обтекании цилиндра в области $10^3 < \mathrm{Re}_D < 6 \cdot 10^3$ и $0 < \mathrm{Ha} < 37$ угол расположения точки отрыва пограничного слоя меняется по формуле

$$\varphi_{\text{кр}} \approx \varphi_{\text{кр}_0}\left(1 + \mathrm{Ha}^2/2\,\mathrm{Re}\right). \tag{23.2.6}$$

Теплообмен потока проводящей жидкости со стенками канала в магнитном поле изучен пока недостаточно. Магнитное поле влияет на теплообмен посредством деформации профиля скоростей и вследствие появления внутреннего источника тепла.

Влияние джоулева тепла при недеформированном параболическом профиле скоростей оценивается формулой (11.15.7), т. е. лежит в пределах $-1 < (q_v R_0)/2q_{\text{ст}} < 1$, $1{,}35 > \alpha/\alpha_0 > 0{,}75$. В данном случае объемная плот-

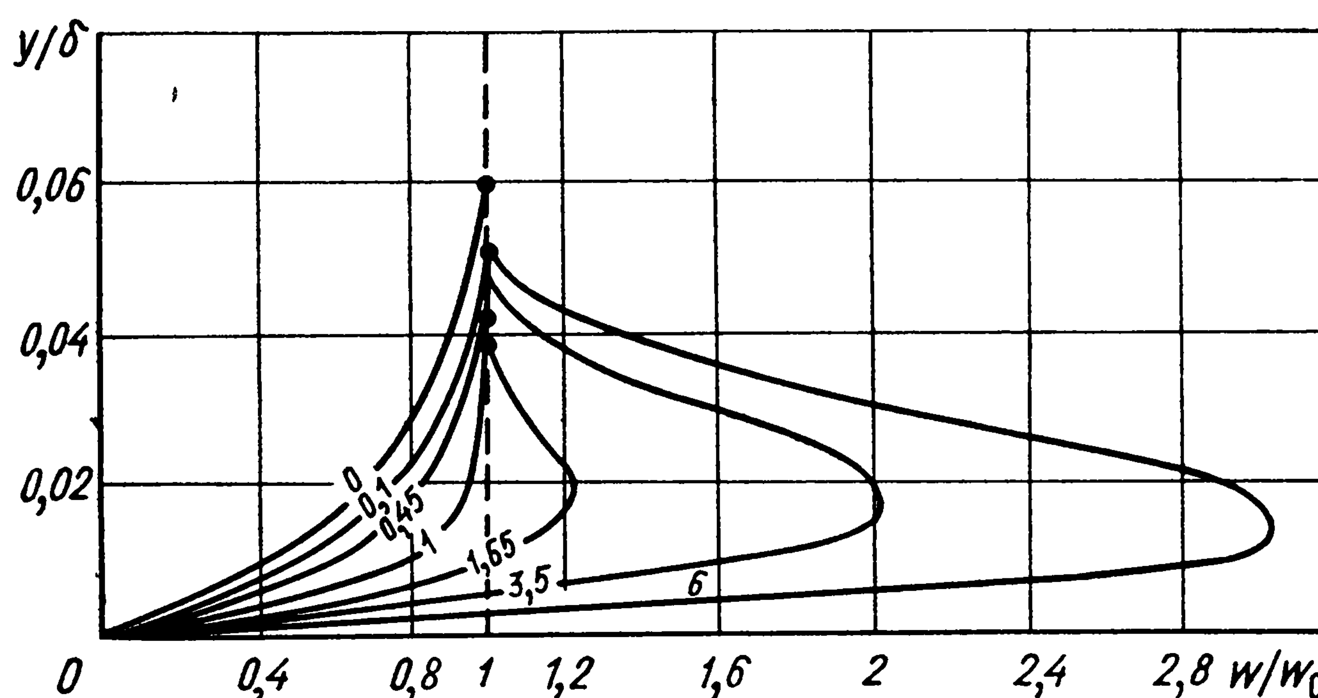



Рис. 23.4. Кривые распределения скоростей электропроводной жидкости в пограничном слое на плоской пластине для различных значений параметра $\mathrm{Ha}^2/\mathrm{Re}$

ность внутреннего источника $q_v = W/V$, где $W$ — выделение джоулева тепла на единицу длины канала; $V$ — объем, занимаемый проводящей жидкостью на единице длины канала.

И. Т. Иеном была рассмотрена задача о теплообмене в плоском канале, ограниченном проводящими стенками толщиной $\delta_1$ и $\delta_2$ с проводимостью $\sigma_1$ и $\sigma_2$. Уравнение переноса тепла для несжимаемой жидкости с постоянными электропроводностью, вязкостью и теплопроводностью

$$\rho c_p w \partial T/\partial x = \lambda \partial^2 T/\partial y^2 + \mu (dw/dy)^2 + j^2/\sigma \tag{23.2.7}$$

решается при следующих граничных условиях:

$$\left.\begin{aligned} &T = T_0, \quad x = 0; \\ &\partial T/\partial y = q/\lambda, \ y = l, \ x \geqslant 0; \\ &\partial T/\partial y = -q/\lambda, \ y = -l, \ x \geqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{23.2.8}$$

где $q = \mathrm{const}$ — поперечный поток тепла.

Полученные решения, отдельные результаты которых иллюстрируют рис. 23.5 и 23.6, для поля температур (из-за громоздкости выражений они здесь не выписаны) позволяют оценить влияние джоулевой и вязкой диссипаций и теплообмена на среднюю температуру жидкости в зависимости от значений параметра Гартмана и параметра $E_c = q\mu/l^3\ (\partial p/\partial x)^2$.

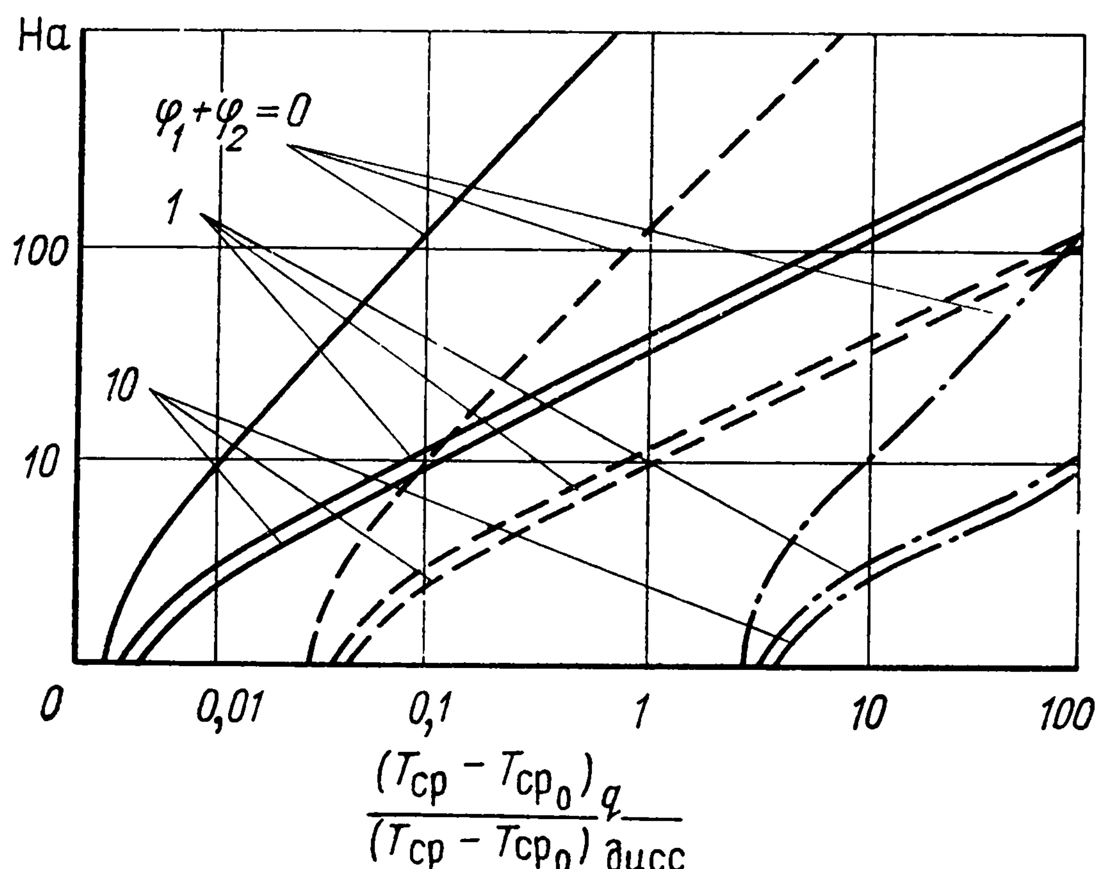



Рис. 23.5. Влияние теплообмена и диссипации на среднюю температуру потока в канале:
——— $E_c = 10^{-3}$; — — — — $10^{-2}$; —·—— 1

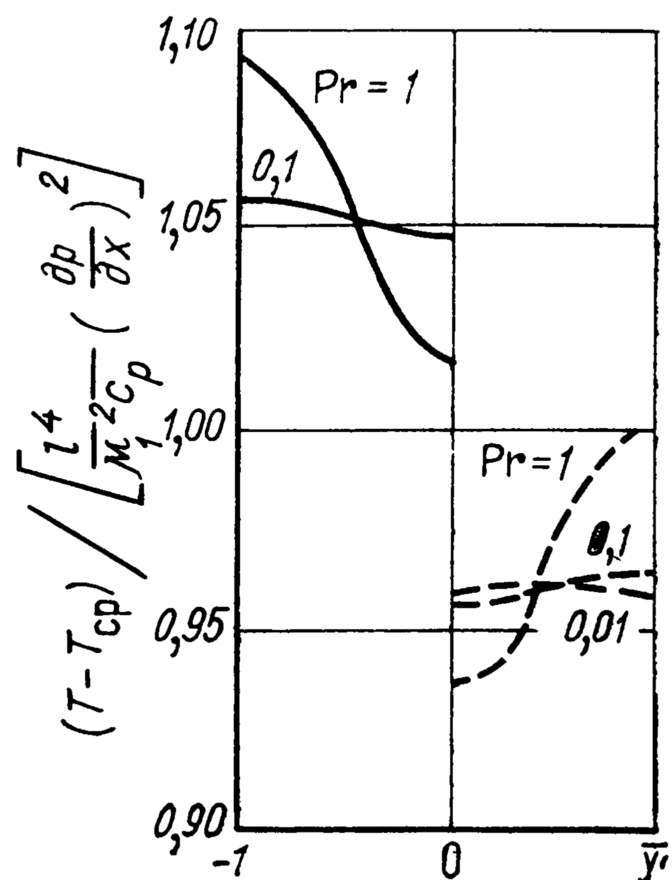



Рис. 23.6. Профили температур в канале в некотором сечении, определяемом условием $x = \frac{\rho l^4}{\mu^2}\frac{\partial p}{\partial x}$, при $\varphi_1+\varphi_2>10$, На$=1$:
——— $E_c = 0{,}01$; — — — $E_c = -0{,}01$

Так, для непроводящих стенок ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$) вязкая диссипация более существенна, чем джоулев нагрев при всех числах $E_c$ и На. Для проводящих стенок с $\varphi_1 + \varphi_2 > 10$ джоулев нагрев играет бо́льшую роль, чем вязкая диссипация при всех значениях $E_c$, если только На $> 2$.

## 23.3. ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА В КАНАЛАХ

Наложение магнитного поля на турбулентный поток проводящей жидкости приводит к гашению турбулентности и постепенному (по мере увеличения магнитного поля) переходу от турбулентного режима течения к ламинарному. С увеличением числа Рейнольдса точка перехода ламинарного режима течения в турбулентный смещается в сторону бо́льших значений магнитного поля (см. рис. 23.2).

Продольное магнитное поле гасит турбулентные пульсации слабее, чем поперечное. В то же время продольное магнитное поле не влияет на ламинарный режим течения.

На рис. 23.7 (пунктирная линия) приведены полученные Глоубом значения критического числа $\mathrm{Re}_{кр}$, при котором ламинарное течение в продольном магнитном поле переходит в турбулентное в зависимости от числа Гартмана. Здесь $\mathrm{Re}_{кр_0}$ — критическое значение числа Рейнольдса в отсутствие поля. Опыты проводились при течении ртути в стеклянных и алюминиевых трубках. Зависимость критического значения числа Рейнольдса, при котором происходит переход ламинарного течения в турбулентное в поперечном магнитном поле, от числа Гартмана показана на рис. 23.7, взятом из работы Г. Г. Брановера и О. А. Лиелаусиса (сплошная линия). На рис. 23.8 приведены полученные Гартманом, Лазарусом, Г. Г. Брановером, О. А. Лиелаусисом и Мергетройдом значения коэффициента сопротивления $\zeta_m = 2\Delta pR/\rho w^2 l$ ($R$ — гидравлический радиус, $\Delta p$ — перепад давления на длине $l$ канала, $w$ — средняя ско-

рость) в зависимости от величины $(2/\mathrm{Re})\,[\mathrm{Ha}^2\mathrm{th\,Ha}/(\mathrm{Ha} - \mathrm{th\,Ha})]$ для течения ртути в поперечном магнитном поле. Прямая линия на графике соответствует ламинарному режиму течения.

В области турбулентного течения магнитное поле по-разному влияет на коэффициент сопротивления в зависимости от значения числа Re. При $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\text{гр}}$,

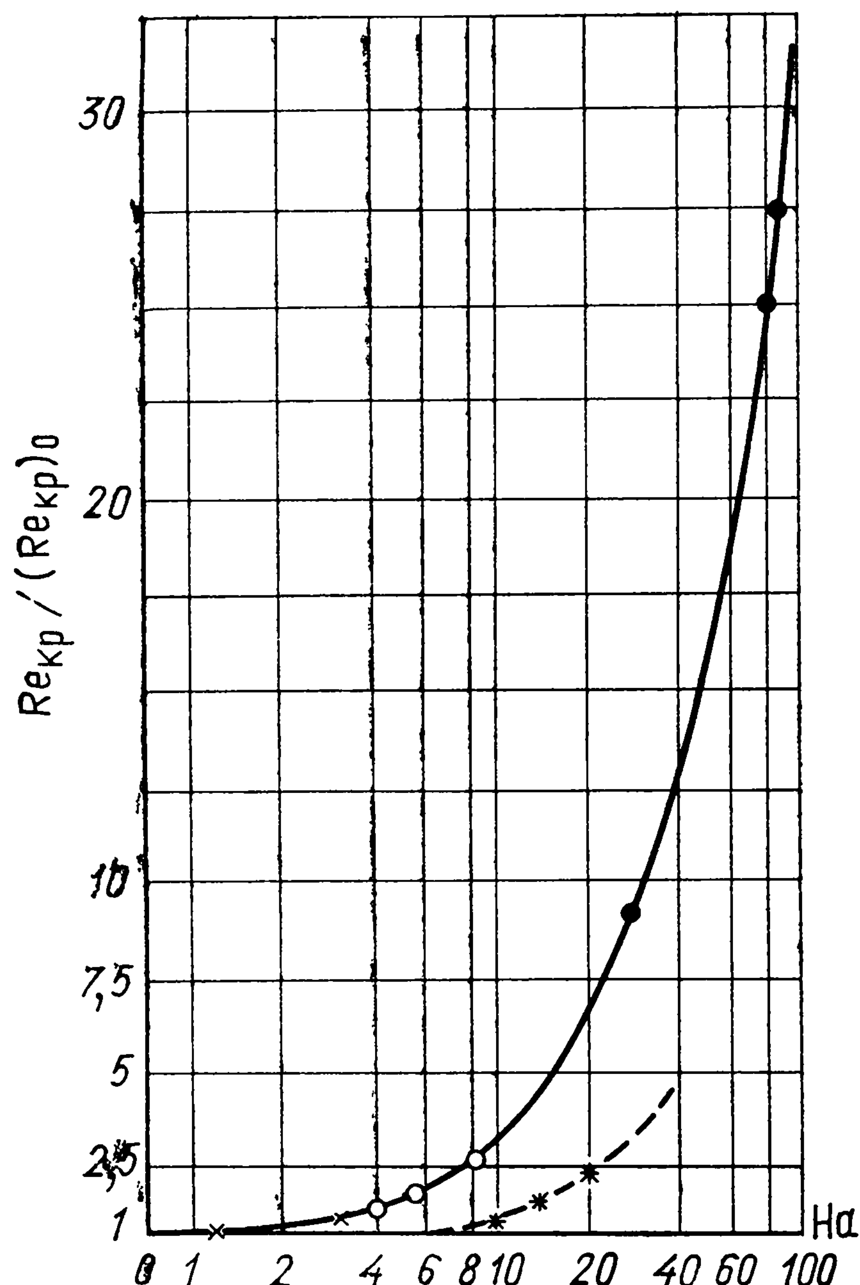



Рис. 23.7. Зависимость относительного критического числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\text{кр}}/(\mathrm{Re}_{\text{кр}})_0$ от числа Ha для поперечного (———) и продольного (— — —) магнитных полей: × — экспериментальные данные Гартмана и Лазаруса; ● — Мергетройда; ○ — Брановера и Лиелаусиса; * — Глоуба

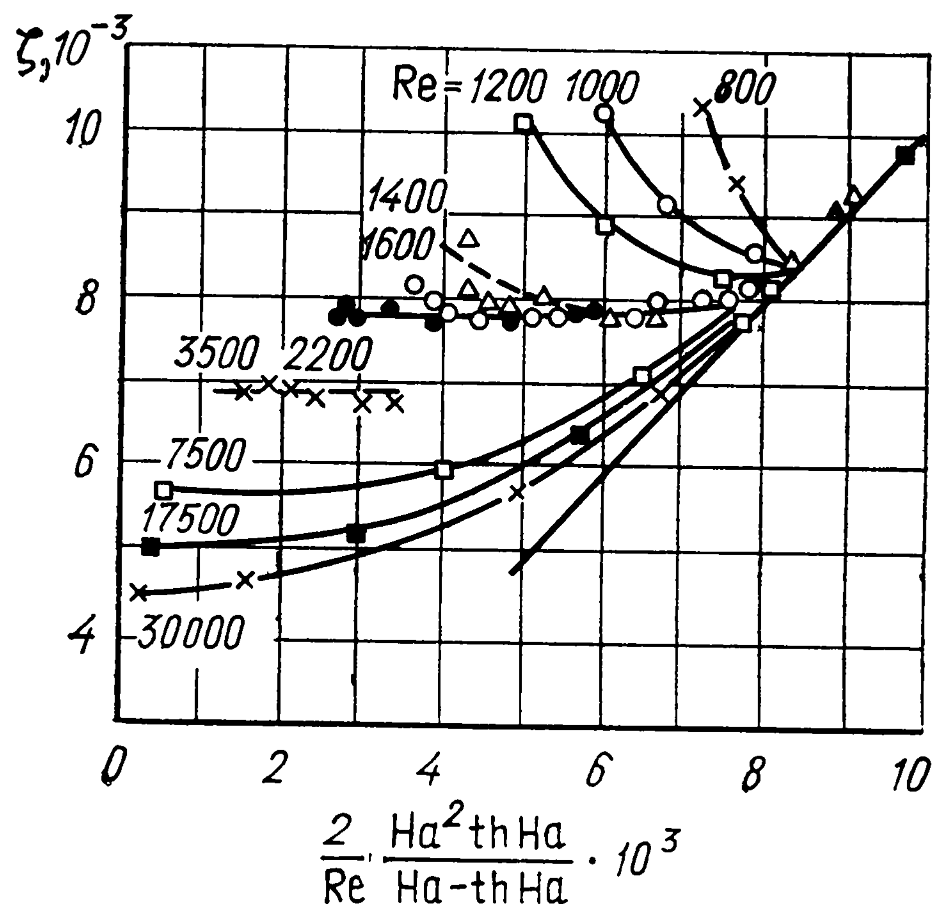



Рис. 23.8. Коэффициент сопротивления при течении ртути в поперечном магнитном поле

где $\mathrm{Re}_{\text{гр}} \approx 2500$, коэффициент сопротивления падает с ростом магнитного поля, при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\text{гр}}$ — возрастает. В области $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\text{гр}}$ вполне удовлетворительна следующая эмпирическая формула:

$$\zeta_m = \zeta_0 (1 + 2\mathrm{Ha}^2/\mathrm{Re}), \quad (23.3.1)$$

где $\zeta_0$ — коэффициент гидравлического сопротивления, соответствующий данному Re при $\mathrm{Ha} = 0$. Зависимость (23.3.1) справедлива только для гидравлически гладких стенок. В случае шероховатых стенок влияние поля сказывается сильнее.

На рис. 23.9 приведены результаты расчета полного касательного напряжения, полученные Д. С. Ковнером, для установившегося плоскопараллельного течения проводящей жидкости в поперечном магнитном поле. Как видно, по мере увеличения числа Ha размер ламинаризованного ядра потока увеличивается.

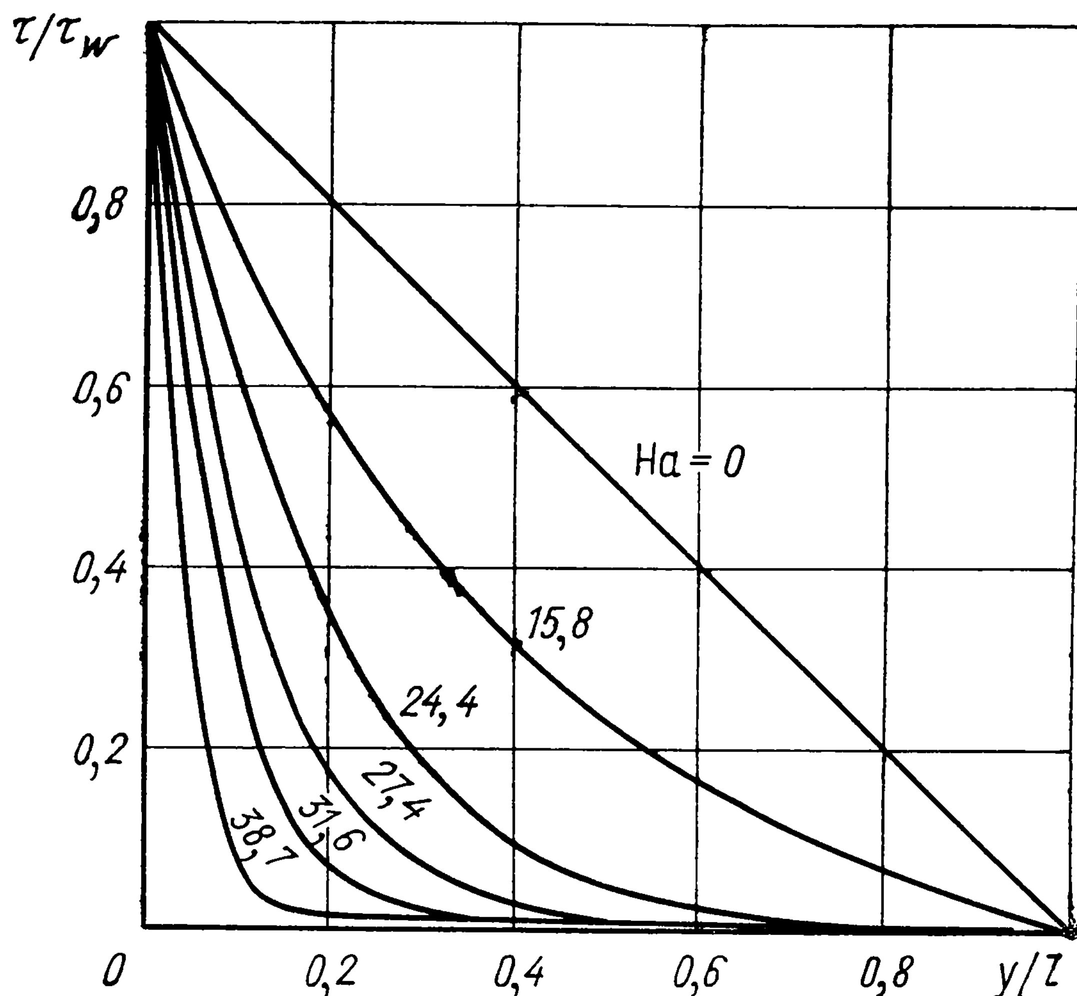



Рис. 23.9. Распределение полного касательного напряжения в турбулентном потоке при различных числах Гартмана ($\mathrm{Re}_* = u_*\delta/\nu = 10^3$; $\delta$ — полуширина канала)

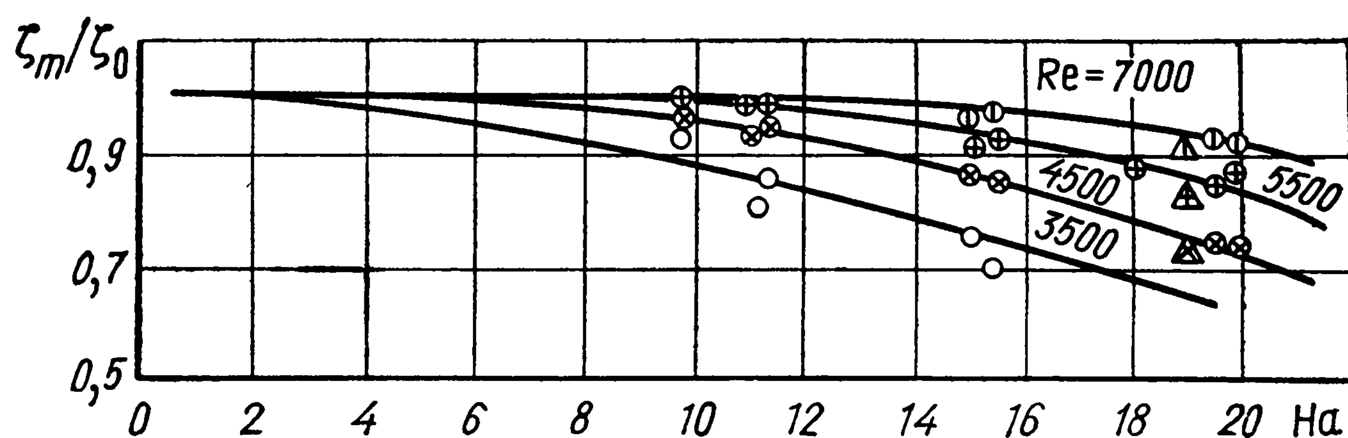



Рис. 23.10. Влияние продольного магнитного поля на коэффициент трения при турбулентном движении ртути в трубе

На рис. 23.10 приведена полученная Глоубом зависимость коэффициента трения от числа Гартмана для различных значений числа Рейнольдса при турбулентном течении. Как видно, коэффициент турбулентного трения уменьшается с ростом числа Гартмана.

## 23.4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕРМОГАЗОДИНАМИКИ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ

Одной из важных областей приложения электромагнитной гидродинамики являются процессы течения и теплообмена в генераторах низкотемпературной плазмы — электродуговых плазмотронах. Главной особенностью этих течений является наличие значительных градиентов температуры (на оси канала плазмотрона $T = (10 \div 20) \cdot 10^3$ К, а на стенке $T = 400 \div 500$ К) и зависящих от температуры свойств среды. Вследствие этого в уравнениях, описывающих такие течения, вязкость и плотность входят под знак оператора, а переменная плотность определяется уравнением состояния:

$$\rho \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{g}\rho - \operatorname{grad} p + \mu_e (\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}) + \mu \nabla^2 \mathbf{w} + \frac{1}{3} \operatorname{grad} (\mu \operatorname{div} \mathbf{w}) - \mathbf{w} \nabla^2 \mu + \\ + \operatorname{grad} (\mathbf{w} \operatorname{grad} \mu) + \operatorname{rot} (\mathbf{w} \times \operatorname{grad} \mu); \qquad (23.4.1)$$

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div} (\rho \mathbf{w}) = 0; \qquad (23.4.2)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left( i + \frac{w^2}{2} \right) = \rho \mathbf{g} \mathbf{w} + \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{j} \mathbf{E} + \operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T + q_r + \\ + \operatorname{div} \left[ \mu \left( \operatorname{grad} w^2 - \mathbf{w} \times \operatorname{rot} \mathbf{w} - \frac{2}{3} \mathbf{w} \operatorname{div} \mathbf{w} \right) \right]; \qquad (23.4.3)$$

$$R\rho T = p; \qquad (23.4.4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}; \qquad (23.4.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0; \qquad (23.4.6)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_e \partial \mathbf{H}/\partial t; \qquad (23.4.7)$$

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mu_e \mathbf{w} \times \mathbf{H}), \qquad (23.4.8)$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля; $q_r$ — плотность потока излучения в приближении оптически тонкого слоя.

Уравнение (23.4.8) есть простейшая форма закона Ома. Мерой отношения индуцированной плотности тока ($\sigma\mu_e \mathbf{w} \times \mathbf{H}$) к полной плотности тока является $\mathrm{Re}_m$. В электродуговых течениях обычно $\mathrm{Re}_m \ll 1$, поэтому закон Ома записывается в виде

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \qquad (23.4.9)$$

Отношение кинетической энергии течения к теплосодержанию имеет порядок $\mathrm{M}^2$, где М — число Маха—Маиевского. Отношение работы сил внутреннего трения к энергии, отводимой теплопроводностью, имеет порядок $\mathrm{Pr}\mathrm{M}^2$. Таким образом, в тех случаях, когда число М потока в плазмотроне достаточно мало (это часто имеет место), кинетической энергией и работой сил трения мож-

но пренебречь, точно так же, как и работой сил тяжести. Тогда уравнение энергии запишется в виде

$$\rho di/dt - \partial p/\partial t = j^2/\sigma + \operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T + q_r. \qquad (23.4.10)$$

Простейшим примером течения в электродуговом плазмотроне является стационарное установившееся ламинарное течение неизлучающего газа в круглой трубе. В этом случае уравнения (23.4.10) и (23.4.7) принимают вид

$$\sigma E^2 + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\lambda \frac{dT}{dr}\right) = 0; \quad E = \text{const}. \qquad (23.4.11)$$

Меккер решал это уравнение путем введения функции $S = \int_0^T \lambda dT$ и приближенного представления $\sigma$ $(S)$ в виде кусочно-линейной зависимости:

$$\sigma(S) = \begin{cases} b^2(S - S_*) & \text{при} \quad S \geqslant S_*; \\ 0 & \text{при} \quad S < S_*, \end{cases} \qquad (23.4.12)$$

где $S_*$ — некоторое граничное значение $S$. Зависимость (23.4.12) разбивает канал плазмотрона на две области: электропроводную ($\sigma \neq 0$) около оси и неэлектропроводную ($\sigma = 0$), прилежащую к стенкам трубы. В электропроводной области решением уравнения (23.4.11) является функция Бесселя нулевого порядка

$$\frac{\sigma}{\sigma_m} = \frac{S - S_*}{S_m - S_*} = J_0(rEb), \qquad (23.4.13)$$

где $\sigma_m$ и $S_m$ — значения $\sigma$ и $S$ на оси. Граница электропроводной зоны $r_*$ определяется первым нулем функции $J_0$ $(rEb)$:

$$r_* Eb = 2{,}405. \qquad (23.4.14)$$

Из решения уравнения теплопроводности в неэлектропроводной зоне в предположении, что на стенке трубы ($r = R$) $S \approx 0$, находят соотношение между напряженностью электрического поля и $S_m$:

$$REb = 2{,}405 \exp\left[\frac{S_m}{1{,}248\,(S_m - S_*)}\right]. \qquad (23.4.15)$$

После подстановки решения (23.4.14) в уравнение полного тока

$$I = 2\pi E \int_0^{r^*} \sigma r dr \qquad (23.4.16)$$

можно получить еще одно соотношение:

$$I = 2{,}496\pi\,(S_m - S_*)/E. \qquad (23.4.17)$$

Уравнения (23.4.15) и (23.4.17) позволяют по известной зависимости $S_*$ от $S_m$ определить вольт-амперную характеристику дуги, т. е. функцию $V = EL = V(I)$, где $L$ — длина трубы.

Решение уравнения энергии (23.4.11) позволяет найти распределение температуры и других свойств среды по радиусу трубы, что дает возможность определить профиль скорости из уравнения движения

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\mu \frac{du}{dr}\right) = \frac{dp}{dz}, \qquad (23.4.18)$$

где перепад давления задан, и коэффициент трения из условия сохранения расхода

$$\int_0^R \rho u r dr = \frac{1}{2} R^2 \rho_0 u_0, \qquad (23.4.19)$$

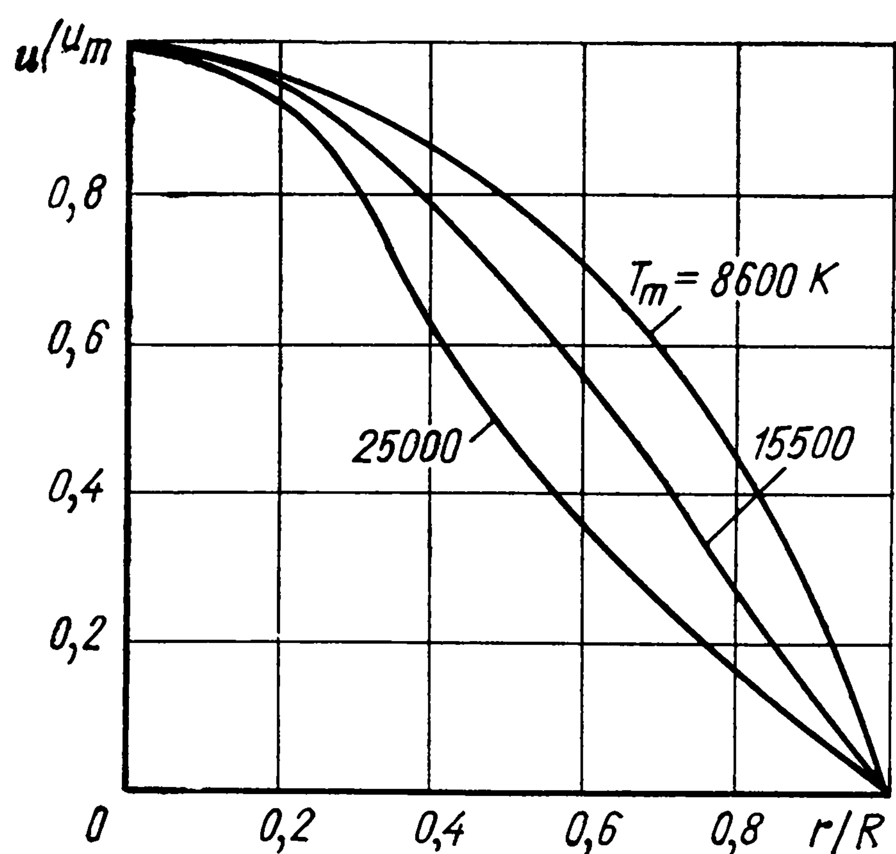



Рис. 23.11. Профиль скорости ламинарного течения в плазмотроне ($R=1$ см) при различных осевых температурах

где индексом 0 отмечены параметры «холодного» потока — на входе в канал. Результаты решения:

$$u/u_0 = (c_f/4)\,\mathrm{Re}\int_{\xi}^{1}(\mu_0\,\xi/\mu)\,d\xi; \quad (23.4.20)$$

$$\frac{c_f}{2}\,\mathrm{Re} = \left[\int_0^1 \frac{\rho}{\rho_0}\left(\int_{\xi}^{1}\frac{\mu_0\,\xi\,d\xi}{\mu}\right)\xi d\xi\right]^{-1}. \quad (23.4.21)$$

Здесь $\xi = r/R$; $c_f = 2\tau_w/\rho_0 u_0^2$; $\mathrm{Re} = u_0 d/\nu_0$.

На рис. 23.11 приведены результаты численного расчета профиля скорости для воздуха, проведенного Вебером. Видно, что с ростом температуры газа на оси профиль скорости в приосевой зоне становится более заостренным. Коэффициент трения, как показывает анализ уравнения (25.4.21), с ростом температуры потока увеличивается.

Рассмотрим турбулентное установившееся течение в круглой трубе, следуя работе Б. А. Урюкова и полагая, что коэффициенты турбулентной вязкости и теплопроводности определяются обычной формулой Прандтля.

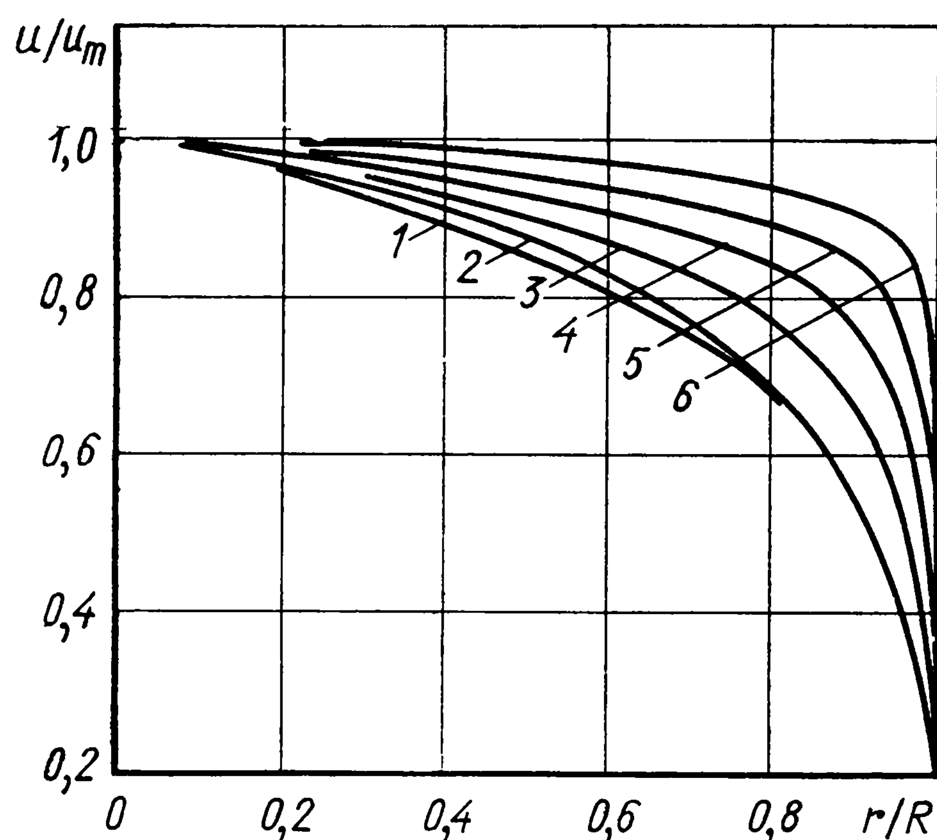



Рис. 23.12. Профиль скорости турбулентного течения в плазмотроне при различных осевых температурах и числах Рейнольдса:
*1* — $\mathrm{Re}=5\cdot10^3$, $T_m = 6000$ K; *2* — $\mathrm{Re} = 5\cdot10^3$, $T_m = 25\,000$ K; *3* — $\mathrm{Re}=1{,}5\cdot10^4$, $T_m=(6\div25)\times10^3$ K; *4* — $\mathrm{Re} = 5\cdot10^4$, $T_m = (6\div25)\cdot10^3$ K; *5* — $\mathrm{Re}=1{,}5\cdot10^5$, $T_m = (6\div25)\cdot10^3$ K; *6* — $\mathrm{Re}=5\cdot10^5$, $T_m=(6\div25)\cdot10^3$ K

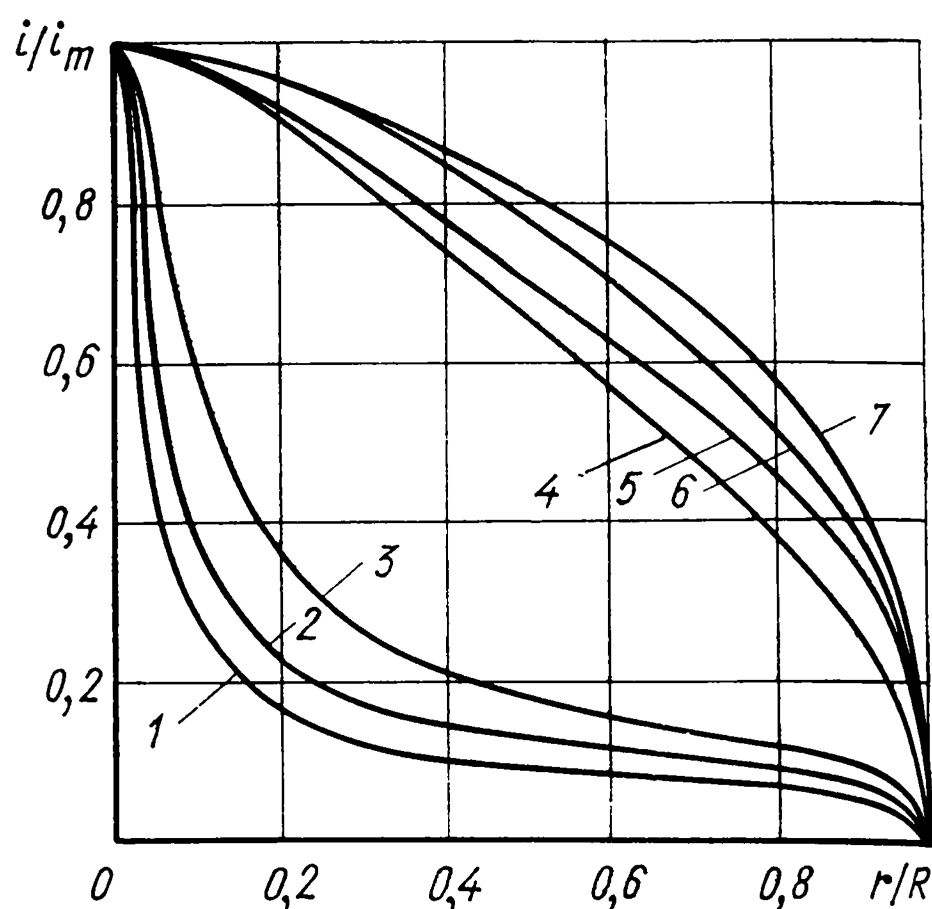



Рис. 23.13. Профиль теплосодержания турбулентного течения в плазмотроне при различных осевых температурах и числах Рейнольдса:
*1* — $\mathrm{Re}=5\cdot10^5$, $T_m=6000$ K; *2* — $\mathrm{Re}=1{,}5\cdot10^4$, $T_m=6000$ K; *3* — $\mathrm{Re}=5\cdot10^3$, $T_m=6000$ K; *4* — $\mathrm{Re} = 5\cdot10^3$, $T_m = 7500$ K; *5* — $\mathrm{Re}=5\cdot10^5$, $T_m=7500$ K; *6* — $\mathrm{Re}=5\cdot10^3$, $T_m=25\,000$ K; *7* — $\mathrm{Re}=5\cdot10^5$, $T_m=25\,000$ K

На рис. 23.12 и 23.13 показаны результаты численного расчета профилей скорости и теплосодержания воздушной плазмы при различных числах Рейнольдса и осевых температурах. Форма профиля скорости в основном определяется числом Рейнольдса, а профиль теплосодержания — значением осевой температуры (т. е. силой тока).

## 23.5. ОБОБЩЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОДУГОВЫХ ПЛАЗМОТРОНОВ

Течения в реальных плазмотронах изучены недостаточно и исследования характеристик плазмотронов основываются главным образом на определении экспериментальных зависимостей между критериями подобия. К известным критериям подобия магнитной гидродинамики (M, Pr, Re, $Re_m$, Ha) добавляются новые безразмерные параметры:

$$K_1 = V\sigma_0\, l/I; \quad K_2 = I^2/(Gi_0\,\sigma_0\, l);$$

$$K_3 = q_{r_0}\, c_{p_0}\, l^2/(\lambda_0\, i_0), \qquad (23.5.1)$$

где индекс 0 отвечает характерным свойствам среды.

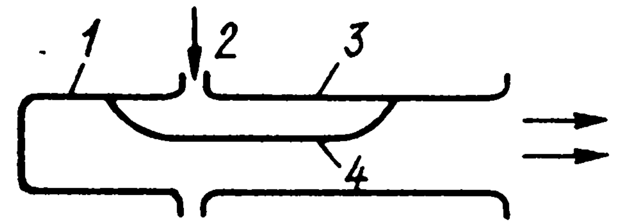



Рис. 23.14. Схема плазмотрона:

*1* — внутренний электрод; *2* — тангенциальный подвод газа; *3* — наружный электрод; *4* — дуга

Параметр $K_1$ получается из закона Ома; $K_2$ характеризует соотношение между джоулевым теплом и конвективным переносом энергии; $K_3$ отражает соотношение между энергией излучения и энергией, отводимой теплопроводностью. Критерии $K_1$ и $K_2$ были введены автором и О. И. Ясько на основе теории размерностей и предложены для описания энергетического процесса нагрева газа током дуги в плазмотроне с вихревой газовой стабилизацией (рис. 23.14).

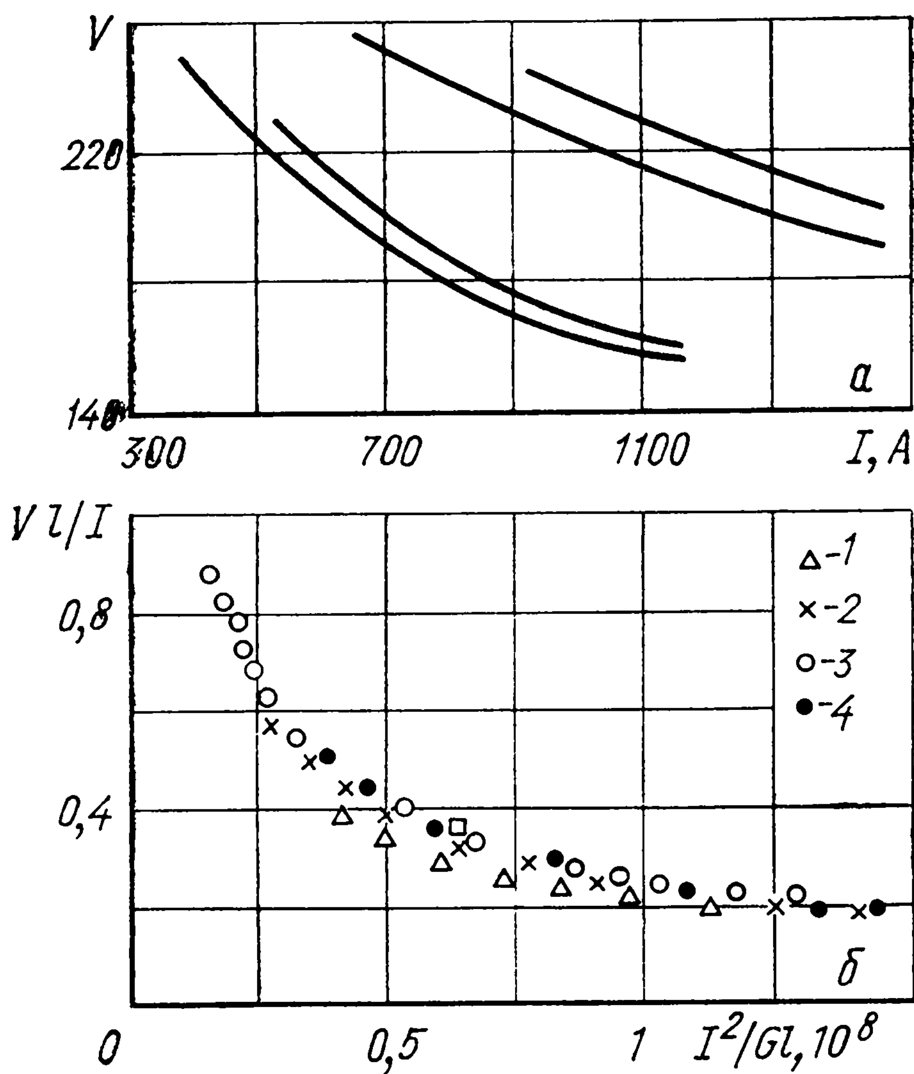



Рис. 23.15. Вольт-амперные характеристики (*а* — необобщенные, *б* — обобщенные) электродугового подогревателя с вихревой азотной стабилизацией:

*1* — $G = 1{,}4\cdot10^{-2}$ кг/с, $l = 1{,}35 \div 1{,}55$ см; *2* — $1{,}1\cdot10^{-2}$ кг/с, $1{,}35 \div 1{,}55$ см; *3* — $6{,}5\cdot10^{-3}$ кг/с, $1{,}35 \div 1{,}55$ см; *4* — $6{,}5\cdot10^{-3}$ кг/с, 1,2 см

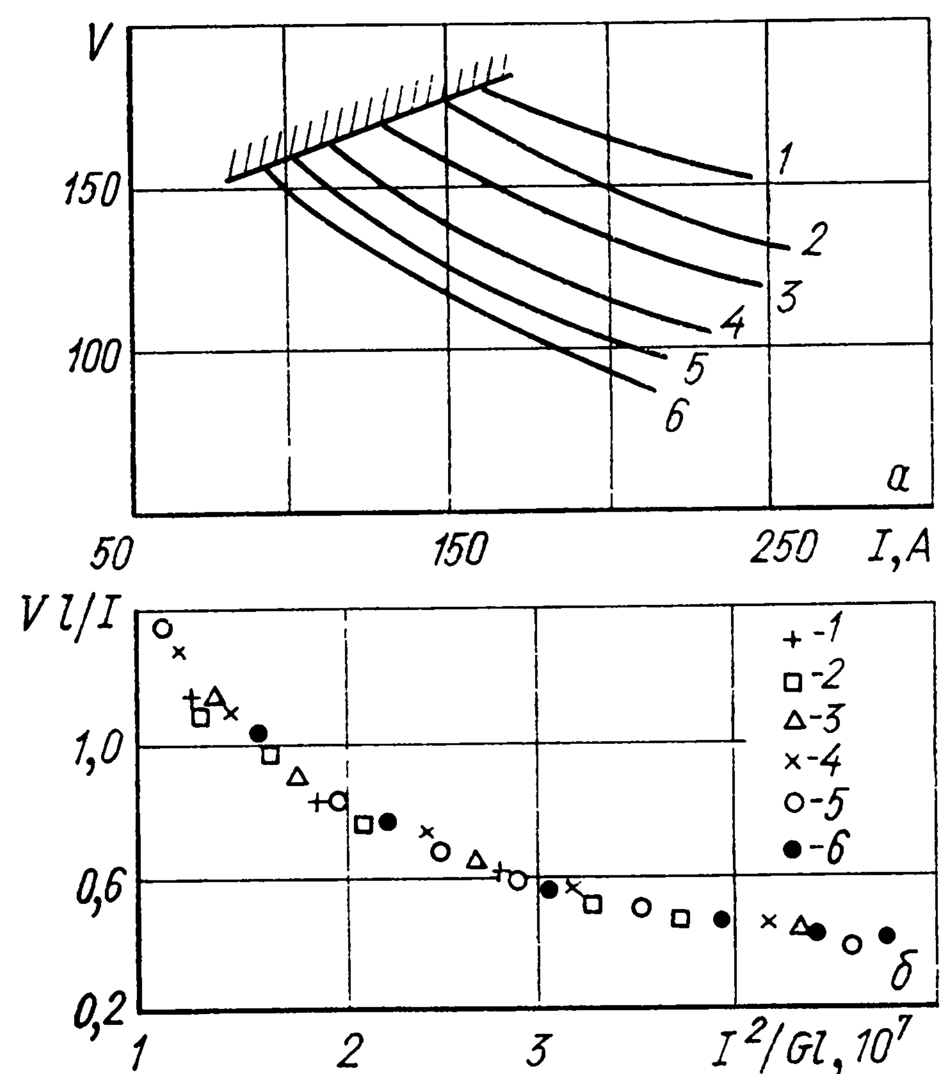



Рис. 23.16. Вольт-амперные характеристики (*а* — необобщенные, *б* — обобщенные) электродугового подогревателя с вихревой воздушной стабилизацией;

*1* — $G = 2{,}05\cdot10^{-3}$ кг/с; *2* — $1{,}83\cdot10^{-3}$; *3* — $(1{,}4 \div 1{,}6)\cdot10^{-3}$; *4* — $1{,}26\cdot10^{-3}$; *5* — $1{,}15\cdot10^{-3}$; *6* — $1{,}01\cdot10^{-3}$; $l = 1$ см

В плазмотронах часто реализуются условия, при которых M, $Re_m$, Ha $\ll 1$, а Re $\gg 1$. Поэтому безразмерная вольт-амперная характеристика приближенно выражается функцией

$$K_1 = \Phi\,(K_2,\ K_3,\ \mathrm{Pr}). \qquad (23.5.2)$$

В ряде газов, таких как воздух, азот, водород, гелий, энергия излучения мала; кроме того, числа Прандтля для различных газов мало отличаются друг от друга. В связи с этим зависимости (23.5.2) можно придать вид

$$K_1 = \Phi_1\,(K_2). \qquad (23.5.3)$$

Если допустить, что при заданном давлении в камере температура в дуговом столбе изменяется не очень сильно, то физические характеристики $\sigma_0$ и $i_0$ можно отбросить. Тогда для заданного газа и рабочего давления в камере связь между размерными параметрами можно записать в виде:

$$Vl/I = \Phi_1 I^2/(Gl). \tag{23.5.4}$$

На рис. 23.15, *а* и 23.16, *а* показаны экспериментальные вольт-амперные характеристики электродуговых подогревателей с вихревой газовой стабилизацией дуги, по данным В. Л. Сергеева, М. Ф. Жукова и др. На рис. 23.15, *б* и 23.16, *б* приведены те же экспериментальные данные, обобщенные в системе координат (23.5.4). Точки на обобщенных графиках соответствуют произвольно снятым значениям с первичных экспериментальных кривых.

Как видно, несмотря на существенные изменения параметров, все данные в обобщенных координатах можно представить одной кривой. Это указывает на то, что для описания даже такого сложного явления, как электрическая дуга, в некоторых случаях можно ограничиться небольшим количеством критериев.

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*


1. **Бранover Г. Г.** Турбулентные МГД-течения в трубах. Рига, «Зинатне», 1967.
2. **Вопросы** магнитной гидродинамики. Рига, Изд-во АН ЛатвССР, 1963.
3. **Гаррис А.** Магнитогидродинамические течения в каналах. Пер с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
4. **Глоуб С.** Влияние продольного магнитного поля на движение ртути в трубах.— «Тр. амер. об-ва инж.-мех. Сер. С. Теплопередача», 1961, т. 83, № 4, с. 69.
5. **Жуков М. Ф., Смоляков В. Я., Урюков Б. А.** Электродуговые нагреватели газа (плазмотроны). М., «Наука», 1973.
6. **Калихман Л. Е.** Элементы магнитной газодинамики. М., Атомиздат, 1964.
7. **Каулинг Т.** Магнитная гидродинамика. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
8. **Кирко Н. М.** Жидкий металл в электромагнитном поле. М., «Энергия», 1964.
9. **Куликовский А. Г., Любимов Г. А.** Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
10. **Кутателадзе С. С., Ясько О. И.** Обобщение характеристик электродуговых подогревателей.— «Инж.-физ. журн.», 1964, № 4, с. 23.
11. **Сыроватский С. И.** Магнитная гидродинамика. — «Успехи физ. наук», 1957, т. 62, вып. 3, с. 247.
12. **Урюков Б. А., Хайтман С. М.** Дуга в турбулентном потоке.—Тезисы докл. V Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы, т. 1. Новосибирск, 1972, с. 55.

# Глава 24 НЕУСТАНОВИВШИЙСЯ КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

## 24.1. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ КОНВЕКТИВНУЮ НЕСТАЦИОНАРНОСТЬ

Проблема нестационарного конвективного теплообмена многогранна и сложна. В этой главе мы рассмотрим некоторые ее важные особенности на относительно простых примерах.

Пусть задано твердое тело, погруженное в не ограниченный извне поток жидкости с постоянными физическими свойствами и постоянной температурой на бесконечности. Запишем уравнение распространения тепла в жидкости:

$$\partial T/\partial t + w_i \partial T/\partial x_i = a\partial^2 T/\partial x_i^2, \qquad (24.1.1)$$

где $i = 1, 2, 3$ — номера координат, направленных по обводу тела вдоль течения ($x$), по нормали к поверхности тела в глубь потока ($y$) и по обводу тела перпендикулярно $x$.

Краевые условия в рассматриваемом случае таковы:

$$\{y=0, \quad T=T_{\text{ст}}(t); \quad y \to \infty, \quad T \to T_0\}. \qquad (24.1.2)$$

Скорость течения жидкости в общем случае может быть функцией времени, т. е.

$$w_i = w_i(x_i, t); \quad w_0 = w_0(t), \qquad (24.1.3)$$

где $w_0$ — характерная скорость течения.

Безразмерную температуру можно образовать двумя способами. Первый, уже использованный при рассмотрении канонических задач нестационарной теплопроводности в твердом теле, сводится к введению масштабной разности температур

$$\Delta T_0 = T_{\text{ст}}(0) - T_0. \qquad (24.1.4)$$

Второй способ заключается во введении текущего масштаба разности температур

$$\Delta T = T_{\text{ст}}(t) - T_0. \qquad (24.1.5)$$

Введем соответствующие обозначения безразмерных локальных температурных напоров:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_0 &= \frac{T(t)-T_0}{T_{\text{ст}}(0)-T_0}; \\ \vartheta &= \frac{T(t)-T_0}{T_{\text{ст}}(t)-T_0}. \end{aligned}\right\} \qquad (24.1.6)$$

Соответственно безразмерная форма уравнения (24.1.1) и краевых условий будет иметь две модификации:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \vartheta_0}{\partial F_0} + \mathrm{Pe}\,\omega_i \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial \tilde{x}_i^2}; \\ &y=0, \ \vartheta_0 = \frac{T_{\text{ст}}(t)-T_0}{T_{\text{ст}}(0)-T_0}; \quad y \to \infty, \ \vartheta_0 \to 0; \\ &\frac{T_{\text{ст}}(t)-T_0}{T_{\text{ст}}(0)-T_0} = \vartheta_{0,\text{ст}}(\mathrm{Fo}); \end{aligned}\right\} \qquad (24.1.7)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \vartheta}{\partial \mathrm{Fo}} + \frac{\vartheta}{\Delta T}\frac{\partial \Delta T}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Pe}\,\omega_i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \tilde{x}_i^2}; \\ &y=0, \quad \vartheta = 1; \quad y \to \infty, \quad \vartheta \to 0. \end{aligned}\right\} \qquad (24.1.8)$$

Здесь $\mathrm{Fo} = at/L^2$, $\mathrm{Pe} = w_0 L/a$ — критерии Фурье и Пекле; $\omega_i = w_i/w_0$, $\tilde{x}_i = x_i/l_0$ — компоненты безразмерной скорости течения и безразмерные координаты; $l_0$ — характерный линейный размер; $\Delta T = T_{\text{ст}} - T_0$ — текущий температурный напор.

Постановка задачи в форме (24.1.7) приводит к появлению трех определяющих тепловых безразмерных параметров:

$$\{\mathrm{Pe};\quad \mathrm{Fo};\quad \vartheta_{0,\text{ст}}\}. \tag{24.1.9}$$

Постановка задачи в форме (24.1.8) приводит к параметрам

$$\left\{\mathrm{Pe};\quad \mathrm{Fo};\quad \frac{1}{\Delta T}\frac{\partial \Delta T}{\partial \mathrm{Fo}}\right\}. \tag{24.1.10}$$

Переход между этими формами в общем случае осуществляется набором параметров

$$\frac{1}{\Delta T}\frac{\partial^i \Delta T}{\partial \mathrm{Fo}^i}. \tag{24.1.11}$$

Из уравнения движения возникают критерий Рейнольдса и критерий гидродинамической гомохронности

$$\mathrm{Ho} = \mathrm{FoPe} \tag{24.1.12}$$

или набор локальных критериев

$$\frac{l_0^i}{w_0^{i+1}}\frac{\partial^i w_0}{\partial t^i}. \tag{24.1.13}$$

При скачкообразном изменении граничных условий решение всегда имеет вид

$$\vartheta\,(\mathrm{Pr};\ \mathrm{Re};\ \mathrm{Ho}). \tag{24.1.14}$$

При малом влиянии нестационарности можно строить решение для локальных во времени параметров в виде некоторой итерации:

$$\vartheta\left(\mathrm{Pr};\quad \mathrm{Re};\ \frac{1}{\Delta T}\frac{\partial \Delta T}{\partial \mathrm{Fo}};\ \frac{1}{\Delta T}\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial \mathrm{Fo}^2};\ldots\right) \tag{24.1.15}$$

## 24.2. ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛАСТИНЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ

Исходная система уравнений для сжимаемой среды имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + w_x\frac{\partial T}{\partial x} + w_y\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2;\\
&\rho\left(\frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x\frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\quad\frac{\partial w_x}{\partial y}\right);\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho w_y}{\partial y} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{24.2.1}$$

Граничные условия:

$$\left\{\begin{aligned}
&y = 0,\ w_x = w_y = 0,\ T = T_{\text{ст}}(t);\\
&y\to\infty,\ w_x\to w_0 = \mathrm{const},\ T\to T_0 = \mathrm{const}.
\end{aligned}\right\} \tag{24.2.2}$$

Спэрроу и Грэгг рассмотрели модельный газ с $c_p = \mathrm{const}$ и $\rho\lambda = \mathrm{const}$.

Введем функцию тока

$$w_x = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial \Psi}{\partial y};\quad w_y = -\frac{\rho}{\rho_0}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^y \frac{\rho}{\rho_0}\,dy\right) \tag{24.2.3}$$

и переменные

$$\vartheta = \frac{T - T_0}{T_{\text{ст}} - T_0}; \quad Y = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy; \quad \eta = \frac{y}{2x} \operatorname{Re}_x^{1/2}, \tag{24.2.4}$$

т. е. используем преобразования Дородницина и Блазиуса.

Система уравнений (24.2.1) приводится к виду

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\vartheta}{\Delta T} \frac{\partial \Delta T}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial Y} = \\ &= \frac{\nu_0}{\Pr} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial Y^2} + \frac{\mu_0}{\lambda_0 \Delta T} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right)^2; \\ &\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = \nu_0 \frac{\partial^3 \Psi}{\partial Y^3}. \end{aligned}\right\} \tag{24.2.5}$$

Для случая малых отклонений от квазистационарности решение ищется в виде рядов:

$$\left.\begin{aligned} &\Psi = \sqrt{\nu_0 w_0 x} \left[ f_0(\eta) + \frac{x}{\Delta T w_0} \frac{\partial T_{\text{ст}}}{\partial t} f_1(\eta) + \frac{x^2}{\Delta T w_0^2} \frac{\partial^2 T_{\text{ст}}}{\partial t^2} + \ldots \right]; \\ &\vartheta = \vartheta_0(\eta) + \frac{x}{\Delta T w_0} \frac{\partial T_{\text{ст}}}{\partial t} \vartheta_1(\eta) + \ldots + \frac{w_0^2}{2 c_p \Delta T} \Phi(\eta). \end{aligned}\right\} \tag{24.2.6}$$

Подставив уравнения (24.2.6) в (24.2.5), можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $\vartheta_0$, $\vartheta_1$, $\vartheta_2$, $f_0$, $\Phi$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^3 f_0}{d\eta^3} + f_0 \frac{d^2 f_0}{d\eta^2} = 0; \\ &\frac{d^2 \vartheta_0}{d\eta^2} + \Pr f_0 \frac{d\vartheta_0}{d\eta} = 0; \\ &\frac{d^2 \vartheta_1}{d\eta^2} + \Pr \left( f_0 \frac{d\vartheta_1}{d\eta} - 2\vartheta_1 \frac{df_0}{d\eta} - 4\vartheta_0 \right) = 0; \\ &\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \eta^2} + \Pr \left( f_0 \frac{d\vartheta_2}{d\eta} + 4\vartheta_2 \frac{df_0}{d\eta} - 4\vartheta_1 \right) = 0; \\ &\frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + \Pr \left[ f_0 \frac{d\Phi}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \left( \frac{df_0}{d\eta} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{24.2.7}$$

при граничных условиях

$$\left\{\begin{aligned} &\eta = 0,\ f_0 = df_0/d\eta = 0,\ \Phi = 0,\ \vartheta_0 = 1,\ \vartheta_1 = \vartheta_2 = 0; \\ &\eta \to \infty,\ f_0' \to 2,\ \Phi \to 0,\ \vartheta_0 = \vartheta_1 = \vartheta_2 \to 0. \end{aligned}\right\} \tag{24.2.8}$$

Численное решение было получено для значения $\Pr = 0{,}72$ и аппроксимировано формулой

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = 1 + 2{,}4 \frac{x}{\Delta T w_0} \frac{\partial T_{\text{ст}}}{\partial t} + 0{,}8 \frac{x^2}{\Delta T w_0^2} \frac{\partial^2 T_{\text{ст}}}{\partial t^2} + \ldots, \tag{24.2.9}$$

где квазистационарное значение коэффициента теплоотдачи определялось обычной формулой

$$\operatorname{Nu}_{x,0} = 0{,}259 \operatorname{Re}_x^{1/2}. \tag{24.2.10}$$

Температурный напор в данном случае был взят с учетом коэффициента восстановления, т. е. по известной формуле:

$$\Delta T = T_{\text{ст}} - T_0 \left( 1 + \Pr^{1/2} \frac{k-1}{2} \mathrm{M}^2 \right). \tag{24.2.11}$$

Влияние нестационарности на теплообмен и трение в ламинарном пограничном слое оказывается небольшим. Так, при $\Delta T = 50$ К, $\partial T_{\text{ст}}/\partial t = 10$ К/с, $\partial^2 T_{\text{ст}}/\partial t^2 = -0{,}5$ К/с$^2$, $x = 1$ м и $w_0 = 300$ м/с отклонение от квазистационарного расчета (т. е. расчета по формулам стационарного режима при подстановке в них мгновенных значений соответствующих величин) составляет менее 5%.

## 24.3. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ОБТЕКАНИИ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

При мгновенном изменении условий на поверхности твердого тела, т. е. при скачкообразном изменении температуры или концентрации

$$T(-0) \neq T(+0), \tag{24.3.1}$$

начинает формироваться тепловой (концентрационный) пограничный слой, аккумулирующий в себе все выделяемое (поглощаемое) тепло или всю выделяемую (поглощаемую) массу. В этот период в основной поток окружающей тело среды тепло или вещество с поверхности тела не поступает. Если процесс неустановившийся и в гидродинамическом отношении, то одновременно происходит и формирование динамического пограничного слоя.

Первая работа по исследованию нестационарного массообмена сферических частиц была выполнена Б. Д. Кацнельсоном и Ф. А. Тимофеевой. Так как массообмен в слабоконцентрированных растворах в безразмерных параметрах аналогичен теплообмену, то результаты этих опытов можно записать в терминах теории теплообмена. Для коэффициента теплоотдачи, определенного по потоку с поверхности частицы и мгновенной разности температур этой поверхности и невозмущенной окружающей среды, опыты в области $50 < \mathrm{Re} < 3200$ можно описать формулой

$$\alpha/\alpha_0 = 1 + 5{,}6\mathrm{Pr}^{1/2}\,\mathrm{Ho}^{-1}, \tag{24.3.2}$$

где $\alpha_0$ — коэффициент теплоотдачи в стационарных условиях, определяемый формулой (10.13.3).

Отсюда видно, что частица диаметром 1 мм, пролетая в газе, достигает квазистационарного состояния за время порядка 0,1 с.

## 24.4. НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛООБМЕН ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ В ТРУБЕ

Расчеты, проведенные Спэрроу и Зигелем, Ю. И. Кузнецовым и В. П. Белоусовым в предположении квазистационарности структуры турбулентного потока, дали результаты, аналогичные приведенному выше анализу нестационарного теплообмена в ламинарном пограничном слое. Однако в экспериментах Э. К. Калинина, В. К. Кошкина, Г. А. Дрейцера и С. А. Ярхо было обнаружено отчетливое влияние нестационарности на теплообмен при турбулентном течении в длинной круглой трубе.

Результаты этих опытов в виде зависимости

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = f\left(\mathrm{Re}, \frac{T_{\text{ст}}}{T_0}, \sqrt{\frac{a}{g w_0}}\,\frac{\partial \ln \Delta T}{\partial t}\right) \tag{24.4.1}$$

представлены на рис. 24.1.

Отчетливо видно, что влияние тепловой нестационарности при мгновенном изменении теплового потока уменьшается с ростом числа Рейнольдса. Отсюда

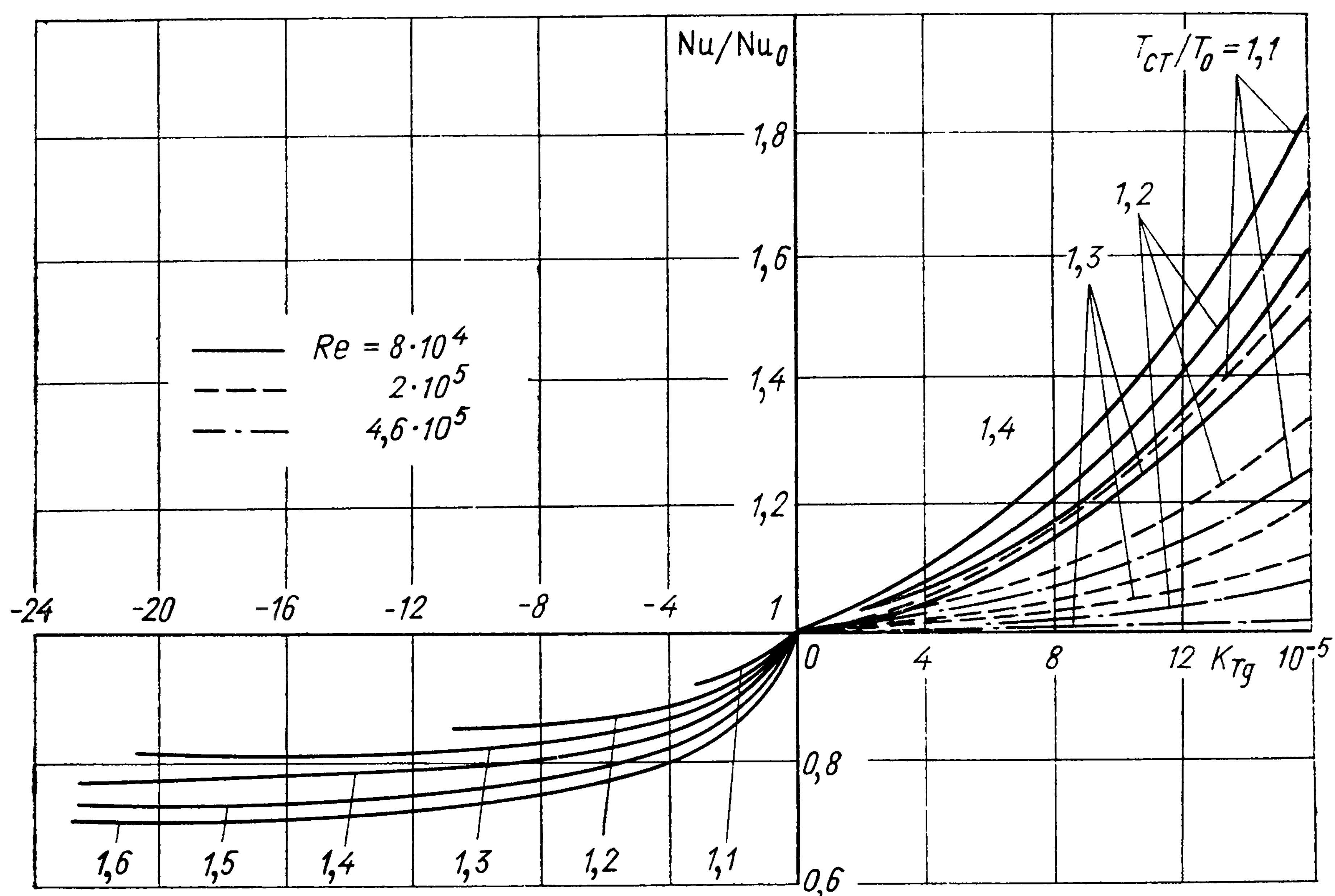



Рис. 24.1. Осредняющие зависимости Nu от $K_{тд}$ при различных значениях $T_{ст}/T_0$ и Re

можно сделать вывод о том, что гипотеза о квазистационарности структуры турбулентности может оправдываться при больших числах Рейнольдса или высокой степени турбулентности потока.

## 24.5. ВЛИЯНИЕ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ПРИ Pr≈1

На рис. 24.2 изображены течения, возникающие вокруг тела, помещенного в жидкость с наложенным звуковым полем.

Для синусоидального возмущения на бесконечном удалении от цилиндра

$$w_0' = B\sin 2\pi f t \tag{24.5.1}$$

и скорости внешнего потенциального течения

$$w' = 2B\,\mathrm{Sin}\,(x/R)\sin 2\pi f t \tag{24.5.2}$$

Шлихтинг получил следующие решения:

для скорости внешних вторичных стационарных течений (I) на рис. 24.2)

$$\overline{w}_0 = -\frac{3B^2}{4\pi f R}\sin\frac{2x}{R}; \tag{24.5.3}$$

для внутренних стационарных течений (II) на рис. 24.2

$$\overline{w}_0 = \frac{B^2}{\pi f \exp(-\eta)}\sin\frac{2x}{R}\left(\frac{\eta+4}{2}\sin\eta - \frac{\eta+1}{2}\cos\eta + \frac{1}{4\exp\eta} - \frac{3}{4}\exp\eta\right). \tag{24.5.4}$$

Здесь $B \ll 2\pi f R$ — амплитуда осцилляций наложенного звукового поля; $f$ — частота; $R$ — радиус цилиндра; $\eta = y(\pi f/\nu)^{1/2}$ — локальное частотное число Рейнольдса.

Соответственно порядок толщины возникающего пограничного слоя определяется формулой

$$\delta \sim (\nu/f)^{1/2}. \tag{24.5.5}$$

При $y > \delta$ формула (24.5.4) переходит в (24.5.3). Лобовая точка вторичных течений смещена на $\pi/2$ относительно лобовой точки для первичных наложенных колебаний. Допустим, что тепло и масса переносятся от поверхности тела вторичными течениями. Тогда толщина теплового пограничного слоя при отсутствии турбулентности имеет порядок

$$\delta_T \sim (aR/\bar{w}_0)^{1/2}. \tag{24.5.6}$$

Соответственно

$$\delta/\delta_T \approx S \, \mathrm{Pr}^{1/2}/R,$$

где $S = B/2\pi f$ — амплитуда колебаний частиц среды.

При $S \ll R$ и $\mathrm{Pr} \approx 1$ можно пренебречь термическим сопротивлением динамического слоя и рассчитать теплоотдачу в поле скоростей внешнего течения

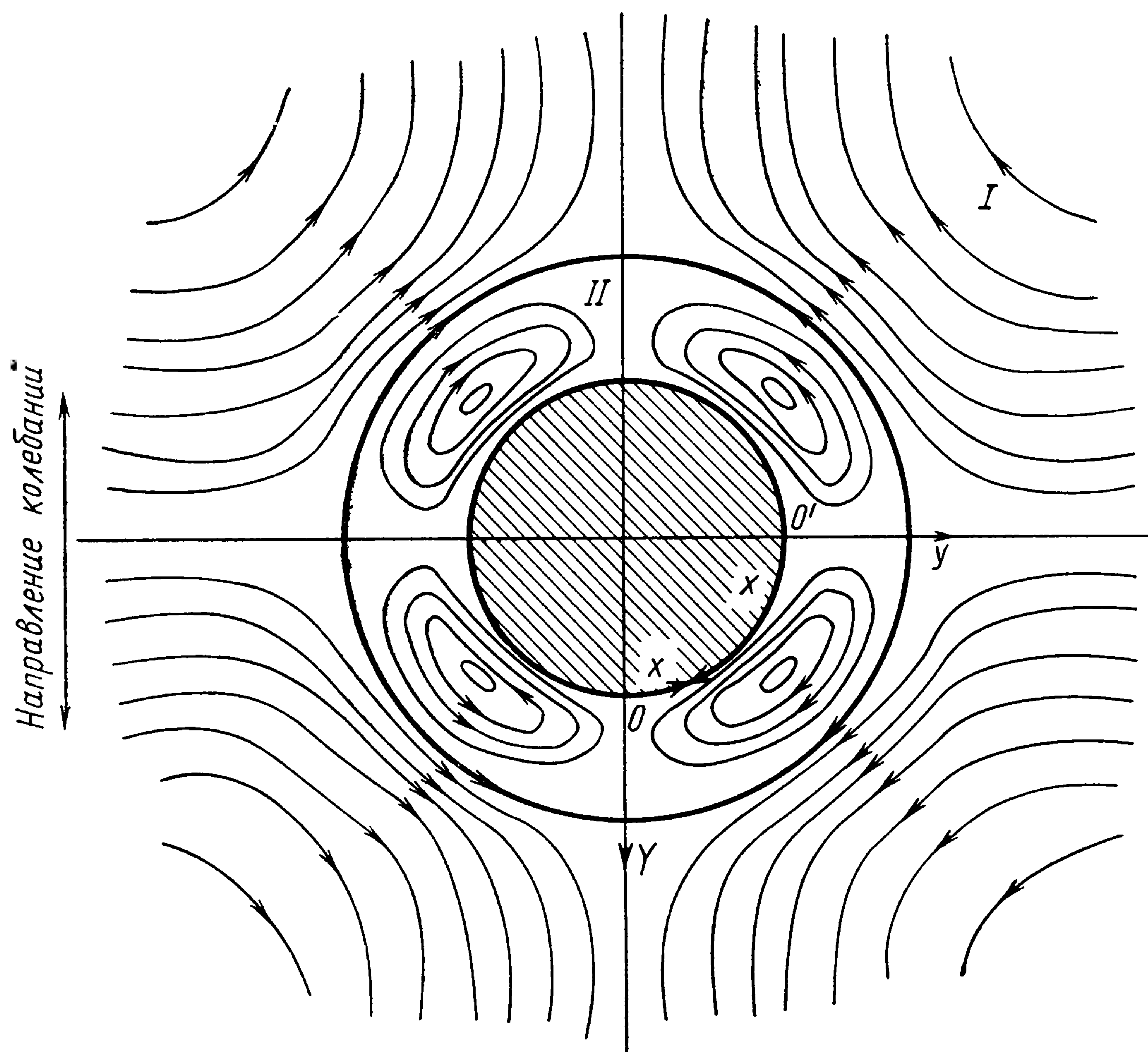



Рис. 24.2. Внешние (*I*) и внутренние (*II*) вторичные течения в окрестности цилиндра

(24.5.3). Начало координат для такого расчета удобно поместить в месте набегания вторичных потоков, как это показано на рис. 24.2.

Поле скоростей определится выражениями

$$w_x = \frac{3B^2}{4\pi f R} \sin \frac{2x}{R}; \quad w_y = -\frac{3B^2}{2\pi f R^2} \cos \frac{2x}{R}. \tag{24.5.7}$$

Уравнение распространения тепла в пограничном слое примет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + A(x)\, y \frac{\partial T}{\partial y} - B(x) \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \tag{24.5.8}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A(x) &= \frac{3B^2}{2\pi f R^2 a} \cos \frac{2x}{R}; \\ B(x) &= \frac{3B^2}{4\pi f R a} \sin \frac{2x}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{24.5.9}$$

Уравнение (24.5.8) можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$d^2T/d\eta^2 + T\eta/2 = 0, \qquad (24.5.10)$$

где $T = T_{ст}$ при $y = 0$ и $T \to T_0$ при $y \to \infty$;

$$\eta = y \left\{ \exp[-F(x)] \int_0^x \frac{\exp[F(x)]}{B(x)} dx \right\}^{-1/2}; \quad F(x) = 2 \int_0^x \frac{A(x)}{B(x)} dx.$$

Решение уравнения (24.5.10) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{T - T_{ст}}{T_0 - T_{ст}} &= \operatorname{erf} \frac{\eta}{2}; \\ q &= \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_{y=0}. \end{aligned} \right\} \qquad (24.5.11)$$

Отсюда следует формула Накорякова для коэффициента локальной теплоотдачи:

$$\frac{\alpha R}{\lambda} = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{B}{\sqrt{2\pi f a}} \cos \frac{x}{R} \qquad (24.5.12)$$

и средней теплоотдачи по всему цилиндру:

$$\frac{\bar{\alpha}}{\lambda} R = \frac{0{,}88B}{\sqrt{2\pi f a}}. \qquad (24.5.13)$$

Для сферы

$$\frac{\bar{\alpha}}{\lambda} R = \frac{0{,}95B}{\sqrt{2\pi f a}}. \qquad (24.5.14)$$

## 24.6. ВЛИЯНИЕ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ПРИ $Pr \to \infty$

В этом случае $\delta_T \ll \delta$ и переносы тепла и массы осуществляются внутренними вторичными потоками. При этом максимальная интенсивность тепломассообмена имеет место в точке набегания осцилляторного потока и внутренних течений.

Ограничиваясь рассмотрением течения в непосредственной окрестности твердого тела, получаем

$$y \to 0; \quad w_x \to \frac{\tau}{\mu} y; \quad w_y \to -\frac{y^2}{2\mu} \frac{\partial \tau}{\partial x}. \qquad (24.6.1)$$

Касательные напряжения $\tau$ в данном случае определяются из поля скоростей (24.5.4).

Уравнение распространения тепла примет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + A_1(x) y^2 \frac{\partial T}{\partial y} - B_1(x) y \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \qquad (24.6.2)$$

где

$$A_1(x) = \frac{1}{2\mu a} \frac{\partial \tau}{\partial x}; \quad B_1(x) = \frac{\tau}{\mu a}.$$

Введением переменных

$$\eta_1 = y \left\{ \exp[-F_1(x)] \int_0^x \frac{\exp[F_1(x)]}{B_1(x)} dx \right\}^{-1/3}; \quad F_1(x) = 3 \int_0^x \frac{A_1(x)}{B_1(x)} dx$$

приводим уравнение (24.6.2) к виду

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + \frac{\eta^2}{3} \frac{dT}{d\eta} = 0. \qquad (24.6.3)$$

Решение, полученное В. Е. Накоряковым для сферы, имеет вид

$$\frac{\bar{\alpha}}{\lambda} R = 0{,}416 \sqrt[3]{\frac{RB^2}{D\sqrt{2\pi f \nu}}}. \qquad (24.6.4)$$

Формулы (24.5.14) и (24.6.4) были проверены экспериментально А. П. Бурдуковым.

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*


1. **Бурдуков А. П., Накоряков В. Е.** Теплообмен от цилиндра в звуковом поле при числах Грасгофа, стремящихся к нулю.— «Журн. прикл. механ. и техн. физ», 1965, № 1, с. 119.
2. **Бурдуков А. П., Накоряков В. Е.** О переносе масс в звуковом поле. — «Журн. прикл. механ. и техн. физ», 1965, № 2, с. 62.
3. **Бурдуков А. П., Накоряков В. Е.** Влияние колебаний на массоотдачу от сферы при больших числах Прандтля. — «Журн. прикл. механ. и техн. физ.», 1967, № 3, с. 158.
4. **Графов В. Н.** К расчету диффузионного потока на вибрирующий электрод. — «Электрохимия», 1967, т. 3, вып. 8, с. 935.
5. **Кацнельсон Б. Д., Тимофеева Ф. А.** Исследование конвективного теплообмена между частицами и потоком в нестационарных условиях.— «Тр. ЦКТИ», 1949, кн. 12, с. 119.
6. **Нестационарный** теплообмен. М., «Машиностроение», 1973. Авт.: В. К. Кошкин, Э. К. Калинин, Г. А. Дрейцер, С. А. Ярхо.
7. **Тепломассообмен** в звуковом поле. Под ред. С. С. Кутателадзе. Новосибирск, 1974. Авт.: В. Е. Накоряков, А. П. Бурдуков, А. М. Болдарев, П. Н. Терлеев.
8. **Сэсс Р. Д.** Теплообмен при ламинарном обтекании плоской пластины с нестационарной температурой поверхности.— «Тр. амер. об-ва инж.-мех. Сер. С. Теплопередача», 1961, № 3, с. 56.
9. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. Пер. с нем. М., «Наука», 1974, с. 396.
10. **Nakoryakov V. Ye, Burdukov A. P., Boldarev A. M.** Effect of sound vibration on heat transfer. — «Heat Transfer 1970». Proc. 4-th Intern. Heat Transfer Conf., Versailles, 1970, v. 3. Paris, 1970, p. FC. 9.4.
11. **Richardson P. D.** Heat transfer from a circular cylinder by acoustic streaming. — «J. Fluid. Mech.», 1967, v. 30, N 2, p. 337.
12. **Sparrow E. M., Gregg L. L.** Nonsteady surface temperature effects on forced convection heat transfer. — «J. Aeron. Sci.», 1957, v. 24, p. 776.
13. **Sparrow E. M.** Combined effects of unsteady flight velocity and surface temperature on heat transfer. — «Jet Propulsion», 1958, v. 28, p. 403.

## Глава 25 ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

### 25.1. ПРИРОДА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Перенос тепла кондукцией и конвекцией характеризуется вектором, который вполне определяется в каждой точке среды локальным градиентом температуры. В противоположность этому плотность лучистого потока в произвольном, относительно малом объеме прозрачной среды не зависит от температуры этого объема, а определяется излучением внешних источников. Поэтому вектор, характеризующий перенос тепла излучением, определяется интегрально. Тепловое излучение, являющееся по своей природе процессом распространения электромагнитных волн, характеризуется спектром частот, который соответствует энергетическому уровню структурных частиц вещества при рассматриваемой температуре. Интегральное тепловое излучение тел одинаковой температуры определяется их атомной и молекулярной структурой, а также формой и состоянием поверхности тел, т. е. физическими свойствами среды.

Носителем теплового излучения являются электромагнитные волны, которые распространяются в однородной изотропной среде или вакууме со скоростью света в соответствии с законами оптики. Электромагнитные волны характеризуются длиной волны $\lambda$ и частотой колебаний $\nu$, которые связаны между собой соотношением

$$\lambda\nu = c, \quad (25.1.1)$$

а энергия одного кванта

$$\varepsilon = h\nu. \quad (25.1.2)$$

Здесь $c$ — скорость света, равная в абсолютном вакууме $2{,}997925\cdot10^8$ м/с, а $h = 6{,}626196\times\times10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка.

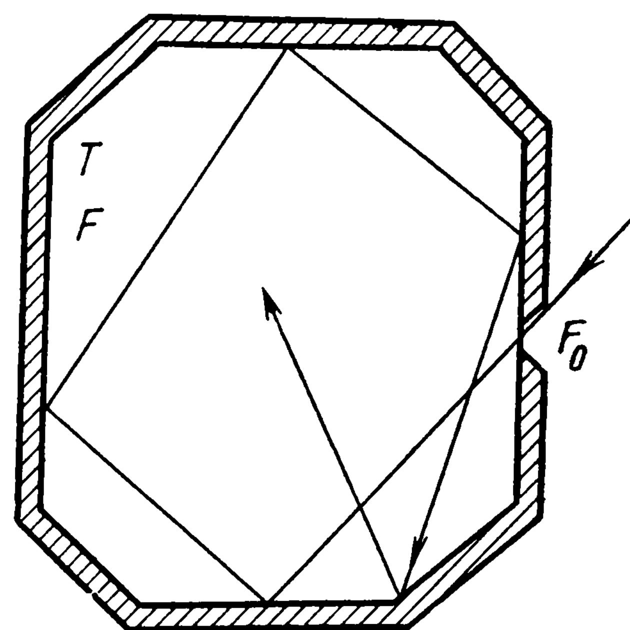


Рис. 25.1. Модель абсолютного черного тела

Распределение энергии по длинам волн и частотам в спектре излучающего тела связано с температурным уровнем и физической структурой тела. Существует некоторое распределение энергии, соответствующее максимально возможному тепловому излучению тела при заданной температуре. Тело, обладающее таким спектром, называется абсолютно черным. *Абсолютно черное тело* поглощает полностью любое падающее на него тепловое излучение. Свойства реальных тел в большей или меньшей степени отклоняются от свойств абсолютно черного тела. Распределение энергии излучения абсолютно черного тела соответствует условиям термодинамического равновесия и однозначно определяется лишь его температурой. В связи с этим излучение абсолютно черного тела иногда называют равновесным излучением.

Моделью абсолютно черной излучающей поверхности является отверстие полости, оболочка которой равномерно прогрета (рис. 25.1). Отверстие в оболочке настолько мало ($F_0/F \ll 1$), что выход излучения через него не в состоянии нарушить термодинамическое равновесие в полости. Эта конструкция является одновременно моделью абсолютно черного тела для поглощения излучения. Как видно из схемы на рис. 25.1, многократное отражение луча, вошедшего в полость через малое отверстие, обеспечивает практически полное его поглощение стенками полости даже при их значительной отражательной способности. В природе подобные условия достаточно хорошо моделируются кавернами и углублениями в пористых и рыхлых поверхностях сыпучих сред.

В настоящее время принято считать, что тепловое излучение занимает широкую область длин волн — от 0,72 до 1000 мкм, расположенную между крас-

ной границей видимого спектра и границей коротковолновой части миллиметрового диапазона электромагнитных волн. В табл. 25.1 представлено условное разбиение инфракрасного спектра на три области. Там же приведены в соответствии с интервалом длин волн диапазоны температур абсолютно черного тела, имеющего максимум излучения при указанной длине волны.

Таблица 25.1

**Диапазоны длин волн теплового излучения и соответствующие им диапазоны температур абсолютно черного тела**

| Излучение | Длина волн, мкм | Температура, К | Излучение | Длина волн, мкм | Температура, К |
|---|---|---|---|---|---|
| Видимый свет | 0,3—0,72 | Более 4144 | Далекое инфракрасное излучение | 5,6—1000 | 533—273 |
| Близкое инфракрасное излучение | 0,72—1,5 | 4144—1922 | Миллиметровые волны | 1000 и выше | |
| Среднее инфракрасное излучение | 1,5—5,6 | 1922—533 | | | |

Тепловое излучение представляет собой колебательный процесс в плоскостях, перпендикулярных направлению излучения. При этом обычно невозможно выделить плоскость преимущественного направления колебаний. В связи с этим тепловое излучение принято считать неполяризованным. Исключение составляет излучение блестящих металлических поверхностей, для которых удается выделить плоскость с наибольшей энергией колебаний (поляризованное излучение).

Спектр излучения твердых тел является непрерывным; спектр излучения газов — прерывистым, т. е. излучение селективно. Селективным излучением и поглощением обладают также некоторые твердые тела (например, кварц), имеющие наиболее выраженный объемный характер высвечивания или поглощения. У большинства твердых тел поглощение и излучение происходят в весьма тонком пограничном слое. Это дает основание в феноменологической теории излучательные характеристики приписывать непосредственно геометрическим поверхностям тел. Поверхность тела в общем случае частично поглощает, частично отражает и частично пропускает тепловое излучение, падающее из окружающего пространства. Поглощенное излучение превращается в тепловую энергию тела, которая, будучи трансформирована в лучистую, вновь участвует в собственном излучении данного тела.

## 25.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Под *плотностью излучения* подразумевается лучистый поток, проходящий через единицу поверхности. Если теплообмен рассматривается в пределах телесного угла $\Omega = 2\pi$, то вводится понятие полусферического или поверхностного излучения

$$E = dQ/dF, \text{ Вт/м}^2, \tag{25.2.1}$$

где $Q$ — лучистый поток, Вт.

*Плотностью объемного излучения* называют лучистый поток, испускаемый единицей объема среды в пределах телесного угла $\Omega = 4\pi$:

$$\eta = dQ/dV, \text{ Вт/м}^3. \tag{25.2.2}$$

Неравномерность облучения или излучения элементарной площадки $dF$ по направлениям в пространстве характеризуется интенсивностью или яркостью излучения. Под *яркостью излучения* следует понимать лучистый поток, прохо-

дящий через единицу поверхности, ортогональную к направлению излучения, и отнесенный к единице телесного угла:

$$\frac{^{2}}{dF_n\, d\Omega} = \frac{d^2 Q}{dF \cos \theta d\Omega}, \quad \text{Вт/(м}^2\text{·ср).} \qquad (25.2.3)$$

В случае лучистого взаимодействия двух элементарных площадок $dF_M$ и $dF_N$ (рис. 25.2) интенсивность излучения в направлении $S$ определяется выражением $I = d^2Q/(dF_M \cos \theta_M d\Omega)$, где $d\Omega = dF_N \cos \theta_N / r^2$ — элементарный телесный угол, образованный площадкой $dF_N$ и вершиной $M$ на площадке $dF_M$.

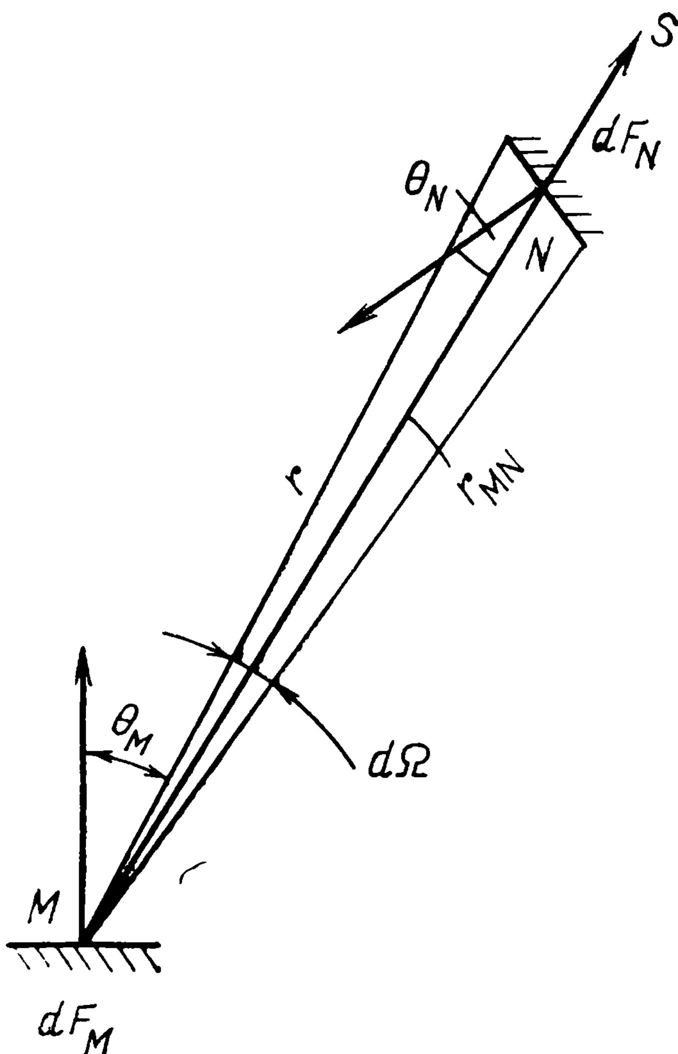


Рис. 25.2. **Схема лучистого взаимодействия двух элементарных площадок**

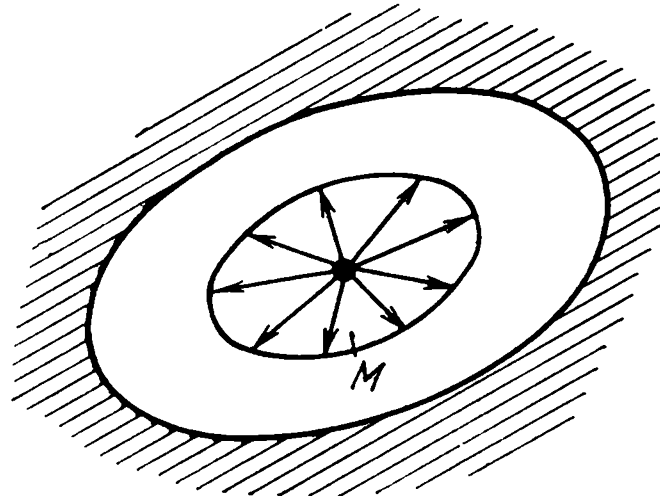


Рис. 25.3. Индикатриса излучения в объемной точке $M$

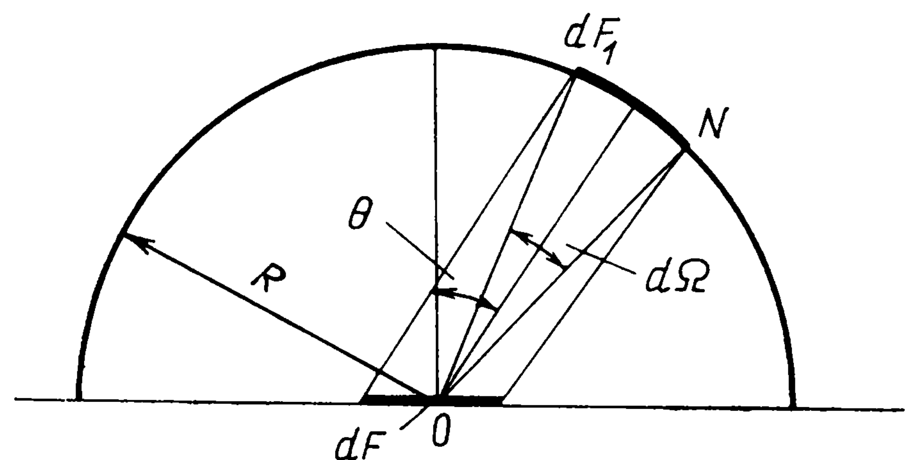


Рис. 25.4. Схема диффузного излучения элементарной площадки

Лучистый поток, испускаемый элементарной площадкой с точкой $M$,

$$d^2 Q = I_S \, dF_M \cos \theta_M \, d\Omega. \qquad (25.2.4)$$

Элементарная плотность лучистого потока в точке $M$

$$dE = d^2 Q / dF_M = I_S \cos \theta_M \, d\Omega. \qquad (25.2.5)$$

В объемном стационарном поле излучения яркость является скалярной функцией точки и направления: $I_S = I\ (M,\ S)$. Для заданной яркости в объемной точке $M$ необходимо знать ее распределение по направлениям, т. е. эпюру или индикатрису излучения в этой точке (рис. 25.3). Если распределение яркости излучения в данной точке равновероятно по всем направлениям (сферическая индикатриса излучения), то такое излучение называют диффузным. Для диффузно излучающей элементарной площадки $dF$ (рис. 25.4) по известному значению яркости излучения $I$ можно найти плотность потока излучения

$$E = \int\limits_{2\pi} I \cos \theta d\Omega. \qquad (25.2.6)$$

Подставляя сюда выражение для телесного угла, представленного в полярной системе координат, $d\Omega = \sin \theta d\theta d\psi$, где $\psi$ — азимут выбранного направления излучения, получаем

$$E = I \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \pi I. \qquad (25.2.7)$$

Таким образом, излучение в полусферическое пространство в $\pi$ раз больше излучения по нормали к поверхности в единичном телесном угле. Значение лучистого потока, испускаемого элементарной поверхностью $dF_M$ (см. рис. 25.2), зависит от направления излучения, характеризуемого углом $\theta$, образованным лучом и нормалью к поверхности $dF_M$ (что, впрочем, относится лишь к диффузно излучающим поверхностям). В частности, излучение полированных металлов сильно поляризовано и не подчиняется закону (25.2.7). Однако уже слабое окисление поверхности делает металлы практически диффузно излучающими. Если источником лучистого потока является диффузно излучающий точечный источник, то плотность потока на сфере радиусом $R$ (см. рис. 25.4), описанной вокруг этого источника, $E = Q/(4\pi R^2)$, т. е. плотность излучения, испускаемого точечным источником, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от источника.

При неограниченной площади поверхности плотность излучения не зависит от расстояния (например, лучистый обмен между двумя неограниченными плоскопараллельными пластинами).

Для количественной оценки распределения лучистой энергии в пространстве приходится пользоваться понятием объемной плотности лучистой энергии. Выделим в точке пространства в направлении $S$ телесный угол $d\Omega$. Тогда через площадку $dF$, перпендикулярную этому направлению, в соответствии с уравнением (25.2.4) проходит следующее количество лучистой энергии:

$$d^3 Q = I_S \, dF d\Omega dt.$$

Время $dt$ определится как отношение элементарного пути излучения к его скорости $c$. Объемная плотность лучистой энергии в направлении $s$ $du = (1/c) I_S d\Omega$, а полная объемная плотность лучистой энергии

$$u = (1/c) \int_{4\pi} I d\Omega, \quad \text{Дж/м}^3. \tag{25.2.8}$$

Если яркость излучения равномерна по всем направлениям, то

$$u = 4\pi I/c, \ \text{Дж/м}^3. \tag{25.2.9}$$

Приведенные выше определения относятся как к суммарному (интегральному), так и к монохроматическому излучению (т. е. изменению в интервале частот $\nu$ и $\nu + d\nu$). Характеристики интегрального и монохроматического излучения взаимно связаны следующими очевидными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} I(M, S) &= \int_0^\infty I_\nu (M, S) \, d\nu = \int_0^\infty I_\lambda (M, S) \, d\lambda; \\ Q &= \int_0^\infty Q_\nu \, d\nu = \int_0^\infty Q_\lambda \, d\lambda; \\ E &= \int_0^\infty E_\nu \, d\nu = \int_0^\infty E_\lambda \, d\lambda \quad \text{и т. п.} \end{aligned}\right\} \tag{25.2.10}$$

## 25.3. ЗАКОНЫ ИЗЛУЧЕНИЯ АБСОЛЮТНО ЧЕРНОГО ТЕЛА

Основное место в проблеме теплового излучения занимает исследование распределения энергии излучения абсолютно черного тела по длинам волн спектра. Эта проблема исторически стала первой областью применения принципа квантования энергии. Введя понятие элементарного действия, Планк показал, что интенсивность монохроматического излучения, отнесенная к данной частоте $\nu$, выражается следующей формулой:

$$I_{0,\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]^{-1}, \quad (\text{Вт}\cdot\text{с})/(\text{м}^2\cdot\text{ср}). \tag{25.3.1}$$

Здесь $k = 1{,}38044 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. Для удельной интенсивности монохроматического излучения, отнесенной к данной длине волны $\lambda$,

$$I_{0,\lambda} = \frac{\nu}{\lambda} I_{0,\nu} = \frac{2hc^2}{\lambda^5 [\exp(hc/\lambda kT) - 1]}. \qquad (25.3.2)$$

На основании закона Ламберта (закона диффузного излучения), согласно которому $E_0 = \pi I_0$, можно получить формулу Планка для плотности полусферического черного излучения:

$$E_{0,\lambda} = \pi I_{0,\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 [\exp(hc/\lambda kT) - 1]}. \qquad (25.3.3)$$

Аналогично для объемной плотности излучения из формулы (25.2.9) следует

$$u_{0,\lambda} = \frac{4\pi}{c} I_{0,\lambda} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 [\exp(hc/\lambda kT) - 1]}. \qquad (25.3.4)$$

Обычно выражение для плотности полусферического излучения $E_{0,\lambda}$, испускаемого черным телом в данном спектральном интервале при данной длине волны $\lambda$, записывается в следующей форме:

$$E_{0,\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5 [\exp(C_2/\lambda T) - 1]}, \qquad (25.3.5)$$

где $C_1$ и $C_2$ — константы, численные значения которых определяются выбором единиц измерения. Если $\lambda$ выражена в метрах, то $C_1 = 2\pi c^2 h = 3{,}7413 \cdot 10^{-16}$ Вт·м² и $C_2 = hc/k = 1{,}4388 \cdot 10^{-2}$ м·К.

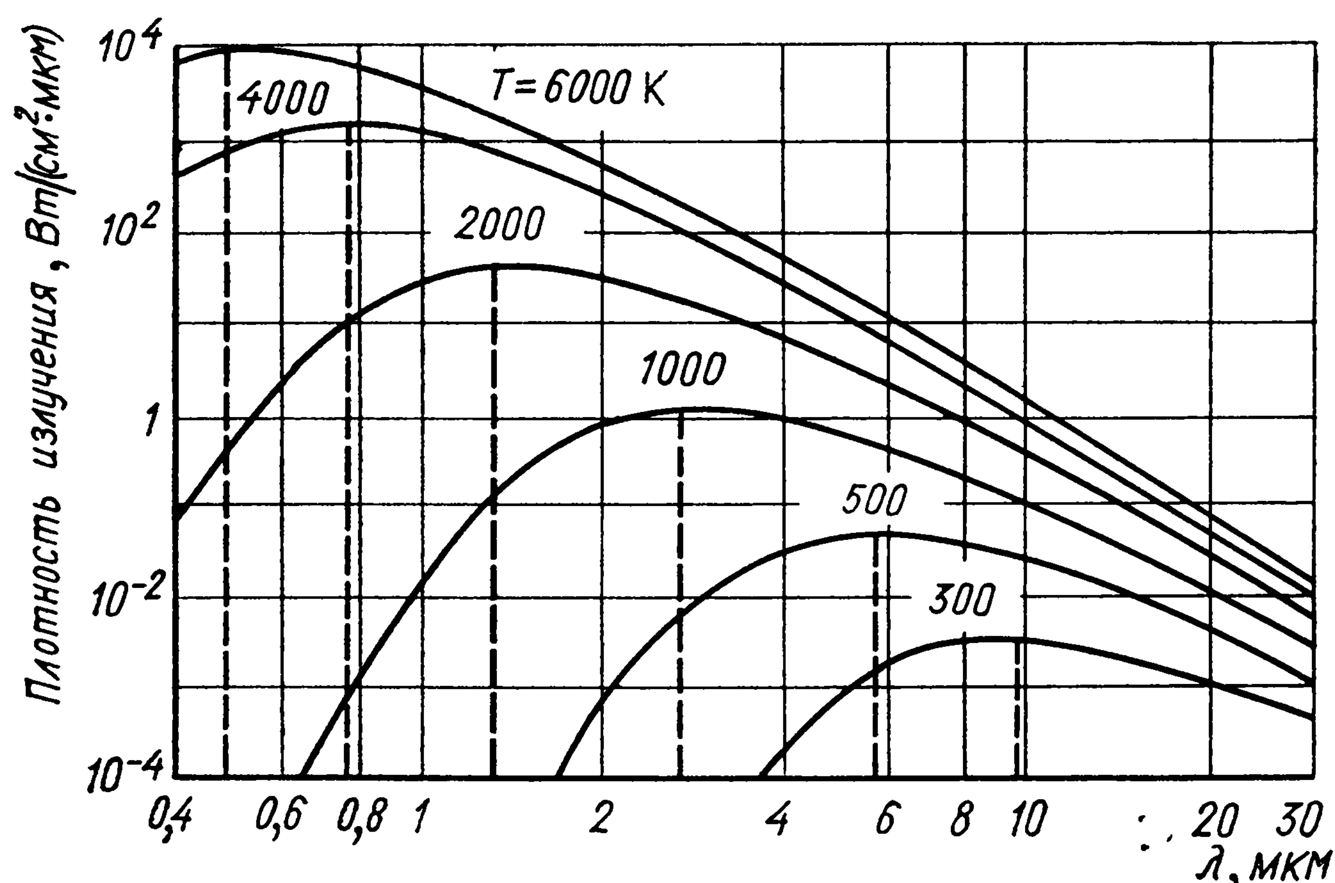



Рис. 25.5. Спектральное распределение плотности полусферического излучения при разных температурах абсолютно черного тела

На рис. 25.5 представлено спектральное распределение плотности полусферического излучения абсолютно черного тела для среднего интервала температур по длинам волн спектра, выраженных в микрометрах. Плотность излучения падает в области очень малых и очень больших длин волн и быстро увеличивается с повышением температуры черного тела. В области невысоких температур ($T = 3000$ К), где $\exp(hc/\lambda kT) \gg 1$, формула Планка для интенсивности монохроматического излучения вырождается в формулу Вина

$$I_{0,\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right). \qquad (25.3.6)$$

Для длинноволнового диапазона спектра излучения $hc/\lambda kT \gg 1$ и формула (25.3.2) переходит в формулу Рэлея—Джинса:

$$I_{0,\lambda} = (2c/\lambda^4)\, kT. \qquad (25.3.7)$$

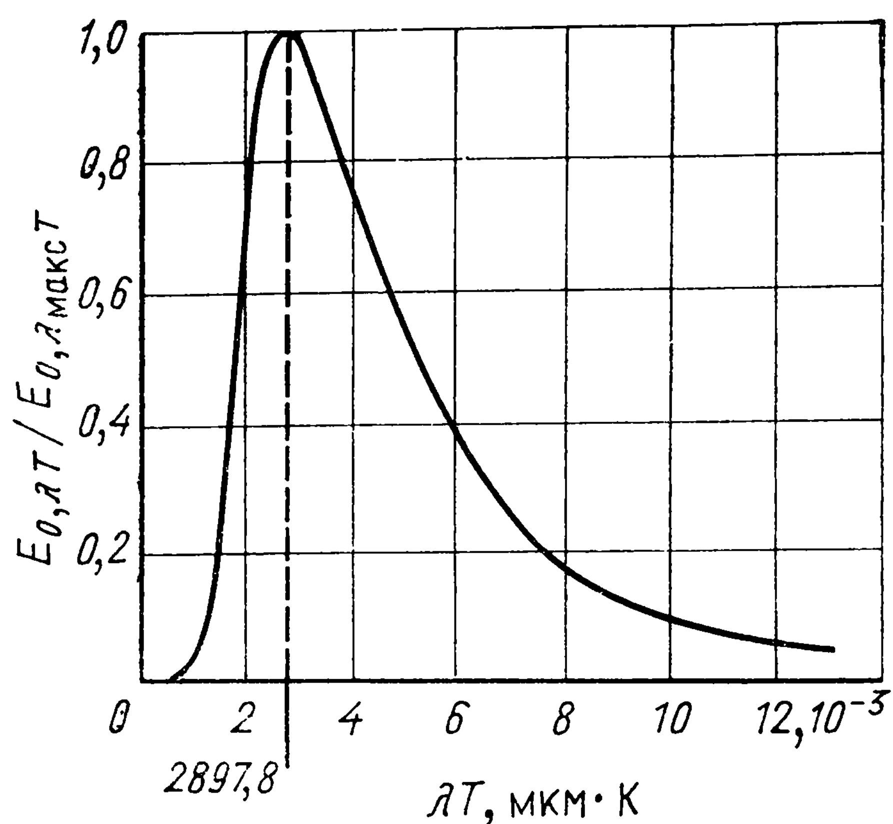



Рис. 25.6. Распределение относительной плотности монохроматического излучения черного тела

С повышением температуры максимумы изотерм распределения плотностей (см. рис. 25.5), а также интенсивностей излучения смещаются в область меньших длин волн. Дифференцируя формулу (25.3.5) и полагая $dE_{0,\lambda}/d\lambda = 0$, находим длину волны $\lambda_{\text{макс}}$, которой при данной температуре соответствует максимальная плотность излучения:

$$\frac{C_2}{\lambda_{\text{макс}} T} = 5\left[1 - \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda_{\text{макс}} T}\right)\right], \tag{25.3.8}$$

или после пятого приближения разложения экспоненты

$$\lambda_{\text{макс}} T = b. \tag{25.3.9}$$

Если длина волны выражена в метрах, то $b = 2{,}8978\cdot 10^{-3}$ м·К, а если в микрометрах, то $b = 2{,}8978\cdot 10^{3}$ мкм·К. Воспользовавшись соотношением (25.3.9), можно получить закон смещения для полусферического излучения:

$$E_{0,\lambda_{\text{макс}}} = b_1 T^5, \tag{25.3.10}$$

где

$$b_1 = 1{,}2864\cdot 10^{-15}\ \text{Вт}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{мк}^{-1}\cdot\text{К}^{-5},$$

а также безразмерную запись закона Планка:

$$E_{0,\lambda T}/E_{0,\lambda_{\text{макс}}T} = 2{,}9082\cdot 10^{15}\{(\lambda T)^5[\exp(C_2/\lambda T) - 1]\}^{-1}. \tag{25.3.11}$$

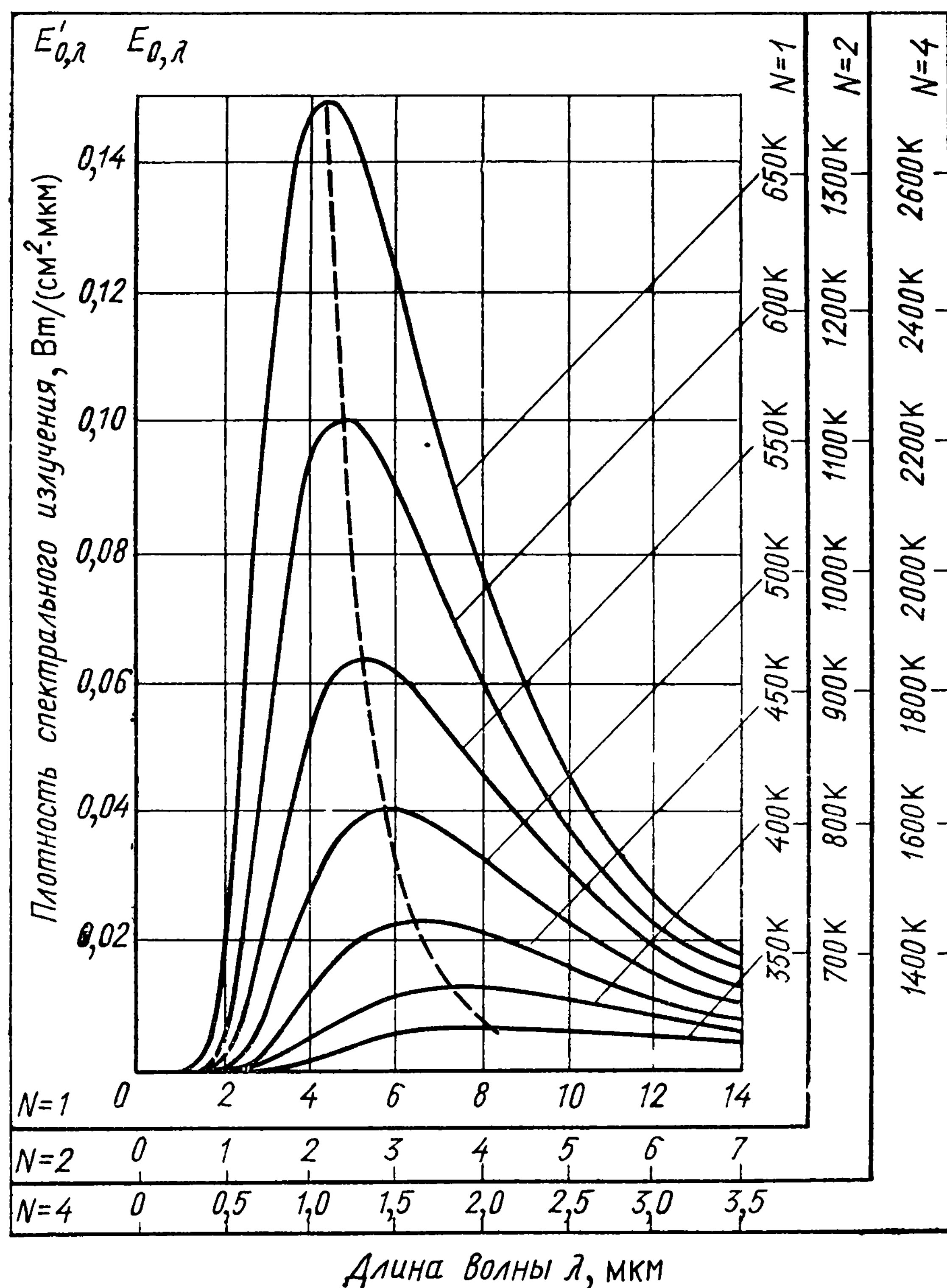



Рис. 25.7. Универсальное распределение плотности монохроматического излучения черного тела

Формула (25.3.10) показывает, что максимальная монохроматическая плотность полусферического излучения абсолютно черного тела пропорциональна пятой степени температуры. На рис. 25.6 представлено распределение относительной плотности монохроматического излучения черного тела в зависимости от $\lambda T$. Из (25.3.10) и (25.3.11) следует, что

$$E_{0,\lambda} = b_1 T^5 E_{0,\lambda T}/E_{0,\lambda_{\text{макс}}T}. \tag{25.3.12}$$

С помощью формул (25.3.11) и (25.3.12) на рис. 25.7 построено универсальное распределение, позволяющее определить плотность монохроматического излучения черного тела $E_{0,\lambda}$ в широком диапазоне значений температур $T$ и длин волн $\lambda$. Здесь величина $E'_{0,\lambda}$ определяется из соотношения $E'_{0,\lambda} = E_{0,\lambda}N^5$, где $E_{0,\lambda}$ — значение плотности излучения, представленное по оси ординат, $N = 1, 2, 4, \ldots$ — число, соответствующее набору зна-

чений $T$ и $\lambda$, для которого отыскивается плотность излучения. Штриховая линия, проходящая через точки максимумов изотерм, соответствует закону смещения Вина. Полная интенсивность излучения абсолютно черного тела определяется интегрированием формулы Планка (25.3.2) по длине волны от 0 до $\infty$, т. е.

$$I_0 = \int\limits_0^\infty (2hc^2/\lambda^5)\,[\exp(hc/\lambda kT) - 1]^{-1}\,d\lambda.$$

Введя новую переменную $\zeta = hc/(\lambda kT)$, разлагая подынтегральную функцию в ряд и интегрируя почленно, получим $I_0 = \frac{2\pi^4 k^4}{15c^2 h^3} T^4$. Обозначив постоянную $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$, запишем:

$$I_0 = (1/\pi)\,\sigma_0\, T^4; \tag{25.3.13}$$

$$E_0 = \pi I_0 = \sigma_0\, T^4. \tag{25.3.14}$$

Этот закон был экспериментально установлен Стефаном и выведен теоретически, исходя из термодинамических соображений, Больцманом и Б. В. Голицыным задолго до вывода формулы Планка (закон Стефана—Больцмана). Величину $\sigma_0 = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/ (м$^2 \cdot$ К$^4$) принято называть величиной Стефана-Больцмана.

## 25.4. ИЗЛУЧЕНИЕ РЕАЛЬНЫХ ТЕЛ

Общие законы излучения построены с привлечением идеализированного понятия абсолютно черного тела. Реальные тела, встречающиеся в природе, не подчиняются этим законам и в той или иной степени от них отклоняются.

На рис. 25.8 и 25.9 представлены полярные диаграммы относительной излучательной способности $\varepsilon_\theta = I_\theta / I_0$ для некоторых тел в зависимости от направления излучения, характеризуемого углом $\theta$. Как следует из рис. 25.8, при

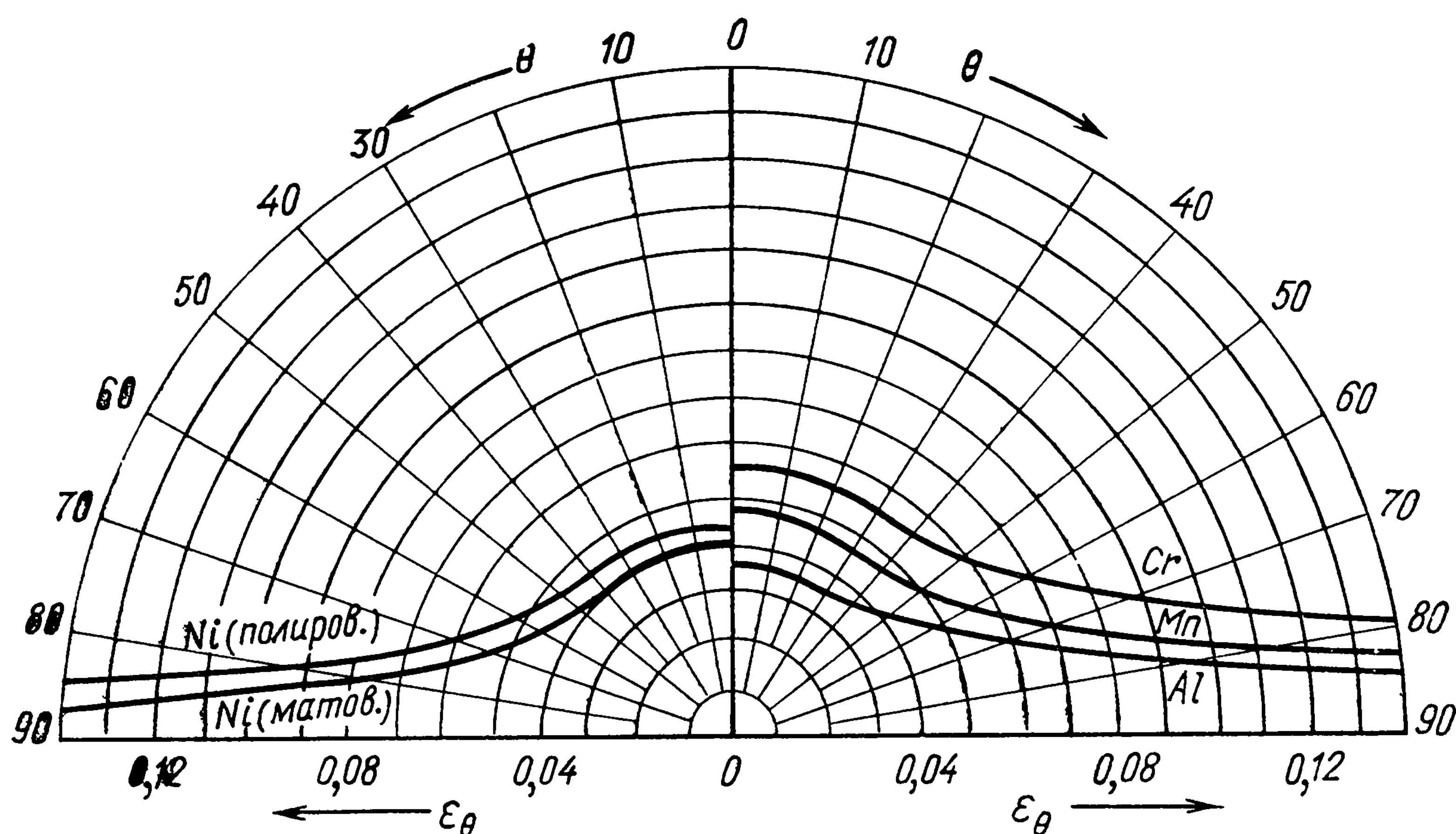



Рис. 25.8. Зависимость излучательной способности металлов от направления излучения

$\theta > 50°$ интенсивность излучения ($I_\theta$) увеличивается и оказывается больше ее значения в нормальном направлении ($I_0$), определяемого по закону Ламберта. Эта особенность характерна для металлов, обладающих высокой электропроводностью. Для неметаллов (диэлектриков) (см. рис. 25.9) до $\theta \approx 60°$ закон Ламберта удовлетворяется хорошо. При $\theta > 60°$ интенсивность излучения уменьшается.

С помощью закона Планка находят верхнюю предельную границу интенсивности или плотности излучения любого произвольного тела для данной тем-

пературы и некоторой длины волны. Невозможно получить указанные характеристики излучения, превышающие их значения, определяемые законом Планка. Это обстоятельство вытекает из второго закона термодинамики и составляет одно из основных положений теорий теплового излучения, устанавливающих связь между излучениями абсолютно черных и реальных тел.

Рассмотрим излучение в замкнутой полости, составленной из различных по материалу твердых тел, непрозрачных для тепловых лучей. Будем поддерживать стенки указанной полости при некоторой произвольной, но всюду одинаковой температуре. Благодаря непрерывно протекающим процессам излучения и поглощения тепла стенками в полости установится некоторое стационарное состояние, соответствующее устойчивому термодинамическому равновесию.

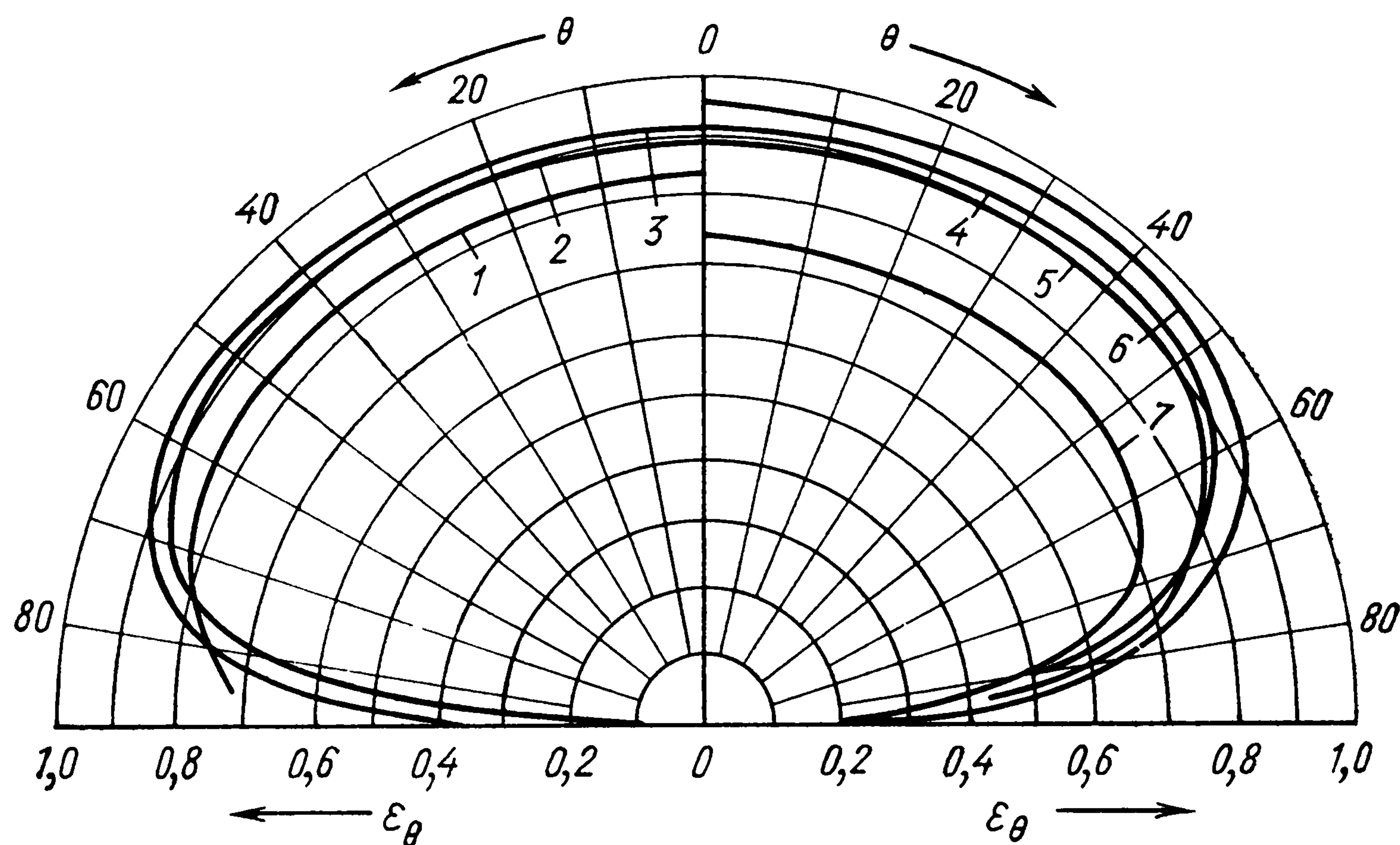



Рис. 25.9. Зависимости излучательной способности неметаллов от направления излучения:

*1* — грубый корунд; *2* — бумага; *3* — дерево; *4* — стекло; *5* — глина; *6* — тающий лед; *7* — окись меди

Последнее означает, что объемная плотность излучения, характеризуемая любым интервалом длин волн, всюду одинакова, а результирующий поток тепла на стенках для данной волны оказывается тождественно равным нулю. Под результирующим потоком будем понимать разницу между поглощенным и излученным количеством тепла в рассматриваемой точке.

Следовательно, термодинамическое равновесие в замкнутой полости определяется температурой и не зависит от материала стенок. Если бы плотность излучения в некотором интервале длин волн одного из тел замкнутой излучающей системы зависела не только от температуры, но и от материала, это могло бы привести к неустойчивому термодинамическому равновесию. Так как стенки полости поддерживаются при одинаковой температуре, то для установления лучистого равновесия в системе поверхность указанного тела должна была бы отдать или приобрести некоторое количество энергии, которое определяется зависимостью плотности излучения от материала тела. Это привело бы к установлению неравномерного распределения объемной плотности излучения, появлению температурных перепадов и результирующего потока тепла.

При таких условиях излучающая система перешла бы в некоторое неустойчивое состояние без видимой затраты энергии, что находится в явном противоречии со вторым началом термодинамики. Следовательно, сделанное предположение неверно, и, значит, характеристики излучения (яркость, плотность), соответствующие определенной температуре и длине волны, не зависят от материала тел.

Рассмотрим замкнутую излучающую систему тел, в которой установилось термодинамическое равновесие. Спектральная плотность лучистой энергии, падающей на поверхность тел, в общем случае является некоторой функцией от

температуры полости и длины волны $f(\lambda, T)$ независимо от природы тел. Этому потоку энергии в силу термодинамического равновесия соответствует лучистый поток, равный ему и противоположно направленный. Вводя коэффициент отражения от поверхности стенки, составим балансное уравнение потоков тепла

$$f(\lambda, T)\, d\lambda = E_\lambda\, d\lambda + R_\lambda f(\lambda, T)\, d\lambda,$$

или $E_\lambda/(1 - R_\lambda) = f(\lambda, T)$. Если положить $1 - R_\lambda = A_\lambda$, где $A_\lambda$ — поглощательная способность тела для монохроматического излучения, то

$$f(\lambda, T) = E_\lambda / A_\lambda. \qquad (25.4.1)$$

Для абсолютно черного тела $A_\lambda = 1$ и $f(\lambda, T) = E_{0,\lambda}$, т. е. функция $f(\lambda, T)$ представляет собой характеристику излучения (плотность) абсолютно черного тела. Подставляя ее в выражение (25.4.1), получаем

$$E_\lambda / A_\lambda = E_{0,\lambda}, \qquad (25.4.2)$$

т. е. отношение плотности монохроматического излучения тела к его поглощательной способности не зависит от природы тела и равно плотности монохроматического излучения абсолютно черного тела (закон Кирхгофа). Плотность монохроматического излучения тела может быть получена умножением спектральной плотности излучения абсолютно черного тела на поглощательную способность этого тела:

$$E_\lambda = A_\lambda E_{0,\lambda}. \qquad (25.4.3)$$

Проинтегрировав выражение (25.4.2) по $\lambda$ в пределах от нуля до бесконечности, получим соотношение

$$E/A = E_0, \qquad (25.4.4)$$

представляющее собой закон Кирхгофа для интегрального излучения. Учитывая равенство (25.3.14), получаем выражение для интегральной плотности излучения

$$E = A\sigma_0 T^4, \qquad (25.4.5)$$

где интегральная поглощательная способность определяется как значение средней по спектру поглощательной способности:

$$A = \int_0^\infty A_\lambda E_{0,\lambda}\, d\lambda \Big/ \int_0^\infty E_{0,\lambda}\, d\lambda. \qquad (25.4.6)$$

Таким образом, процессы излучения и поглощения оказываются взаимосвязанными. Это в некоторой степени облегчает определение излучательных и поглощательных способностей тел. При этом следует иметь в виду, что закон Кирхгофа применим только к равновесным излучениям.

В случае существенных температурных градиентов в среде с взаимным облучением можно говорить лишь о приближенном характере закона Кирхгофа. В связи с этим исследование такой характеристики оптических свойств тела, как его интегральная поглощательная способность $A$, связано с необходимостью помимо данных о температуре исследуемого тела и его спектральных поглощательных способностях иметь подробную информацию о спектральном составе источника излучения (его температуре):

$$A = \int_0^\infty A_\lambda E_\lambda\, d\lambda \Big/ \int_0^\infty E_\lambda\, d\lambda. \qquad (25.4.7)$$

Эти трудности исключаются из рассмотрения введением либо поглощательной способности по собственному излучению, либо понятия серого тела. Тела, поглощательные способности которых не зависят от длины волны и направления падающего луча, принято называть *серыми*. В этом случае интегральная и монохроматическая излучательные способности тождественно равны:

$$A = A_\lambda.$$

Значительное количество технических материалов близко по оптическим свойствам к серым телам. Как правило, это твердые тела, имеющие шероховатые или окисленные поверхности со сравнительно высокой поглощательной способностью. Поверхностные эффекты существенно искажают и тем самым затрудняют исследование оптических свойств, связанных с природой излучающего тела. В связи с этим последние определяются для тел с абсолютно гладкими поверхностями.

Подобные исследования устанавливают зависимость излучательной (поглощательной) способности веществ от длины волны и температуры. Зависимость коэффициента $A_\lambda$ от длины волны определяется из основных положений теории дисперсии и поглощения. Теоретические исследования функции $A$ $(\lambda, T)$ весьма затруднительны и связаны с существенным усовершенствованием аппарата квантовой электродинамики. Этим объясняется разнообразие частных ре-

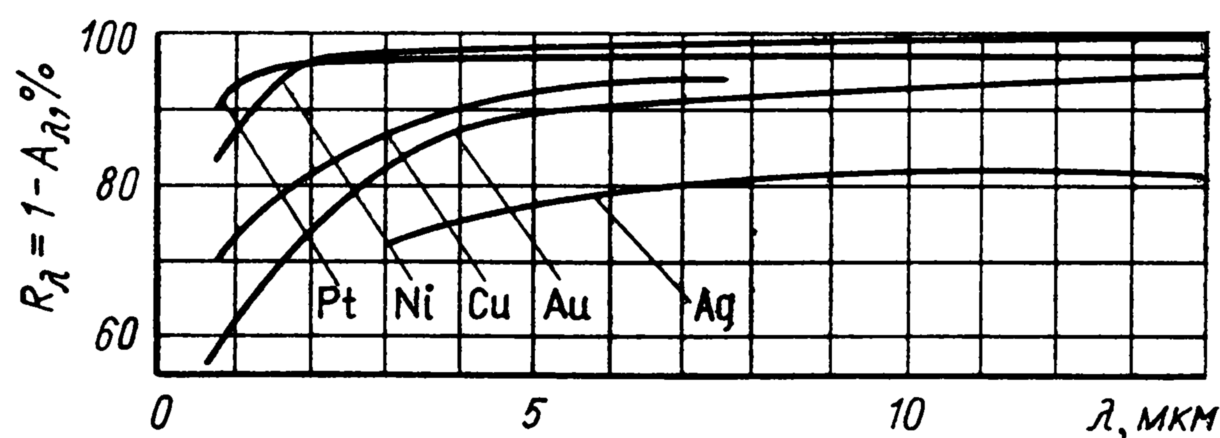



Рис. 25.10. Зависимость отражательной способности металлов от длины волны

шений, связанное со структурой излучающего вещества и с диапазоном спектра. Для чистых металлов в далекой инфракрасной области хорошие результаты дает теоретическая формула Друде:

$$A(\lambda, T) = 0{,}365 \sqrt{\rho_э/\lambda}, \qquad (25.4.8)$$

где $\rho_э$ — удельное электросопротивление, в первом приближении линейно зависящее от температуры. Как видно, излучательная способность металлов должна увеличиваться с ростом удельного электросопротивления и падать с увеличением длины волны. Формула (25.4.8) дает хорошие количественные результаты для многих металлов при $\lambda > 10$ мкм. Для более коротких длин волн следует пользоваться эмпирическим выражением Хагена и Рубенса

$$A(\lambda, T) = 0{,}365 (\rho_э/\lambda)^{1/2} - 0{,}0667\rho_э/\lambda + 0{,}0091 (\rho_э/\lambda)^{3/2}, \qquad (25.4.9)$$

которое расширяет возможности применения решения Друде до $\lambda > 4 \div 5$ мкм.

На рис. 25.10 представлены результаты исследований отражательной способности $R_\lambda = 1 - A_\lambda$ ряда металлов при комнатной температуре, полученные из выражения (25.4.9). Количественные исследования поглощательных способностей диэлектриков базируются главным образом на известных формулах Френкеля и соотношениях классической электродинамики, связывающих оптические характеристики с коэффициентом преломления $n$ в веществе. Для поглощательной способности диэлектрика можно воспользоваться формулой

$$A_\lambda = 4n/(n+1)^2. \qquad (25.4.10)$$

Зависимость $A_\lambda$ от температуры определяется связью $n$ с изменением объема излучающего вещества вследствие температурного расширения. Это соображение, однако, не согласуется с фактом уменьшения суммарной поглощательной способности диэлектриков $A$ при увеличении температуры (рис. 25.11). Можно предполагать, что такой характер температурной зависимости $A$ $(T)$ связан со смещением максимума интенсивности излучения при повышении температуры по закону Вина в сторону коротких волн, где значения спектральных

характеристик $A$ ($\lambda$, $T$) оказываются малыми. Оптические свойства поликристаллических окислов, а также различного рода керамических материалов определяются не только химическим составом, но также плотностью, размером зерен, из которых они состоят, характером обработки и микрогеометрией поверхности.

Для практической оценки излучательной способности тел вводится безразмерный коэффициент, называемый степенью черноты (излучения). Степень черноты — отношение интенсивности собственного излучения тела при температуре $T$ на длине волны $\lambda$ и в направлении S к интенсивности излучения абсолютно черного тела при тех же условиях:

$$\varepsilon = I(\lambda, T, \mathrm{S})/I_0(\lambda, T). \qquad (25.4.11)$$

Иногда монохроматическая степень черноты определяется как отношение монохроматических плотностей полусферического излучения реального и абсолютно черного тел

$$\varepsilon_\lambda = E_\lambda(T)/E_{0,\lambda}(T). \qquad (25.4.12)$$

По закону Кирхгофа

$$\varepsilon_\lambda(T) = A_\lambda(T), \qquad (25.4.13)$$

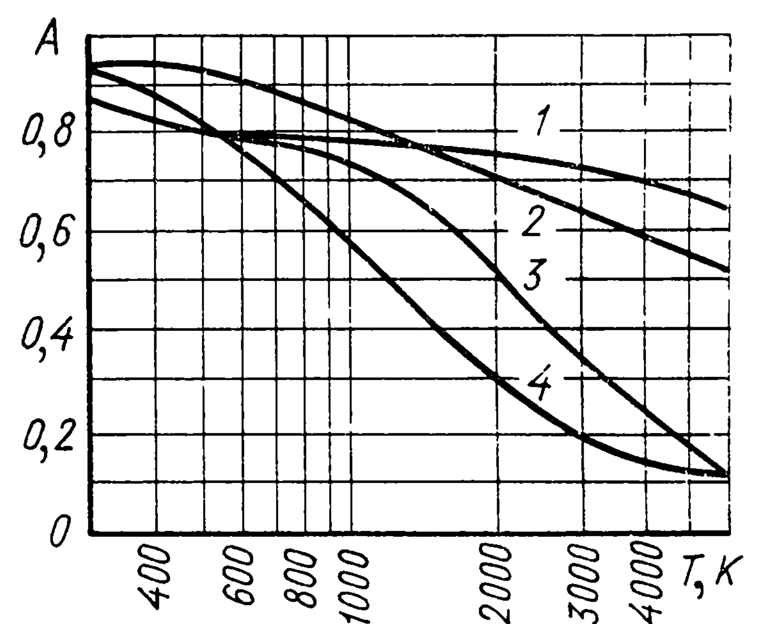



Рис. 25.11. Зависимость поглощательной способности диэлектриков от температуры:

1 — резина; 2 — фарфор; 3 — бумага; 4 — шамот

т. е. степень черноты равна поглощательной способности при температуре излучения. Для интегральной степени черноты

$$\varepsilon = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda E_{0,\lambda} d\lambda \bigg/ \int_0^\infty E_{0,\lambda} d\lambda = E/E_0. \qquad (25.4.14)$$

Интегральная степень черноты, подобно интегральной поглощательной способности, имеет сложную зависимость от температуры в связи с тем, что в числителе уравнения (25.4.14) под знаком интеграла помимо $E_{0,\lambda}(T)$ стоит монохроматическая степень черноты $\varepsilon_\lambda(T)$, также зависящая от температуры. Для серого тела $\varepsilon_\lambda = \varepsilon$, или с учетом равенства (25.4.13)

$$\varepsilon_\lambda = \varepsilon = A. \qquad (25.4.15)$$

Полусферическая плотность излучения серого тела определяется формулой

$$E = A\sigma_0 T^4, \text{ или } E = \sigma T^4, \qquad (25.4.16)$$

где $\sigma = A\sigma_0 = \varepsilon\sigma_0$ называется коэффициентом излучения серого тела или просто коэффициентом излучения.

## 25.5. КЛАССИФИКАЦИЯ ВИДОВ ПОЛУСФЕРИЧЕСКОГО И ОБЪЕМНОГО ИЗЛУЧЕНИЙ

В зависимости от характера взаимодействия излучения с поверхностью произвольного тела представленным выше понятиям полусферической и объемной плотности излучения придается различное смысловое значение. В общем случае тело, на которое падает излучение, частично поглощает его, частично отражает и частично пропускает (рис. 25.12). Если указанные потоки отнести к падающему потоку излучения, то уравнение сохранения энергии

$$Q_A + Q_R + Q_D = Q_п \qquad (25.5.1)$$

запишется в безразмерном виде

$$A + R + D = 1, \qquad (25.5.2)$$

где $A$, $R$ и $D$ — коэффициенты поглощения, отражения и пропускания. Для непрозрачного тела $D = 0$ и

$$A + R = 1. \tag{25.5.3}$$

Для абсолютно черного тела согласно определению $R = D = 0$ и $A = 1$. При $R = 1$ ($A = D = 0$) падающее на тело излучение полностью отражается. Этот предельный случай также является абстракцией. Такое абстрактное тело, создающее рассеянное диффузное отражение, называется *абсолютно белым*, а тело, отражающее по законам геометрической оптики, называется *зеркальным*. При $D = 1$ ($A = R = 0$) тело совершенно прозрачно (диатермично) для теплового излучения.

В соответствии с законом сохранения энергии излучения различают следующие виды плотностей полусферического излучения. Плотность собственного излучения — излучение, выходящее с единицы поверхности излучающего тела:

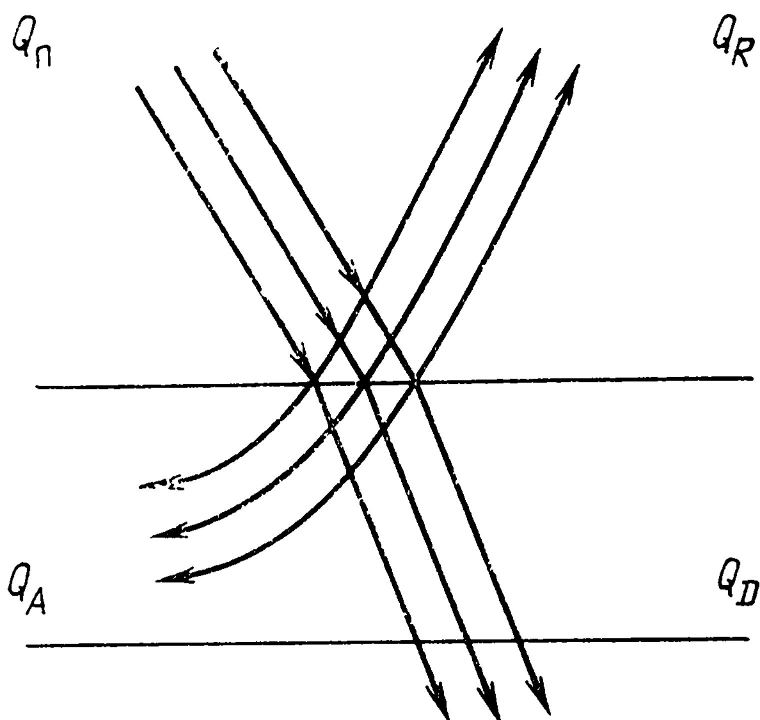



Рис. 25.12. Схема взаимодействия излучения с телом

$$E_с = AE_0, \tag{25.5.4}$$

где $E_0 = \sigma T^4$. Плотность поглощенного излучения (доля падающего излучения, поглощенная телом)

$$E_A = AE_п. \tag{25.5.5}$$

Плотность отраженного излучения (доля падающего излучения, отраженная поверхностью тела)

$$E_R = RE_п. \tag{25.5.6}$$

Для непрозрачных тел $E_R + E_A = E_п$. Здесь для простоты предполагается, что отражение, равно как и рассеяние излучения в поглощающих средах, имеет равномерный, диффузный характер. Плотность эффективного излучения представляет собой суммарное излучение, составленное из собственного и отраженного излучений:

$$E_э = E_с + E_R = AE_0 + RE_п. \tag{25.5.7}$$

Плотность результирующего излучения (разность между приходом и расходом энергии на поверхности тела)

$$E = E_A - E_с = A(E_п - E_0). \tag{25.5.8}$$

Согласно другому, более общему определению результирующий поток излучения, проходящий через единицу воображаемой произвольно расположенной поверхности, определяется как разность потоков излучения, падающих на эту поверхность с противоположных сторон: $E = E_п^+ - E_п^-$. Если эта поверхность совмещена с поверхностью излучающего тела, то $E_п^- = E_э$, и тогда

$$E = E_п - E_э. \tag{25.5.9}$$

Указанные соотношения позволяют связать между собой плотности эффективного и результирующего излучений. Действительно, из равенства (25.5.9) следует, что $E_э = E_п - E$, а из (25.5.8) — что $E_п = E/A + E_0$. Тогда

$$E_э = \frac{1-A}{A} E + E_0 = \frac{R}{A} E + E_0. \tag{25.5.10}$$

Указанные выше виды излучения являются линейными функциями падающего излучения. Под плотностью падающего излучения $E_п$ понимается излучение, падающее на рассматриваемую поверхность извне и представляющее функционал оптико-геометрического и теплового состояний окружающей среды. В соответствии с определением полусферической плотности потока излуче-

ния (25.2.6) плотность падающего излучения может быть представлена следующим образом:

$$E_п(M)=\int_{2\pi} I_п(M, S)\cos\theta d\Omega. \qquad (25.5.11)$$

Несмотря на то, что взаимодействие излучений в объеме поглощающей, рассеивающей, переизлучающей и пропускающей сред носит несравненно более сложный характер, в этом случае также представляется целесообразным введение аналогичной описанной ранее классификации видов излучения. Различают следующие виды плотностей объемного излучения (при этом, так же как и в случае поверхностного излучения, для простоты рассматривается классификация изотропного излучения и рассеяния).

Плотность объемного собственного излучения $\eta_с$ определяется потоком излучения, отнесенным к единице объема. Плотность объемного поглощенного излучения $\eta_\varkappa$ представляет собой долю объемного падающего излучения $\eta_п$, поглощенную элементарным объемом среды:

$$\eta_\varkappa=\varkappa\eta_п. \qquad (25.5.12)$$

Под плотностью объемного рассеянного излучения $\eta_\beta$ следует понимать долю объемного падающего излучения, рассеянного элементарным объемом в некоторой точке среды:

$$\eta_\beta=\beta\eta_п. \qquad (25.5.13)$$

По аналогии с уравнением (25.5.7) вводится понятие объемного эффективного излучения, которое складывается из собственного и рассеянного излучений:

$$\eta_э=\eta_с+\eta_\beta=\eta_с+\beta\eta_п. \qquad (25.5.14)$$

По аналогии с уравнением (25.5.8) плотность объемного результирующего излучения

$$\eta=\eta_\varkappa-\eta_с=\varkappa\eta_п-\eta_с. \qquad (25.5.15)$$

Если в правой части этого равенства прибавить и вычесть $\eta_\beta = \beta\eta_п$, то получим $\eta = (\varkappa + \beta)\eta_п - \eta_с - \beta\eta_п$. Принимая во внимание равенство (25.5.14), а также вводя понятие коэффициента ослабления излучения среды

$$k=\varkappa+\beta, \qquad (25.5.16)$$

составленного соответственно из коэффициентов поглощения и рассеяния, получаем следующее выражение для плотности объемного результирующего излучения:

$$\eta=k\eta_п-\eta_э. \qquad (25.5.17)$$

Вводя значение $\eta_п$ из равенства (25.5.15) в уравнение (25.5.17), получаем соотношение, связывающее объемные эффективные и результирующие плотности излучений:

$$\eta_э=(\beta/\varkappa)\,\eta+(k/\varkappa)\,\eta_с. \qquad (25.5.18)$$

Если среда является чисто поглощающей и нерассеивающей, то $\beta = 0$, $k = \varkappa$ и $\eta_э = \eta_с$.

Приведенные характеристики излучения являются линейными функциями пространственной плотности падающего излучения $\eta_п$. Объемная плотность падающего излучения $\eta_п$ определяется как скалярный интеграл от интенсивности излучения по сферическому телесному углу:

$$\eta_п(M)=\int_{4\pi} I(M, S)\,d\Omega. \qquad (25.5.19)$$

Помимо перечисленных характеристик в исследованиях процессов излучения широко используют векторные представления поля излучения. В частности, при рассмотрении поля излучения, создаваемого незамкнутыми излучаю-

щими поверхностями, вводят вектор $\mathbf{E}(M)$ в виде интеграла от интенсивности по конечному телесному углу $\Omega$

$$\mathbf{E}(M) = \int_{\Omega} I(M, S)\, \mathbf{d\Omega}, \tag{25.5.20}$$

где $\mathbf{d\Omega} = \mathbf{r}_1 d\omega$ — элементарный вектор телесного угла $d\omega$; $\mathbf{r}_1$ — единичный вектор по направлению луча $S$.

В замкнутой системе тел $\Omega = 4\pi$, и векторный интеграл от интенсивности излучения по сферическому телесному углу называют сферическим вектором излучения:

$$\mathbf{E}_{4\pi}(M) = \int_{\Omega=4\pi} I(M, S)\, \mathbf{d\Omega}. \tag{25.5.21}$$

Проекция сферического вектора излучения $\mathbf{E}_{4\pi}$ на направление $S$, проходящее через некоторую точку $M$ в среде, представляет собой полусферическую плотность результирующего излучения, проходящего через площадку, нормально ориентированную к $S$, т. е.

$$E(M, n) = (\mathbf{E}_{4\pi}, \mathbf{n}_1), \tag{25.5.22}$$

где $\mathbf{n}_1$ — единичный вектор нормали к некоторой элементарной площадке $dF_M$ в точке $M$.

Проекция $\mathrm{E}_{2\pi}$ на направление $S$ есть не что иное, как полусферическая плотность излучения, падающего на элементарную площадку $dF_M$, нормально ориентированную к направлению $S$, т. е.

$$E_n(M, n) = (\mathbf{E}_{2\pi}, \mathbf{n}_1). \tag{25.5.23}$$

Все приведенные выше характеристики имеют отношение как к интегральному, так и к монохроматическому излучению. В последнем случае характеристики излучения записываются с индексом $\lambda$, указывающим на их отношение к некоторому интервалу длин волн. Приведенная классификация видов излучения предложена Ю. А. Суриновым.

## 25.6. ГЕОМЕТРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ИЗЛУЧЕНИЯ

Лучистое взаимодействие двух элементарных площадок, произвольным образом ориентированных в пространстве, определяется по уравнению (25.2.4) как их размером, так и взаимным расположением. Эти факторы и все, что связано с их определением, составляют геометрию излучающих систем.

Рассмотрим лучистый обмен между двумя изотермическими абсолютно черными телами $i$ и $k$ с поверхностями $F_i$ и $F_k$ (рис. 25.13). Выделим элементарные площадки $dF_M$ и $dF_N$ с точками $M$ и $N$, принадлежащими соответственно $F_i$ и $F_k$. Элемент поверхности $dF_M$ излучает во всех направлениях в пределах полусферы поток энергии

$$dQ(M) = E_0(M)\, dF_M = \sigma_0 T^4(M)\, dF_M. \tag{25.6.1}$$

Поток энергии излучения, падающий на элемент поверхности $dF_N$ от $dF_M$, по уравнению (25.2.4) можно записать

$$d^2Q(M, N) = I(M, S) \cos\theta_M\, d\Omega(M, N)\, dF_M. \tag{25.6.2}$$

Для абсолютно черных тел по закону Ламберта

$$I(M, S) = I(M) = E_0(M)/\pi = \sigma_0 T^4(M)/\pi.$$

Подставляя это выражение интенсивности в уравнение (25.6.2), получаем

$$d^2Q(M, N) = (1/\pi)\, E_0(M) \cos\theta_M\, d\Omega(M, N)\, dF_M. \tag{25.6.3}$$

Отношение потока $d^2Q(M, N)$, падающего с $dF_M$ на $dF_N$, к полному потоку $dQ(M)$, излучаемому элементом $dF_M$ в пределах полусферы, называется *элементарным коэффициентом облученности*:

$$d\varphi\ (M, N) = \frac{d^2Q(M, N)}{dQ(M)} = \frac{1}{\pi} \cos\theta_M \, d\Omega(M, N), \qquad (25.6.4)$$

или, используя выражение для элементарного телесного угла,

$$d\varphi(M, N) = \frac{1}{\pi} \frac{\cos\theta_M \cos\theta_N}{r_{MN}^2} dF_N. \qquad (25.6.5)$$

Так как отношение (25.6.4) зависит от угла видимости одного тела с другого ($\theta_M$), то коэффициент облученности называют также *угловым коэффициентом излучения*. В ряде случаев угловой коэффициент излучения с успехом интерпретируется как мера вероятности попадания на тело $dF_k$ «частиц», вылетающих с поверхности тела $dF_i$ при условии, что все возможные траектории полета этих частиц равновероятны. Поток энергии, получаемый всей поверхностью $F_k$ от излучения элементарного участка, определяется интегрированием уравнения (25.6.3) в пределах $F_k$:

$$dQ(M, F_k) = \frac{1}{\pi} E_0(M)\, dF_M \int_{F_k} \frac{\cos\theta_M \cos\theta_N}{r_{MN}^2} dF_N. \qquad (25.6.6)$$

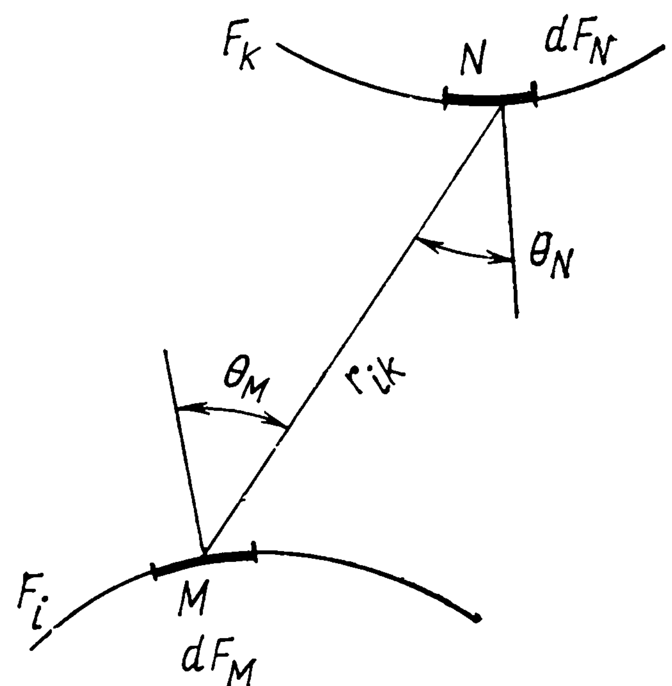



Рис. 25.13. Схема теплообмена излучением между двумя изотермическими абсолютно черными телами

Отношение

$$\varphi(M, F_k) = \frac{dQ(M, F_k)}{dQ(M)} = \frac{1}{\pi} \int_{F_k} \frac{\cos\theta_M \cos\theta_N}{r_{MN}^2} dF_N \qquad (25.6.7)$$

называется *локальным угловым коэффициентом излучения*. Между элементарным и локальным угловыми коэффициентами излучения существует очевидное соотношение:

$$\varphi(M, F_k) = \int_{F_k} d\varphi(M, N). \qquad (25.6.8)$$

Энергия излучения, которой обмениваются поверхности $F_i$ и $F_k$, может быть определена интегрированием уравнения (25.6.6) по $F_i$:

$$Q(F_i, F_k) = Q_{ik} = \frac{1}{\pi} \int_{F_i} \int_{F_k} E_0(M) \frac{\cos\theta_M \cos\theta_N}{r_{MN}^2} dF_M\, dF_N.$$

Так как $E_0(M) = E_{0i} = \text{const}$ по поверхности $F_i$, то

$$Q_{ik} = \frac{1}{\pi} E_{0,\,i} \int_{F_i} \int_{F_k} \frac{\cos\theta_M \cos\theta_N}{r_{MN}^2} dF_M\, dF_N. \qquad (25.6.9)$$

Полное излучение поверхности $F_i$ в пределах полусферы

$$Q(F_i) = Q_i = E_{0,\,i} F_i = \sigma_0 T_i^4 F_i. \qquad (25.6.10)$$

Отношение потока $Q_{ik}$, посылаемого телом с поверхностью $F_i$ на тело с поверхностью $F_k$, к полному потоку $Q_i$ с поверхности

$$\frac{Q_{ik}}{Q_i} = \varphi(F_i, F_k) = \varphi_{ik} = \frac{1}{\pi F_i} \int_{F_i} \int_{F_k} \frac{\cos\theta_M \cos\theta_N}{r_{MN}^2} dF_M\, dF_N \qquad (25.6.11)$$

называется *средним* или *интегральным угловым коэффициентом излучения*. Соотношение между локальным и интегральным угловыми коэффициентами имеет вид

$$\varphi_{ik} = (1/F_i) \int\limits_{F_i} \varphi (M, F_k)\, dF_M. \tag{25.6.12}$$

Если излучающее тело образовано вогнутой поверхностью, то приходится принимать во внимание излучение тела само на себя. В связи с этим вводятся угловые коэффициенты самооблучения. Применительно к среднему угловому коэффициенту выражение (25.6.11) примет вид

$$\varphi_{ii} = \frac{1}{\pi E_i} \int\limits_{F_i} \int\limits_{F_i} \frac{\cos \theta_M \cos \theta_N}{r^2_{MN}}\, dF_M\, dF_N. \tag{25.6.13}$$

Отношение потока $Q_{ik}$ к плотности потока, посылаемого телом $i$ в окружающее пространство, образует так называемую взаимную поверхность рассматриваемых тел

$$H_{ik} = Q_{ik}/E_i. \tag{25.6.14}$$

Это понятие, впервые использованное Г. Л. Поляком, имеет прямое отношение к известной в интегральной геометрии мере Крофтона. В связи с этим взаимная поверхность $H_{ik}$ иногда рассматривается как мера четырехмерного множества лучей, пересекающих произвольно ориентированные в пространстве тела $i$ и $k$. Последнее вытекает из определения поверхности лучеобменивающихся тел, как меры двухмерного несчетного множества точек, являющихся источниками указанных выше лучей.

Взаимные поверхности связаны с соответствующими угловыми коэффициентами излучения следующими простейшими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &d^2 H (M, N) = d\varphi (M, N)\, dF_M; \\ &dH (M, F_k) = \varphi (M_i, F_k)\, dF_M; \\ &H_{ik} = \varphi_{ik} F_i; \\ &H_{ii} = \varphi_{ii} F_i. \end{aligned}\right\} \tag{25.6.15}$$

Угловые коэффициенты вместе с взаимными поверхностями называются *геометрическими инвариантами излучения*.

Используя указанные понятия, радиационный поток $Q_{ik}$, испускаемый телом $i$ и попадающий на тело $k$, можно записать равенствами

$$Q_{ik} = Q_{\text{п}} = \varphi_{ik}\, F_i\, E_{\text{с},\, k} = H_{ik}\, E_{\text{с}\, k}. \tag{25.6.16}$$

Заметим, что если плотность собственного излучения тела $E_{\text{с}k} \equiv 1$, то $Q_{ik} = H_{ik}$, т. е. взаимная поверхность тел $i$ и $k$ имеет физический смысл единичных однородных потоков.

## 25.7. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПОТОКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

Взаимные поверхности и угловые коэффициенты излучения, имеющие физический смысл единичных потоков излучения, обладают рядом свойств, вытекающих из общих принципов распространения и сохранения меры множества лучей, переносящих энергию теплового излучения.

К числу наиболее общих и важных свойств единичных потоков излучения относятся свойства существования, аддитивности и замкнутости. Из этих свойств вытекают в качестве следствий менее очевидные свойства взаимности и конгруэнтности.

Так как указанные свойства имеют главным образом, геометрический смысл, то при их описании удобнее исключить из рассмотрения энергетическое содержание потоков излучения, используя в основном понятие взаимной поверхности. Используемое при этом представление о мере несчетного множества геометрических лучей является чисто условным.

*Свойство существования.* Мера множества лучей, исходящих с поверхности $i$ и попадающих на поверхность $k$, существует, если она составлена из непрерывных прямых. В ином случае, если на пути лучей помещается «непрозрачное тело», единичный лучистый поток равен нулю:

$$H_{ik}=0 \text{ и } \varphi_{ik}=0. \quad (25.7.1)$$

Для плоского и выпуклого тела, где самооблучение отсутствует, $H_{ii}=0$ и $\varphi_{ii}=0$.

*Свойство аддитивности.* Меры множества геометрических лучей, посылаемых поверхностью $i$ на окружающую поверхность систему тел $k_1$, $k_2$, $k_3$, ... и получаемых ею от этих тел, взаимно независимы и суммируются в обычном арифметическом смысле, т. е.

$$\left.\begin{aligned} H_{ik} &= H_{ik_1}+H_{ik_2}+H_{ik_3}+\ldots; \\ \varphi_{ik} &= \varphi_{ik_1}+\varphi_{ik_2}+\varphi_{ik_3}+\ldots. \end{aligned}\right\} \quad (25.7.2)$$

*Свойство замкнутости.* Из законов сохранения энергии и меры множества лучей для замкнутой излучающей системы следует, что мера несчетного множества геометрических лучей, исходящих с поверхности $i$ и пересекающих замыкающую поверхность системы окружающих тел, равна мере несчетного множества точек поверхности $i$, испускающих эти лучи:

$$\Sigma H_{ik}=F_i \quad (1\leqslant k\leqslant n;\ i=1, 2,\ldots, n); \quad (25.7.3)$$

$$\Sigma\varphi_{ik}=1 \quad (1\leqslant k\leqslant n;\ i=1, 2,\ldots, n). \quad (25.7.4)$$

Если тело $i$ вогнутое, то имеет место самооблучение. В этом случае уравнение (25.7.3) можно записать следующим образом:

$$\sum_{k\neq i}^{n} H_{ik}=F_i-H_{ii}=H_i, \quad (25.7.5)$$

где $H_i=F_i\,(1-\varphi_{ii})$ — эффективная поверхность вогнутого тела.

*Свойство взаимности.* Меры множеств однонаправленных геометрических лучей, пересекающих контуры $i$ и $k$ двух произвольным образом расположенных тел, инвариантны. Взаимные поверхности пары тел $i$ и $k$ обладают свойством взаимной симметрии:

$$H_{ik}=H_{ki}. \quad (25.7.6)$$

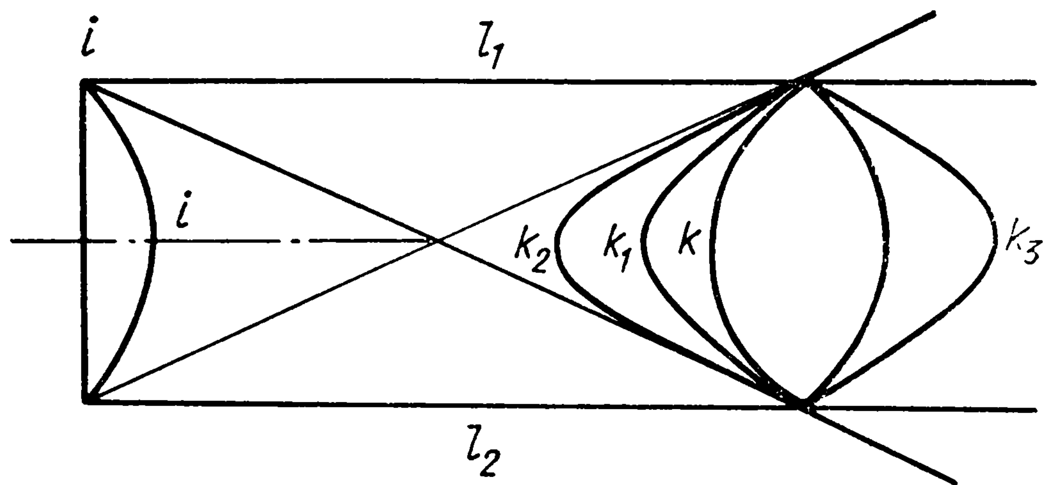



Рис. 25.14. К свойству конгруэнтности

Это соотношение может быть получено также из условий термодинамического равновесия излучения абсолютно черных тел. Действительно, в этом случае $Q_{ik}=Q_{ki}$ или $\sigma_0T^4H_{ik}=\sigma_0T^4H_{ki}$, откуда $H_{ik}=H_{ki}$. Кроме того, условие (25.7.6) следует из теоремы обращения порядка интегрирования в выражении для $H_{ik}$, которое на основании уравнений (25.6.11) и (25.6.15) записывается как

$$H_{ik}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{F_i}\int\limits_{F_k}\frac{\cos\theta_M\cos\theta_N}{r_{MN}^2}\,dF_M\,dF_N. \quad (25.7.7)$$

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что теорема взаимности является одним из частных проявлений фундаментальных соотношений взаимности в области геометрической оптики.

*Свойство конгруэнтности, или совмещаемости.* Мера множества лучей, исходящих с поверхности тела $i$ и падающих на тело $k$, не зависит от конфигурации последнего при условии, что поверхность $k$-го тела вписывается в систему прямых (наружных и внутренних), охватывающих эти тела (рис. 25.14). Дей-

ствительно, на основании свойства взаимности и соотношений (25.7.3) и (25.7.4)

$$H_{ik}=H_{ik_1}=H_{ik_2}=H_{ik_3}=F_i-H_{il_1}-H_{il_2}, \quad (25.7.8)$$

или

$$\varphi_{ik}=\varphi_{ik_1}=\varphi_{ik_2}+\varphi_{ik_3}=1-\varphi_{il_1}-\varphi_{il_2}. \quad (25.7.9)$$

## 25.8. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотренные свойства потоков излучения позволяют вычислять взаимные поверхности и угловые коэффициенты в простейших случаях конфигураций излучающих систем, не прибегая к интегрированию соответствующих выражений для $H_{ik}$ и $\varphi_{ik}$. Например, замкнутая система, состоящая из двух тел, из которых одно невогнутое (рис. 25.15), имеет следующее решение. На основании свойства существования $H_{11}=0$; $\varphi_{11}=0$. Из свойства замкнутости следует, что $\varphi_{11}+\varphi_{12}=1$ или $\varphi_{12}=1$. Из свойства взаимности следует, что $H_{12}=H_{21}$ или $F_1\varphi_{12}=F_2\varphi_{21}$, откуда $\varphi_{21}=\varphi_{12}F_1/F_2=F_1/F_2$. Из условий замкнутости можно записать: $\varphi_{22}=1-\varphi_{21}=1-F_1/F_2$. При известных $F_1$ и $F_2$ задача решена. Однако в случае более сложных, плоских и осесимметричных пространственных задач удобнее пользоваться правилом так называемых охватывающих кривых (нитей), вытекающим из общих свойств потоков излучения. Это правило основано на следующих соображениях.

Пусть произвольно вогнутое тело $i$ с поверхностью $F_i$ имеет замыкающую поверхность $F_k$. Уравнение замкнутости для такой системы запишется в виде

$$H_{ii}+H_{ik}=F_i. \quad (25.8.1)$$

Из свойства взаимности следует, что $H_{ik}=H_{ki}$ или $\varphi_{ik}F_i=\varphi_{ki}F_k$, откуда $H_{ki}=\varphi_{ki}F_k=F_k$, так как $\varphi_{ki}=1$. Следовательно,

$$H_{ii}=F_i-F_k. \quad (25.8.2)$$

Необходимо, однако, иметь в виду, что в формуле (25.8.2) $H_{ii}$ представляет собой меру четырехмерного множества двунаправленных геометрических лучей, каждый из которых пересекает вогнутую поверхность $F_i$ в двух точках. В связи

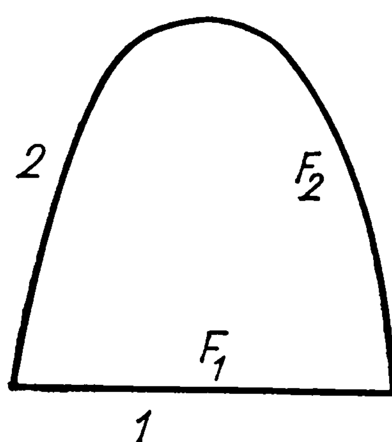


Рис. 25.15. Система с вогнутым телом

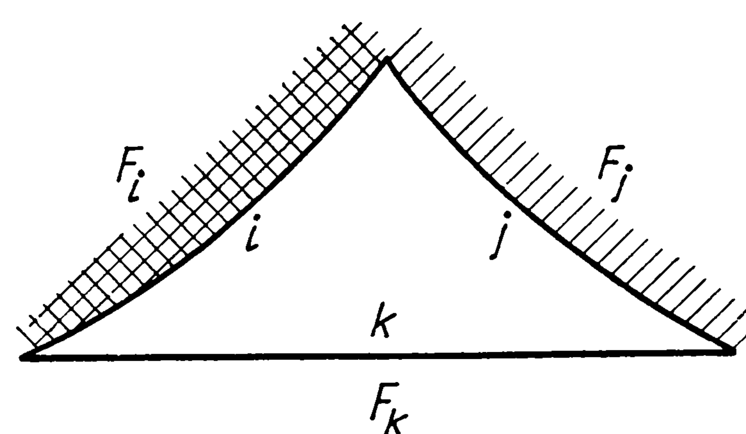


Рис. 25.16. Излучающая система из трех невогнутых тел

с этим при вычислении взаимной поверхности двух произвольных плоских контуров $i$ и $k$ следует иметь в виду меру множества однонаправленных геометрических лучей, пересекающих эти контуры, которая в два раза меньше меры множества двунаправленных лучей. В нашем случае для однонаправленных лучей

$$H_{ii}=(1/2)(F_i-F_k). \quad (25.8.3)$$

Полагая рассматриваемое плоское тело состоящим из двух невогнутых, $i$ и $j$, получаем возможность в общем случае для замкнутой излучающей системы, состоящей из трех невогнутых тел (рис. 25.16), записать меру множества однонаправленных геометрических лучей в следующем виде:

$$H_{ij}=(1/2)(F_i+F_j-F_k). \quad (25.8.4)$$

Обобщим полученные результаты на случай двух произвольных плоских замкнутых контуров, не пересекающихся и не касающихся друг друга (рис.25.17). В терминологии теории теплообмена излучением задача формулируется следующим образом. Даны два непрозрачных произвольных тела бесконечной протяженности, разделенных диатермической средой и, в общем случае, частично экранированных другими подобными же телами. Требуется определить однородную меру множества лучей постоянной яркости (единичный поток), падающих с одного тела на другое. Соединим лучеобменивающиеся контуры $i$ и $k$ внешними и внутренними охватывающими нитями. На основании свойства конгруэнтности мера множества геометрических лучей от тела $i$

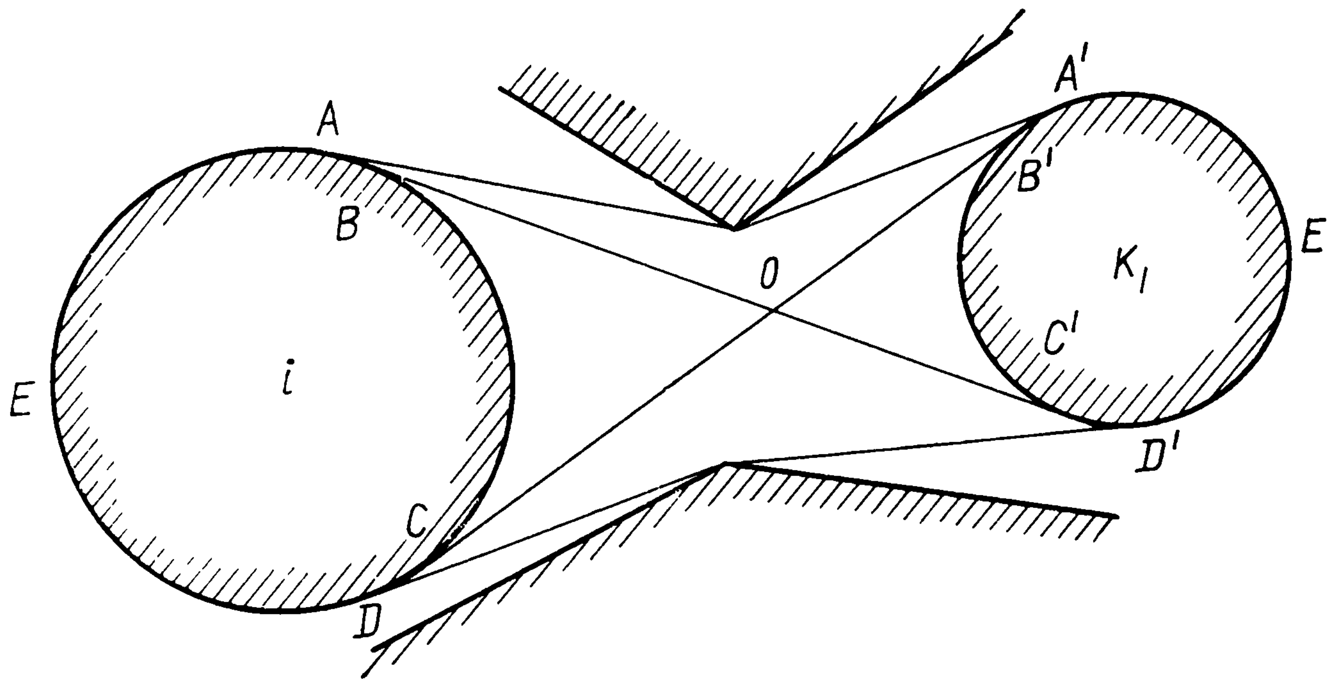



Рис. 25.17. К выводу правила охватывающих кривых

на тело $k$ равна мере множества лучей от контура $ABOCD$ на контур $A'B'OC'D'$. Это позволяет, применяя последовательно результат (25.8.3) к замкнутым плоским системам $ABOB'A'$ и $DCOC'D'$, получить

$$H_{ik} = (1/2)(ABOC'D' + DCOB'A' - AA' - DD'),$$

или

$$H_{ik} = (1/2)(ABOC'D' + D'E'A' + A'B'OCD + DFA - AA' -$$
$$- A'E'D' - DD' - DEA) = (1/2)ABOC'D'E'A'OCDEA - AA'E'D'DEA). \qquad (25.8.5)$$

Таким образом, мера множества лучей, пересекающих пару произвольных плоских замкнутых контуров, равна разности длин внутренних и внешних охватывающих кривых. Приведенные результаты носят иногда наименование метода *лучевой алгебры*. В теории радиационного теплообмена этот метод впервые был предложен Г. Л. Поляком при расчете угловых коэффициентов топочных экранов. В светотехнике правило охватывающих кривых впервые было применено А. А. Гершуном. Систематическое обоснование методов расчета геометрических инвариантов дано в работах Ю. А. Суринова и А. С. Невского.

Простейшим примером применения правила охватывающих кривых является расчет взаимных поверхностей и угловых коэффициентов для двух бесконечных параллельных полос одинаковой ширины (рис. 25.18). В соответствии с правилом охватывающих кривых взаимная поверхность для полос *1* и *2* определяется по уравнению (25.8.5)

$$H_{12} = (1/2)ABDCA - ABCDA),$$

или

$$H_{12} = (1/2)(BD + CA - BC - AD).$$

Так как $AC = BD$ и $BC = AD$, то

$$H_{12} = (AC - AD); \quad AD = h; \quad AC = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Следовательно,

$$H_{12} = \sqrt{a^2 + h^2} - h. \qquad (25.8.6)$$

Полагая, что $F_1 = F_2 = a$, определяем угловой коэффициент:

$$\varphi_{12} = \varphi_{21} = \sqrt{1 + (h/a)^2} - h/a. \qquad (25.8.7)$$

Применительно к более сложному случаю расположения и форм лучеобменивающихся поверхностей рассмотрим вычисление угловых соотношений между неограниченной плоскостью и параллельным этой плоскости рядом труб (рис. 25.19). К такому случаю сводится, например, расчет излучения пламени на однорядный экран. Полагая расстояние от плоскости до труб пренебрежимо малым по сравнению с длиной труб и шириной ряда, совмещаем рассмат-

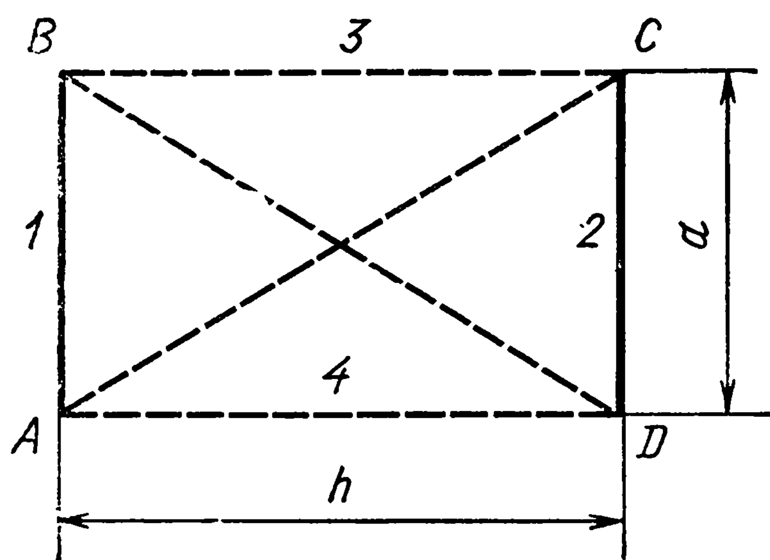



Рис. 25.18. К геометрическому анализу для двух параллельных полос одинаковой ширины

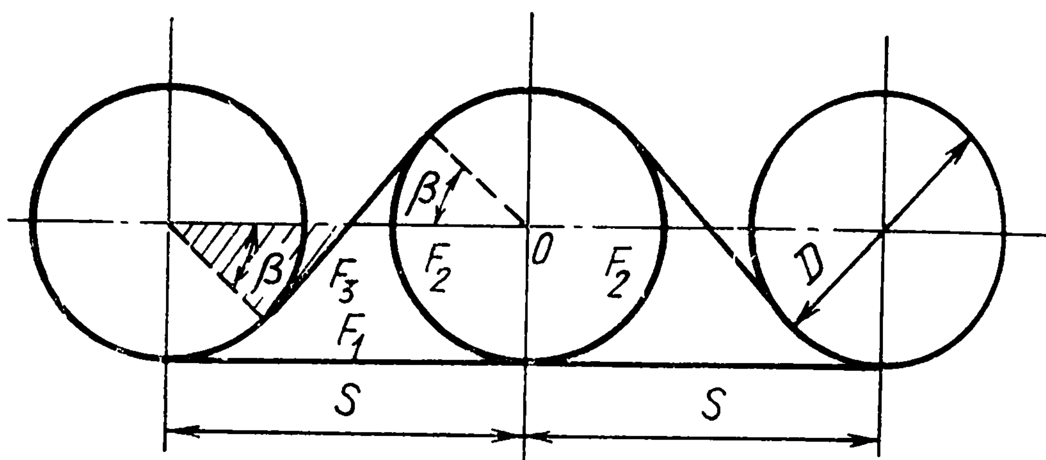



Рис. 25.19. К геометрическому анализу излучающей системы, состоящей из ряда труб и плоскости

риваемую плоскость с плоскостью, касательной к трубам экрана, и рассматриваем, в силу симметрии, условно замкнутую систему, составленную из невогнутых поверхностей $F_1$, $F_2$, $F_3$.

Далее имеем (на 1 пог. м. трубы и на 1 ряд)

$$F_1 = S;\ F_2 = (\pi/2 + \beta)D/2;\ F_3 = (\pi/2 - \beta)D/2 + D\ \mathrm{tg}\,\beta.$$

Из заштрихованного треугольника следует, что

$$\mathrm{tg}\,\beta = \sqrt{(S/D)^2 - 1};\ \beta = \mathrm{arctg}\sqrt{(S/D)^2 - 1}.$$

Используя выражение (25.8.4) и учитывая симметричность задачи, получаем

$$\left.\begin{aligned} 2H_{12} &= S - D\sqrt{(S/D)^2 - 1} - \mathrm{arctg}\sqrt{(S/D)^2 - 1};\\ \varphi_{12} &= 2H_{12}/F_1 = 1 - \sqrt{1 - (D/S)^2} + (D/S)\,\mathrm{arctg}\sqrt{(S/D)^2 - 1}. \end{aligned}\right\} \qquad (25.8.8)$$

Применение алгебраического метода исследования геометрических инвариантов излучения в объемных излучающих системах ограничено областью осесимметричных задач.

Анализируя геометрию излучающей системы, прежде всего следует определить возможность алгебраического решения задачи на основе свойств потоков излучения и правила охватывающих кривых. Геометрия произвольной замкнутой излучающей системы, состоящей из $n$ тел, определяется $n^2$ угловыми коэффициентами излучения. Это число может быть существенно уменьшено на основании свойства взаимности, а также учета чисел невогнутых ($m$) и попарно экранированных ($z$) поверхностей. Кроме того, следует учесть возможность деления рассматриваемой системы с помощью воображаемых делительных поверхностей ($d$) на подсистемы упрощенной конфигурации (свойство замкнутости). Таким образом, число независимых угловых коэффициентов

$$z = n(n - 1)/2 - m - r - d. \qquad (25.8.9)$$

При $z = 0$ геометрические инварианты излучения определяются элементарно, на основании свойств потоков излучения и правила охватывающих кривых.

В алгебраически неопределимых излучающих системах к изложенному выше следует добавить вычисление одного-двух так называемых независимых угловых коэффициентов, определение которых алгебраическим путем не представляется возможным. Их вычисление связано с выполнением четырехкратного интегрирования по поверхностям лучеобменивающихся тел. Такое интегрирование с помощью теоремы Стокса может быть сведено к двукратному интегрированию по контурам тел. Из приближенных методов следует отметить графический способ определения угловых коэффициентов, а также разнообразные методы моделирования (светового, фотографического, огневого).

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*


1. **Блох А. Г.** Основы теплообмена излучением. М., Госэнергоиздат, 1962.
2. **Гаррисон Т. Р.** Радиационная пирометрия. Пер. с англ. М., «Мир», 1964.
3. **Гершун А. А.** Теория светового поля. ГОНТИ, 1936.
4. **Гребер Г., Эрк С., Григулль У.** Основы учения о теплообмене. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
5. **Невский А. С.** Теплообмен излучением в металлургических печах и топках котлов. М., Металлургиздат, 1958.
6. **Планк М.** Теория теплового излучения. Пер. с нем. М., Гостехиздат, 1935.
7. **Планк М.** Введение в теоретическую физику, гл. 5. М., Гостехиздат, 1935.
8. **Поляк Г. Л.** Анализ теплообмена излучением между диффузными поверхностями методом сальдо. — «Журн. техн. физ.», 1935., т. 5, вып. 3, с. 436.
9. **Поляк Г. Л.** Методика расчета лучеиспускания в пучках.— «Изв. АН СССР, ОТН», 1937, с. 347.
10. **Свет Д. Я.** Температурное излучение металлов и некоторых веществ. М., «Металлургия», 1964.
11. **Суринов Ю. А.** Интегральные уравнения теплового излучения и методы расчета лучистого обмена в системах «серых» тел, разделенных диатермической средой.— «Изв. АН СССР, ОТН», 1948, № 7, с. 981.
12. **Суринов Ю. А.** Лучистый теплообмен при наличии поглощающей и рассеивающей среды.— «Изв. АН СССР, ОТН», 1952, № 9, с. 1331; № 10, с. 1455.
13. **Хэкфорд Г. Л.** Инфракрасное излучение. Пер. с англ. М., «Энергия», 1964.
14. **Шорин С. Н.** Теплопередача. М., «Высшая школа», 1964.

*Глава* **26**

# ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ В ПРОЗРАЧНЫХ И ПОГЛОЩАЮЩИХ СРЕДАХ

## 26.1. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ СИСТЕМЫ ТЕЛ, РАЗДЕЛЕННЫХ ПРОЗРАЧНОЙ СРЕДОЙ

Рассмотрим лучистое взаимодействие непрозрачных тел, образующих замкнутую систему* ограниченных размеров с произвольным и непрерывным распределением оптических характеристик и температур. Исследование теплообмена излучением обычно сводится либо к определению полусферических плотностей излучения на поверхностях лучеобменивающихся тел по заданным температурным распределениям (прямая задача), либо же к отысканию температур по значениям радиационных потоков (обратная задача). Возможны также смешанные постановки задач.

Полусферическая плотность падающего излучения по уравнению (25.5.11) может быть представлена для наглядности в произвольной замкнутой излучающей системе (рис. 26.1) следующим образом:

$$E_{п}(M) = \int_{2\pi} I_{п}(M, S) \cos\theta_M \, d\Omega. \tag{26.1.1}$$

Здесь $I_{п}(M, S)$ — интенсивность или яркость излучения, падающего на элементарную площадку с точкой $M$ из направления $S$. Принимая во внимание диатермичность среды, замечаем, что $I_{п}(M, S) = I_{э}(N, S)$. При диффузном излучении и отражении $I_{п}(M, S) = I_{э}(N, S) = E_{э}(N)/\pi$; и, следовательно;

$$E_{п}(M) = (1/\pi) \int_{2\pi} E_{э}(N) \cos\theta d\Omega. \tag{26.1.2}$$

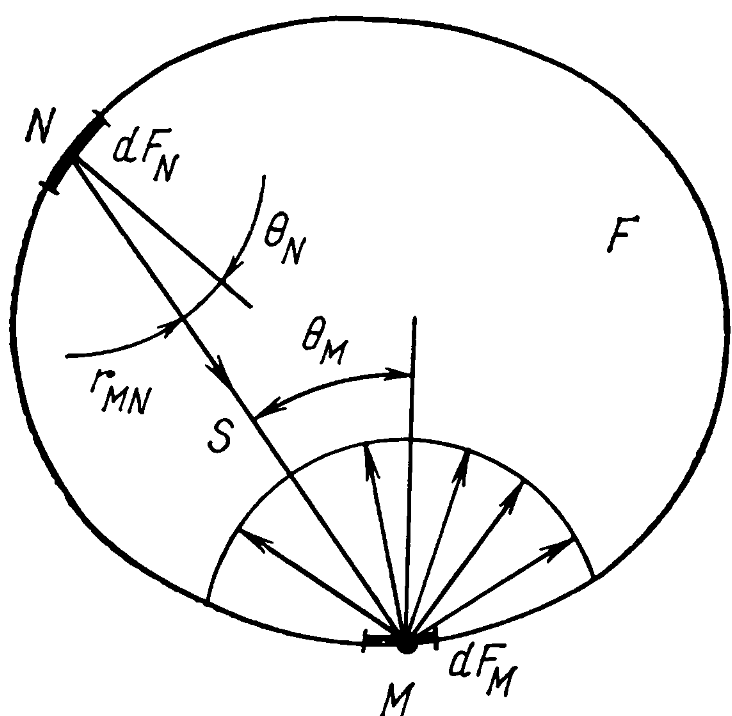



Рис. 26.1. Замкнутая система с диффузно излучающей поверхностью

Используя уравнение (25.6.5), можем написать выражение для элементарного углового коэффициента между площадками с фиксированной точкой $M$ и текущей точкой $N$ в следующем виде:

$$d\varphi(M, N) = \frac{1}{\pi} \cos\theta_M \, d\omega(M, N) = \frac{1}{\pi} \frac{\cos\theta_M \cos\theta_N}{r_{MN}^2} dF_N.$$

Далее, введя обозначение

$$Q(M, N) = \frac{1}{\pi} \frac{\cos\theta_M \cos\theta_N}{r_{MN}^2} \tag{26.1.3}$$

таким образом, чтобы можно было записать

$$d\varphi(M, N) = Q(M, N) dF_N, \tag{26.1.4}$$

представим уравнение (26.1.2) в форме

$$E_{п}(M) = \int E_{э}(N) Q(M, N) \, dF_N. \tag{26.1.5}$$

---

* Незамкнутая система может быть замкнута поверхностью, которая должна обладать свойствами абсолютно черного тела, находящегося при температуре абсолютного нуля ($A = 1$; $T = 0$ К).

Заметим, что $Q(M, N)$ является симметричной функцией элементарных площадок в двух точках. Поэтому

$$Q(M, N) = Q(N, M). \qquad (26.1.6)$$

Пусть в заданной замкнутой излучающей системе известно распределение полусферической плотности падающего излучения $E_п(M)$. Требуется определить $E_э(N)$, а следовательно, в соответствии с равенством (25.5.7) и распределение температур. В этом случае уравнение (26.1.5), где неизвестное $E_э(N)$ стоит под знаком интеграла, представляет собой интегральное уравнение Фредгольма первого рода с симметричным ядром $Q(M, N)$. Подставляя в равенство (25.5.7) значение $E_п(M)$ из выражения (26.1.5), получаем

$$E_э(M) - R(M)\int\limits_F E_э(N)\,Q(M, N)\,dF_N = E_с(M), \qquad (26.1.7)$$

т. е. неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, составленное относительно полусферической плотности эффективного излучения.

Если подставить в выражение (26.1.5) значение $E_э$ из равенства (25.5.7), то получим интегральное уравнение для плотности падающего излучения:

$$E_п(M) - \int R(N)\,E_п(N)\,Q(M, N)\,dF_N = \int\limits_F E_с(N)\,Q(M, N)\,dF_N. \qquad (26.1.8)$$

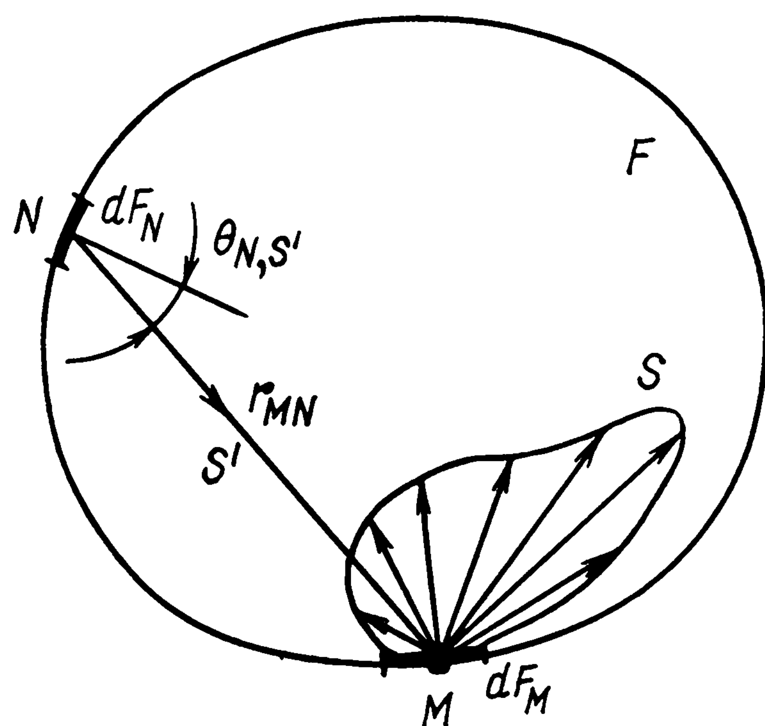



Рис. 26.2. Замкнутая система с поверхностью, обладающей произвольной индикатрисой отражения

Несколько сложнее обстоит дело при рассмотрении теплообмена тел с произвольными индикатрисами отражения поверхностей (рис. 26.2). Г. Л. Поляк показал, что в этом случае интегральное уравнение (26.1.7) для полусферической плотности эффективного излучения запишется в следующем виде*:

$$E_э(M) - \pi\int\limits_F R(M, S')\,I_э(N, S')\,Q(M, S', N)\,dF_N = E_с(M), \qquad (26.1.9)$$

где

$$\left.\begin{aligned} Q(M, S', N) &= \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos\theta_{M,S'}\cos\theta_{N,S'}}{r_{MN}^2} = Q(N, S', M);\\ R(M, S') &= \int\limits_F \eta(M, S', S)\,Q(M, S, N)\,dF_N. \end{aligned}\right\} \qquad (26.1.10)$$

Величина $R(M, S')$ представляет собой коэффициент отражения поверхности элементарной площадки с точкой $M$ при ее облучении в направлении $S'$. В выражение (26.1.10) входит также коэффициент яркости $r(M, S', S)$, характеризующий отражение по направлениям. Физический смысл этого коэффициента становится ясным, если учесть, что

$$r(M, S', S) \equiv R(M, S')\,P(M, S', S). \qquad (26.1.11)$$

Входящая в это выражение индикатриса полусферического отражения $P(M, S', S)$ характеризует пространственное распределение излучения, отраженного от элементарной площадки с точкой $M$, т. е. вероятность того, что излучение, распространяющееся в направлении $S'$, после отражения от площадки с точкой $M$ находится внутри элементарного телесного угла с осью $S$.

* Зависимость характеристик излучения от длины волны и поляризации опускается.

Интегрируя $P(M, S', S)$ по всем направлениям в пределах $\omega = 2\pi$, получим условие замкнутости

$$(1/\pi)\int_{2\pi} P(M, S', S)\cos\theta d\Omega = 1. \qquad (26.1.12)$$

Если излучающая система образована поверхностями с диффузным отражением, полусферическая индикатриса отражения $P(M, S', S) \equiv 1$, а коэффициент яркости $r(M, S', S) \equiv R(M, S') = R(M)$. В этом случае интенсивность эффективного излучения $I_э(N) = E_э/\pi$ и уравнение (26.1.9) вырождается в интегральное уравнение (26.1.7).

Запишем интегральное уравнение (26.1.8) для полусферической плотности падающего излучения $E_п$ в следующем виде:

$$E_п(M) = \int_F R(N)\, E_п(N) Q(M, N)\, dF_N + \int_F E_c(N) Q(M, N)\, dF_N. \qquad (26.1.13)$$

Решение интегрального уравнения (26.1.13) методом последовательных приближений записывается в следующей форме:

$$E_п(M) = \int_F r(M, N), E_c(N)\, dF_N. \qquad (26.1.14)$$

Здесь

$$r(M, N) = Q(M, N) + \sum Q^s(M, N)\, (1 \leqslant s \leqslant \infty) \qquad (26.1.15)$$

есть резольвента, или разрешающее ядро интегрального уравнения (26.1.13), где $Q^s(M, N)$ — $s$-я итерация ядра $Q(M, N)$ в соответствии с ее определением.

$$Q^s(M, N) = \underbrace{\int_F \ldots \int_F}_{s} R(P_1)\ldots R(P_s) Q(M, P) Q(P_1, P_2)\ldots Q(P_s, N)\, dF_{p_1}\ldots dF_{p_s} \qquad (26.1.16)$$

характеризует $s$-е отражение по поверхности границ излучающей системы.

Решение (26.1.4) принято называть фундаментальным. Из него на основании классификации видов излучения могут быть получены решения для разнообразных видов излучения. Подставляя в выражение (26.1.14) значение $E_п$ из равенства (25.5.7), получаем уравнение, являющееся решением уравнения (26.1.7) для полусферической плотности эффективного излучения:

$$E_э(M) = E_c(M) + R(M)\int_F \Gamma(M, N)\, E_c(N)\, dF_N. \qquad (26.1.17)$$

Аналогичным образом, с учетом выражения (25.5.8), для полусферической плотности результирующего излучения получим

$$E(M) = A(M)\int_F \Gamma(M, N)\, E_c(N)\, dF_N - E_c(M). \qquad (26.1.18)$$

Если излучающая система находится в состоянии термодинамического равновесия, то всюду на границе системы $E \equiv 0$. Тогда из выражения (25.5.8) следует, что $E_п = E_0 = \sigma_0 T^4 = \text{const}$, а уравнение (26.1.18) после сокращения на $A(M)$ и $E_0$ вырождается в так называемое уравнение замкнутости

$$\int_F A(M)\,\Gamma(M, N)\, dF_N = 1. \qquad (26.1.19)$$

С его помощью уравнение (26.1.18) может быть записано более компактно:

$$E(M) = A(M)\int_F A(N)\,\Gamma(M, N)\,[E_0(N) - E_0(M)]\, dF_N. \qquad (26.1.20)$$

Важно отметить, что в этом случае оказалось возможным выделить вопросы, связанные с определением оптико-геометрических инвариантов излучения в самостоятельную задачу. Бесконечный функциональный ряд (26.1.15), определяющий резольвенту $\Gamma(M, N)$, можно свести к интегральному уравнению

$$\Gamma(M, N) = Q(M, N) + \int_F R(P)\, Q(M, P)\, \Gamma(P, N)\, dF_P, \qquad (26.1.21)$$

или в силу инвариантности параметров подынтегрального выражения уравнение (26.1.21) можно записать как

$$\Gamma(M, N) = Q(M, N) + \int_F R(P)\, \Gamma(M, P)\, Q(P, N)\, dF_P. \qquad (26.1.22)$$

Таким образом, вся сложность рассматриваемой проблемы переносится на решение последних двух уравнений.

## 26.2. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛ В ПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЕ (ЗОНАЛЬНЫЙ МЕТОД)

Практическая реализация изложенного выше строгого анализа весьма сложна даже для сравнительно простых излучающих систем. Поэтому широкое распространение получили приближенные методы анализа теплообмена излучением. Особого внимания заслуживает зональный метод, основанный на замене непрерывного распределения температур и оптических характеристик излучающей системы прерывным, в котором поле указанных характеристик считается состоящим из конечного числа термически и оптически однородных участков (тел, зон).

В связи с этим интегральное уравнение (26.1.8), в частности, заменяется системой интегральных уравнений следующего вида $(1 \leqslant k \leqslant n)$:

$$E_{\text{п}}(M_i) - \sum R_k \int_{F_k} E_{\text{п}}(N_k)\, Q(M_i, N_k)\, dF_{N_k} = \sum_{k=1}^{n} E_{\text{с},k} \int_{F_k} Q(M_i, N_k)\, dF_{N_k}. \qquad (26.2.1)$$

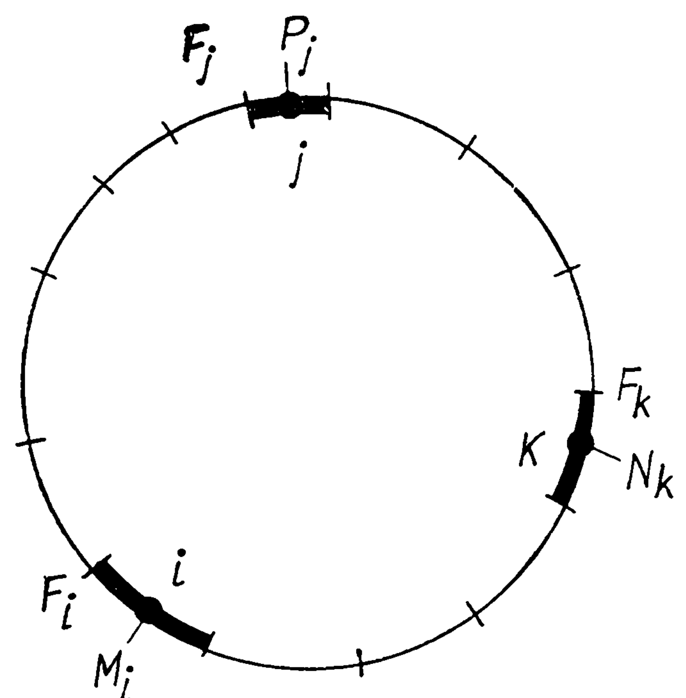



Рис. 26.3. Зональное разбиение поверхности излучающей системы

Здесь индексы $i$, $k$ соответствуют нумерации оптически и термически однородных зон излучающей системы (рис. 26.3). Заметим, что собственное излучение $E_{\text{с},k} = A_k \sigma_0 T_k^4$ выносится из-под знака интеграла как функция кусочно-постоянная. Этого нельзя сделать с падающим излучением, которое является функцией кусочно-непрерывной.

Легко показать (соответствующим интегрированием и осреднением по зонам $i$ и $k$), что для геометрических систем, у которых имеет место равенство локальных и средних угловых коэффициентов, т. е.

$$\varphi(M_i, F_k) = \varphi_{ik};\quad \varphi(F_k, M_i) = \varphi_{ki};\quad i, k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (26.2.2)$$

система интегральных уравнений (26.2.1) переходит в систему алгебраических уравнений вида $(1 \leqslant k \leqslant n)$

$$E_{\text{п},i} - \Sigma R_k\, \varphi_{ik}\, E_{\text{п},k} = \Sigma E_{\text{с},k}\, \varphi_{ik}. \qquad (26.2.3)$$

Здесь $E_{\text{п},i} = (1/F_i) \int_{F_i} E_{\text{п}}(M_i) dF_{M_i}$ — осредненное по поверхности $i$-й зоны значение плотности потока падающего излучения. Примерами геометрических систем, удовлетворяющих условию (26.2.2), могут служить классические конфигурации, образованные внутренней поверхностью одной, двух концентрических сфер или бесконечных цилиндров. В общем же случае систему (26.2.3)

следует рассматривать как аппроксимирующую интегральное уравнение (26.1.8). Степень такого приближения зависит от числа выбранных зон, поскольку при $n \to \infty$ система алгебраических уравнений совпадает с интегральным уравнением (26.1.8). При аппроксимации фундаментального решения (26.1.14) для полусферической плотности падающего потока излучения получаем

$$E_{п, i} = \Sigma E_{с, k} \Phi_{ik} \; (1 \leqslant k \leqslant n). \tag{26.2.4}$$

Здесь

$$\Phi_{ik} = \frac{1}{F_i} \int\limits_{F_i} \int\limits_{F_k} \Gamma(M_i, N_k)\, dF_{N_k}\, dF_{M_i} \tag{26.2.5}$$

есть средний разрешающий угловой коэффициент излучения между $i$-й и $k$-й зонами. При выводе уравнения (26.2.4) принимается во внимание, что $P_{ik} = P_{ki}$, где $P_{ik} = \Phi_{ik} F_i$ — взаимная разрешающая поверхность. Из уравнения (26.2.4) получаем уравнение замкнутости вида

$$\Sigma A_k \Phi_{ik} = 1 \quad (1 \leqslant k \leqslant n;\; i = 1, 2, ..., n). \tag{26.2.6}$$

Из выражения (25.5.8) для $E_i$, уравнения (26.2.4) и условия замкнутости (26.2.6) получаем решение относительно осредненного в пределах $i$-й зоны значения результирующей плотности излучения:

$$E_i = A_i \sigma_0 \Sigma A_k (T_k^4 - T_i^4) \Phi_{ik} \quad (1 \leqslant k \leqslant n). \tag{26.2.7}$$

Здесь $T_i$, $T_k$ — осредненные температуры в пределах $i$-й и $k$-й зон. В общем случае разрешающие угловые коэффициенты излучения определяются из интегральных уравнений (26.1.21) или (26.1.22). В случае дискретного характера излучающей системы, составленной из оптически однородных зон и удовлетворяющей по своей конфигурации условию (26.2.2), указанные уравнения переходят в системы алгебраических уравнений:

$$\Phi_{ik} = \varphi_{ik} + \Sigma R_j \Phi_{ij} \varphi_{jk} \quad (1 \leqslant j \leqslant n;\; i, k = 1, 2, ..., n); \tag{26.2.8}$$

$$\Phi_{ik} = \varphi_{ik} + \Sigma R_j \varphi_{ij} \Phi_{jk} \; (1 \leqslant j \leqslant n;\; i, k = 1, 2, ..., n). \tag{26.2.9}$$

Расчеты теплообмена излучением в каждом конкретном случае сводятся к вычислениям разрешающих угловых коэффициентов излучения и последующему их использованию в выражениях типа (26.2.4) и (26.2.7).

Рассмотрим некоторые характерные случаи теплообмена излучением.

## 26.3. ПРИЛОЖЕНИЕ ЗОНАЛЬНОГО МЕТОДА К РАСЧЕТУ ТЕПЛООБМЕНА ИЗЛУЧЕНИЕМ МЕЖДУ НЕСКОЛЬКИМИ СЕРЫМИ ТЕЛАМИ

В случае двух серых тел система (26.2.9) для разрешающих угловых коэффициентов излучения имеет следующее решение:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{1k} &= \frac{\varphi_{1k} + R_2 \varphi_{12} \varphi_{2k}}{1 - R_1 R_2 \varphi_{12} \varphi_{21}}; \\ \Phi_{2k} &= \frac{\varphi_{2k} + R_1 \varphi_{21} \varphi_{1k}}{1 - R_1 R_2 \varphi_{12} \varphi_{21}}. \end{aligned}\right\} \tag{26.3.1}$$

Если излучающая система состоит из двух плоскопараллельных неограниченных пластин, то, очевидно, $\varphi_{11} = \varphi_{22} = 0$, а $\varphi_{12} = \varphi_{21} = 1$ и, следовательно, $\Phi_{12} = \Phi_{21} = (1 - R_1 R_2)^{-1}$. Полусферическая плотность результирующего излучения между такими пластинами на основании уравнения (26.2.7) определяется как

$$E_1 = -E_2 = \frac{A_1 A_2 \sigma_0 (T_2^4 - T_1^4)}{1 - R_1 R_2}. \tag{26.3.2}$$

Принимая во внимание, что $R_i = 1 - A_i$, получаем известную формулу Христиансена:

$$E_1 = -E_2 = \frac{\sigma_0 (T_2^4 - T_1^4)}{1/A_1 + 1/A_2 - 1}, \qquad (26.3.3)$$

где знаменателю

$$1/A_1 + 1/A_2 - 1 = (1/A_1 - 1/2) + (1/A_2 - 1/2) \qquad (26.3.4)$$

в ряде случаев придается смысловое значение суммарного сопротивления переноса радиационной энергии, каждая из составляющих которого представляет собой сопротивление отдельной поверхности.

Система уравнений (26.2.9) для двух вогнутых тел имеет следующее решение:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{1k} &= \gamma_1 \frac{\varphi_{1k} + \gamma_2 R_2 \varphi_{12} \varphi_{2k}}{1 - \gamma_1 \gamma_2 R_1 R_2 \varphi_{12} \varphi_{21}}; \\ \Phi_{2k} &= \gamma_2 \frac{\varphi_{2k} + \gamma_1 R_1 \varphi_{21} \varphi_{1k}}{1 - \gamma_1 \gamma_2 R_1 R_2 \varphi_{12} \varphi_{21}}, \end{aligned}\right\} \qquad (26.3.5)$$

где $\gamma_i$ — коэффициент многократных отражений:

$$\gamma_i = 1/(1 - R_i \varphi_{ii}). \qquad (26.3.6)$$

Теплообмен между поверхностями двух тел, из которых одно (тело *1*) не вогнуто и заключено внутри другого (тело *2*) (рис. 26.4), определяется из следующих соображений. Так как тело *1* не имеет вогнутостей, то $\varphi_{11} = 0$ и соответственно $\gamma_{11} = 1{,}0$. Следовательно, разрешающий угловой коэффициент, определяющий эффекты многократных лучистых взаимодействий тела *1* с окружающим его телом *2*, на основании уравнений (26.3.5) записывается как

$$\Phi_{12} = \frac{\varphi_{12} + \gamma_2 R_2 \varphi_{12} \varphi_{22}}{1 - \gamma_2 R_1 R_2 \varphi_{12} \varphi_{21}}. \qquad (26.3.7)$$

Из условия $\varphi_{11} = 0$ на основании свойства замкнутости $\varphi_{12} = 1 - \varphi_{11} = 1$. Учитывая это и принимая во внимание, что $\gamma_2 = 1/(1 - R_2\varphi_{22})$, а $R_i = 1 - A_i$ $(i = 1, 2)$, приводим уравнение (26.3.7) к следующему виду:

$$\Phi_{12} = \{A_1 A_2 [1/A_1 + \varphi_{21}(1/A_2 - 1)]\}^{-1}. \qquad (26.3.8)$$

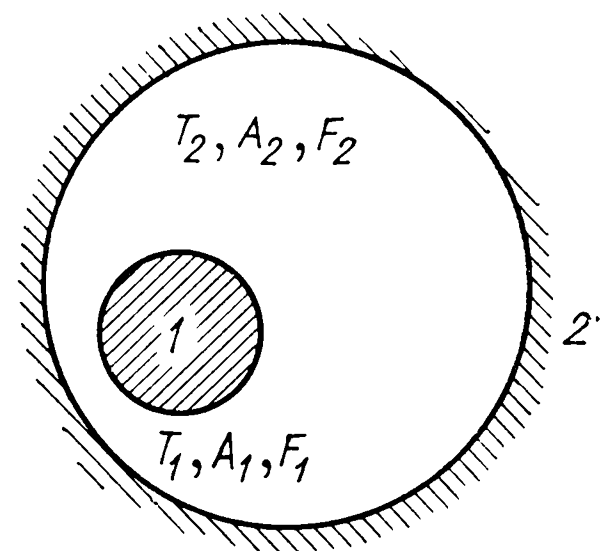



Рис. 26.4. К расчету теплообмена между двумя телами, размещенными одно внутри другого

Здесь $\varphi_{21}$ определяется из свойства взаимности: $\varphi_{21} = \varphi_{12} F_1/F_2 = F_1 F_2$. Полусферическая плотность результирующего излучения по поверхности тела *1*, таким образом, определится как

$$E_1 = \frac{\sigma_0 (T_2^4 - T_1^4)}{1/A_1 + (F_1/F_2)(1/A_2 - 1)}. \qquad (26.3.9)$$

Из условия сохранения энергии $Q_1 = -Q_2$ в рассматриваемой системе тел определяется плотность результирующего излучения по поверхности тела *2*:

$$E_2 = -E_1 F_1/F_2. \qquad (26.3.10)$$

Рассмотрим теперь лучистое взаимодействие трех серых невогнутых тел, образующих замкнутую излучающую систему. Для этого случая система алгебраических уравнений, определяющих $\Phi_{ik}$, решается в общем виде методом окаймления. Этот метод оказывается эффективным, когда требуется найти решение системы, для которой ранее получено решение усеченной системы, получающейся из данной вычеркиванием одного уравнения и одного неизвестного. Пользуясь указанным приемом, Н. А. Рубцов получил обобщенное

выражение для разрешающего углового коэффициента излучения системы из трех тел в следующем виде:

$$\Phi_{ik}=\frac{\varphi_{ik}\,(1-R_j\,R_r\,\varphi_{rj}\,\varphi_{jr})+R_j\,\varphi_{ij}\,D_{jk}^{(r)}+R_r\,\varphi_{ir}\,D_{rk}^{(j)}}{1-R_1\,R_2\,\varphi_{12}\,\varphi_{21}-R_1\,R_3\,\varphi_{31}\,D_{13}-R_2\,R_3\,\varphi_{32}\,D_{32}}. \qquad (26.3.11)$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} D_{ik}&=\varphi_{ik}+R_j\,\varphi_{ij}\,\varphi_{jk};\\ D_{jk}^{(r)}&=\varphi_{jk}+R_r\,\varphi_{jr}\,\varphi_{rk};\\ D_{rk}^{(j)}&=\varphi_{rk}+R_j\,\varphi_{rj}\,\varphi_{jk},\end{aligned}\right\} \qquad (26.3.12)$$

где $j$ и $r$ — индексы, дополняющие систему индексации для обозначения замкнутой системы из трех тел (например, если $i=1$, то $j=2$, $r=3$). Если одно из тел излучающей системы является абсолютно черным, решение уравнения (26.3.11) существенно упрощается. Пусть таким телом будет тело $3$ ($R\equiv 0$). Тогда выражение

$$\Phi_{ik}=\frac{\varphi_{ik}+R_j\,\varphi_{ij}\,\varphi_{jk}}{1-R_1R_2\varphi_{12}\varphi_{21}} \qquad (26.3.13)$$

позволяет вычислять значения разрешающих угловых коэффициентов излучения для любых пар тел, в которых хотя бы одно тело было серым. Уравнение (26.3.11) может быть записано также в следующем, более компактном виде:

$$\Phi_{ik}=\frac{\varphi_{ik}+R_j\,\varphi_{ij}\,\varphi_{jk}}{1-R_1\,R_2\,\varphi_{12}\,\varphi_{21}-R_1\,R_3\,\varphi_{31}\,D_{13}-R_2\,R_3\,\varphi_{32}\,D_{32}}. \qquad (26.3.14)$$

Значения $\Phi_{ik}$ для $i=k$ могут быть определены из уравнения замкнутости (26.2.6). Совершенно аналогичным образом отыскиваются расчетные формулы для излучающей системы из четырех серых невогнутых тел. Принципиальных затруднений в получении расчетных выражений для $\Phi_{ik}$ в излучающих системах из большего ($n>4$) числа зон не имеется. Однако возрастающая при этом громоздкость расчетных операций делает нецелесообразным получение расчетных формул. В этом случае следует переходить в каждом конкретном расчете к численным методам решения. Метод окаймления получает здесь непосредственное применение в численном виде.

Рис. 26.5. К расчету теплообмена в электропечах

Приведенные выше результаты могут быть использованы во всех случаях, когда практически возможно дискретное рассмотрение полей температур и оптических констант. Показателен в этом отношении теплообмен излучением в высокотемпературных электропечах. Разобъем рабочее пространство электропечи на три условные изотермические и оптически однородные зоны (рис. 26.5): нагреваемого изделия *1*, обмуровки *2* и нагревателя *3*.

Рассмотрим стационарное тепловое состояние печи. Зададимся результирующими потоками нагревателя: по тепловыделению нагреваемого изделия $Q_3$, по его тепловосприятию $Q_1$, а также температурой изделия по технологии его нагрева $T_1$. Требуется определить температуры нагревателя $T_3$ и футеровки $T_2$. Все тела (зоны) рассматриваются как серые. Для решения задачи воспользуемся разрешающей системой (26.2.7), которую запишем применительно к лучистым потокам с использованием понятия средней разрешающей взаимной поверхности $P_{ik}=\Phi_{ik}F_i$:

$$Q_i=A_i\,\sigma_0\,\Sigma\,A_k\,P_{ik}\,(T_k^4-T_i^4)\quad (k=1,\,2,\,3) \qquad (26.3.15)$$

Составляя (26.3.15) для зон $i=1{,}2$ и решая ее относительно $T_2$ и $T_3$, получаем

$$T_2=\left[T_1^4+\frac{A_2\,P_{23}\,Q_1-A_1\,P_{13}\,Q_2}{\sigma_0\,A_1\,A_2\,(A_2\,P_{12}\,P_{23}+A_1\,P_{21}\,P_{13}+A_3\,P_{13}\,P_{23})}\right]^{1/4}; \qquad (26.3.16)$$

$$T_3=\left[T_1^4+\frac{(A_1\,P_{21}+A_3\,P_{23})\,Q_1+A_1\,P_{12}\,Q_{12}}{\sigma_0\,A_1\,A_3\,(A_2\,P_{12}\,P_{23}+A_1\,P_{21}\,P_{13}+A_3\,P_{13}\,P_{23})}\right]^{1/4}. \qquad (26.3.17)$$

Здесь $Q_2$ определяется на основании уравнения баланса энергии

$$Q_2 = -Q_1 - Q_3. \qquad (26.3.18)$$

Можно показать, что уравнения (26.3.16) и (26.3.17) приводятся к форме, содержащей оптические и геометрические характеристики в явном виде:

$$T_2 = \left(T_1^4 + \frac{A_2 D_{23} H_2 Q_1 - A_2 D_{13} H_1 Q_2}{\sigma_0 A_1 A_2 (\varphi_{13} + \varphi_{12}\varphi_{23}) H_1 H_2}\right)^{1/4}; \qquad (26.3.19)$$

$$T_3 = \left(T_1^4 + \frac{(A_1 D_{21} + A_3 D_{23}) Q_1 + A_1 D_{21} Q_2}{\sigma_0 A_1 A_3 (\varphi_{13} + \varphi_{12}\varphi_{23}) H_1}\right)^{1/4}. \qquad (26.3.20)$$

Здесь $H_i$ — эффективная поверхность $i$-го тела, которая связана с истинной поверхностью $F_i$ соотношением (25.7.5).

## 26.4. ДЕЙСТВИЕ ЭКРАНОВ

Рассмотрим передачу тепла излучением между двумя неограниченными плоскопараллельными поверхностями с температурами $T_M$ и $T_N$, экранированными системой параллельных плоских листов (экранов) $I$, $II$, ... (рис. 26.6). Предположим, что экраны непрозрачны для теплового излучения и являются абсолютно теплопроводными. Следовательно, излучающие поверхности каждого экрана имеют одинаковую температуру. Этого нельзя сказать в отношении их оптических свойств, которые в общем случае могут быть произвольными. Обозначим поверхности экранов и взаимодействующих границ индексами $M, 1, 2, ..., n, n+1 = N$.

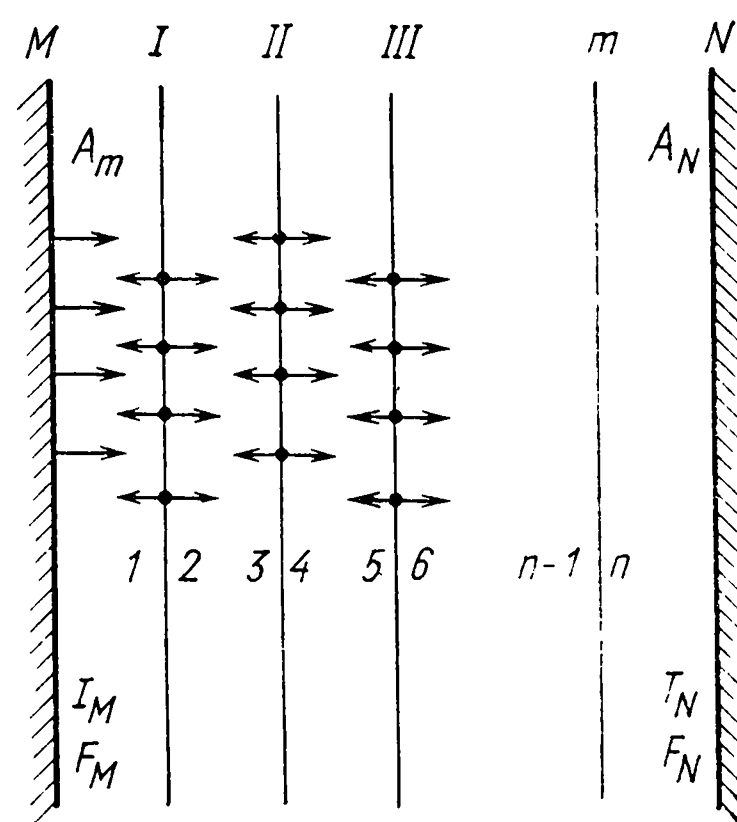


Рис. 26.6. К определению роли экранов

Из условий стационарности и закона сохранения энергии следует, что результирующий поток тепла, переносимый между рассматриваемыми поверхностями, остается постоянным в любом сечении. Количество тепла, последовательно переносимое между каждыми двумя противолежащими поверхностями, определяется на основании формулы (26.3.3). Воспользовавшись понятием сопротивления переносу радиационной энергии, представим выражения составляющих суммарного сопротивления в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma_0 (T_M^4 - T_1^4)}{E} &= \left(\frac{1}{A_M} - \frac{1}{2}\right] + \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{2}\right); \\ \frac{\sigma_0 (T_2^4 - T_3^4)}{E} &= \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{2}\right) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (26.4.1)$$

и т. д.

Суммируя левые и правые части приведенных соотношений и учитывая, что $T_1 = T_2$, $T_3 = T_4$ и т. д., получаем

$$\sigma_0 (T_M^4 - T_N^4)/E = \Sigma (1/A_i - 1/2) \quad (M \leqslant i \leqslant N). \qquad (26.4.2)$$

Здесь сумма, стоящая справа, представляет собой суммарное сопротивление переносу лучистой энергии между рассматриваемыми поверхностями $F_M$ и $F_N$. Из последнего уравнения получаем

$$E_M = -E_N = \frac{\sigma_0 (T_M^4 - T_N^4)}{\Sigma (1/A_i - 1/2)}. \qquad (26.4.3)$$

Если поверхности взаимодействующих тел и промежуточных экранов имеют одинаковые коэффициенты излучения, то формула (26.4.3) записывается следующим образом:

$$E_M = -E_N = \frac{\sigma_0 (T_M^4 - T_N^4)}{2(m+1)(1/A - 1/2)}, \qquad (26.4.4)$$

где $m$ — число промежуточных защитных экранов. В случае, когда указанные поверхности являются абсолютно черными,

$$E_M = -E_N = \frac{1}{m+1}\sigma_0 (T_M^4 - T_N^4). \qquad (26.4.5)$$

Как следует из формулы (26.4.4) и (26.4.5), наличие между взаимодействующими телами одного экрана уменьшает теплопередачу излучением в два раза, наличие двух экранов — в три и т. д. Таким образом, с помощью экранирования можно существенно уменьшить теплообмен излучением. Особенно заметный эффект дают экраны с низкими коэффициентами поглощения. На этом принципе, в частности, основаны экранная теплоизоляция печей и создание изоляционных материалов, выполненных из набора тонких металлических фольг (альфоль, стальфоль и т. п.). Интересно отметить, что связанный с рассмотренной задачей теплового экранирования перенос излучения может быть интерпретирован как процесс теплообмена излучением в некоторой дискретной среде с полосами поглощения, переизлучения и отражения при наличии в них локального термодинамического равновесия.

В этом смысле представленные результаты следует рассматривать как предварительные в исследовании более сложного процесса переноса излучения в поглощающей среде.

## 26.5. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Под процессом переноса энергии излучения принято понимать собственное излучение, поглощение, а также многократные отражения на границе и рассеяния в объеме среды. Указанные явления имеют место при переносе излучения как в газовых средах, содержащих взвешенные в них частицы пыли, сажи, капельки жидкости и т. п., так и в твердых или жидких полупрозрачных телах и реализуются как в природных условиях, так и в различных областях техники (в камерах сгорания различного устройства, в металлургии, стекольной промышленности и т. п.).

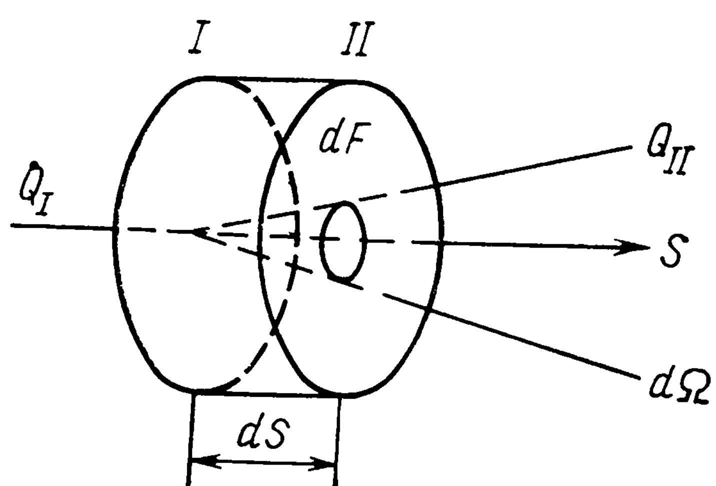



Рис. 26.7. К выводу уравнения переноса энергии излучения

Рассмотрим законы изменения интенсивности или яркости излучения в поглощающей и излучающей средах. Количество энергии излучения, входящее через основание $dF$ элементарного цилиндра (высота цилиндра пренебрежимо мала по сравнению с радиусом его основания), нормально ориентированного в направлении излучения $S$ (рис. 26, 7), за время $d\tau$ в пределах телесного угла $d\Omega$ и интервала длин волн от $\lambda$ до $\lambda + d\lambda$, согласно уравнению (25.2.4), определится как

$$Q_I = I_\lambda \, d\Omega dF d\tau d\lambda. \qquad (26.5.1)$$

Удельная интенсивность проходящего через элементарный цилиндр излучения меняется на величину $dI_\lambda$, вследствие чего на выходе из цилиндра

$$Q_{II} = (I_\lambda + dI_\lambda)\, d\Omega dF d\tau\lambda. \qquad (25.5.2)$$

Эти изменения вызваны как собственным излучением среды внутри цилиндра

$$\Delta Q_c = \varepsilon_\lambda \, dF\, dS\, d\Omega\, d\tau\, d\lambda. \qquad (26.5.3)$$

так и поглощением излучения, которое, согласно уравнению (25.5.12), определяется как

$$\Delta Q_{погл} = \varkappa_\lambda I_\lambda \, dF \, dS \, d\Omega \, d\tau \, d\lambda. \quad (26.5.4)$$

Здесь $\varepsilon_\lambda$ — спектральный коэффициент излучения. Составим уравнение, определяющее изменение интенсивности излучения при прохождении элементарного цилиндра:

$$(I_\lambda + dI_\lambda) \, d\Omega \, dF \, d\tau \, d\lambda = I_\lambda \, d\Omega \, dF \, d\tau \, d\lambda - \\ -\varkappa_\lambda I_\lambda \, dF \, d\Omega \, dS \, d\tau \, d\lambda + \varepsilon_\lambda \, dF \, dS \, d\Omega \, d\tau \, d\lambda, \quad (26.5.5)$$

или после сокращений

$$dI_\lambda / dS = -\varkappa_\lambda I_\lambda + \varepsilon_\lambda. \quad (26.5.6)$$

Последнее уравнение определяет изменение интенсивности излучения в поглощающей и излучающей средах и называется *уравнением переноса энергии излучения**. В этом уравнении спектральный коэффициент излучения $\varepsilon_\lambda$ представляет собой количество энергии, излучаемое единицей объема в пределах единичного телесного угла и интервала длин волн за единицу времени. $\varepsilon_\lambda$ связано с плотностью объемного собственного излучения очевидным соотношением

$$\varepsilon_\lambda (M) = (1/4\pi) \, \eta_{c,\,\lambda} (M). \quad (26.5.7)$$

В связи с этим уравнение (26.5.6) для поглощающих сред иногда записывают в следующем виде:

$$dI_\lambda (M, S)/dS = -\varkappa_\lambda (M) \, I_\lambda (M, S) + (1/4\pi) \, \eta_{c,\,\lambda} (M). \quad (26.5.8)$$

В общем случае, когда среда не только поглощает и излучает, но и рассеивает излучение, в уравнении переноса излучения (26.5.8) следует вместо коэффициента поглощения $\varkappa_\lambda$ использовать коэффициент ослабления излучения $k_\lambda$ согласно выражению (25.5.6), а вместо $\eta_{c\lambda} (M)$ — плотность объемного эффективного излучения, которая, согласно равенству (25.5.14), помимо собственного учитывает также и рассеянное излучение:

$$dI_\lambda (M, S)/dS = -k_\lambda (M) \, I_\lambda (M, S) + (1/4\pi) \, \eta_{э,\,\lambda} (M, S). \quad (26.5.9)$$

Плотность рассеянного излучения в общем случае определяется следующим образом:

$$\eta_{\beta,\,\lambda} (M, S) = \beta_\lambda (M) \int_{4\pi} \gamma_\lambda (M, S, S') \, I_\lambda (M, S) \, d\Omega, \quad (26.5.10)$$

где $\gamma_\lambda (M, S, S')$ — индикатриса рассеяния, указывающая долю общего излучения, падающего в направлении $S'$ и рассеиваемого элементарным объемом с точкой $M$ в направлении $S$ внутри телесного угла $d\Omega$. Вероятность рассеяния излучения в направлении $S$ внутри телесного угла $d\Omega$ определяется как

$$(1/4\pi) \, \gamma_\lambda (M, S, S') \, d\Omega.$$

Следовательно, по аналогии с уравнением (26.1.12) должно выполняться условие замкнутости

$$(1/4\pi) \int_{4\pi} \gamma_\lambda (M, S, S') \, d\Omega = 1. \quad (26.5.11)$$

В случае сферической индикатрисы рассеяния, когда $\gamma_\lambda (M, S, S') \equiv 1$, имеет место изотропное рассеяние излучения. Рассеяние излучения частицами (молекулами и свободными электронами), размеры которых малы по сравнению с длиной волны ($d < 0{,}1\lambda$), характеризуется индикатрисой, которая определяется по формуле Рэлея:

$$\gamma_\lambda (M, S, S') = (3/4) \, [1 + \cos^2 (\widehat{S, S'})] \quad (26.5.12)$$

* Процессы переноса излучения здесь рассматриваются как стационарные.

и имеет распределение интенсивности рассеяния, симметричное относительно направления падающего излучения (рис. 26.8, *а*). Если излучение рассеивается частицами, размеры которых сопоставимы с длиной волны, индикатриса рассеяния, зависящая от отношения радиуса частицы к длине волны излучения и показателя преломления вещества частицы, оказывается сильно вытянутой в направлении излучения (см. рис. 26.8, *б*).

Уравнение переноса излучения (26.5.9), таким образом, является весьма сложным интегро-дифференциальным уравнением яркости. В случае поглощающей и излучающей среды оно вырождается в обычное дифференциальное уравнение яркости (26.5.8). Уравнения переноса излучения (26.5.8) и (26.5.9) являются обобщениями известного закона Бугера, согласно которому учитывается ослабление интенсивности только за счет поглощения:

$$dI_\lambda(M, S)/dS = -\varkappa_\lambda(M) I_\lambda(M, S). \qquad (26.5.13)$$

Рис. 26.8. Индикатриса рассеяния излучения:

*а* — размеры частиц малы по сравнению с длиной волны; *б* — размеры частиц сопоставимы с длиной волны

Если среда диатермическая, то

$$dI_\lambda(M, S)/dS = -\varkappa_\lambda(M) I_\lambda(M, S) + \varepsilon_\lambda(M) \equiv 0. \qquad (26.5.14)$$

Неопределенность вида $I_\lambda(M, S) = \varepsilon_\lambda(M)/\varkappa_\lambda(M) = 0/0$, возникающая при этом, раскрывается из соображений постоянства интенсивности вдоль направления излучения $S$, значение которой для диффузно излучающих поверхностей определяется как

$$I_\lambda(M, S) = E_{э, \lambda}(M)/\pi. \qquad (26.5.15)$$

В случае термодинамического равновесия следует полагать

$$dI_\lambda(M)/dS \equiv 0; \quad I_\lambda(M) = I_{0, \lambda}(M). \qquad (26.5.16)$$

Далее с учетом уравнения (26.5.14) приходим к закону Кирхгофа

$$I_{0, \lambda} = \varepsilon_\lambda/\varkappa_\lambda \qquad (26.5.17)$$

для поглощающих сред. Так как плотность равновесного излучения $\eta_{0, \lambda}$ связана с яркостью или интенсивностью $I_{0, \lambda}$ соотношением

$$\eta_{0, \lambda} = 4\pi I_{0, \lambda}, \qquad (26.5.18)$$

причем

$$\eta_{0,\lambda} = 4E_{0,\lambda}, \qquad (26.5.19)$$

то из условия (26.5.17) получаем выражение плотности собственного излучения

$$\eta_{c,\lambda} = \varkappa_\lambda \eta_{0,\lambda}. \qquad (26.5.20)$$

Получить уравнение (26.5.17) оказалось возможным благодаря использованию в выводе уравнения переноса излучения гипотезы о локальном термодинамическом равновесии. Согласно этой гипотезе каждый элементарный объем среды, имеющий произвольное температурное распределение, находится в состоянии термодинамического равновесия при температуре данного элемента среды. Милн доказал, что условия локального термодинамического равновесия определяются теми эффектами столкновений, которые обусловливают процессы поглощения и излучения энергии. Таким условиям удовлетворяют поглощающие среды, имеющие достаточно высокую оптическую плотность.

Проинтегрируем интегро-дифференциальное уравнение (26.5.9) почленно скалярно в пределах телесного угла $\Omega = 4\pi$:

$$\int_{4\pi} \frac{dI_\lambda(M, S)}{dS} d\Omega = -k_\lambda(M) \int_{4\pi} I_\lambda(M, S)\, d\Omega + \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \eta_{э,\lambda}(M, S)\, d\Omega. \qquad (26.5.21)$$

В случае сферической индикатрисы рассеяния величина $\eta_{э,\lambda}(M, S) = \eta_{э,\lambda}(M)$, как функционал точки $M$ может быть вынесена из-под знака интеграла, а первый интеграл в правой части представлен, согласно формуле (25.5.19), через плотность падающего излучения. Учитывая, что

$$\int_{4\pi} \frac{dI_\lambda(M, S)}{dS} d\Omega = \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial}{\partial i} \int_{4\pi} I_\lambda(M, S) \cos(\widehat{S,i})\, d\Omega = \operatorname{div} \mathbf{E}_{4\pi,\lambda}(M), \quad (26.5.22)$$

где $x$, $y$, $z$ — система прямоугольных координат, определяющих направление $S$, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_{4\pi,\lambda}(M) = -k_\lambda(M)\,\eta_{п,\lambda}(M) + \eta_{э,л}(M). \quad (26.5.23)$$

Используя понятие плотности объемного результирующего излучения $\eta_\lambda(M)$, определяемой согласно равенству (25.5.17), получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_{4\pi,\lambda} = -\eta_\lambda. \quad (26.5.24)$$

Для интегрального излучения в пределах всего спектра

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_{4\pi} = -\eta. \quad (26.5.25)$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение сохранения энергии. В этом случае плотность объемного результирующего излучения, будучи сложным функционалом, содержит всевозможные виды энергии. Если анализируется перенос излучения в собственном смысле этого слова (излучение в соленоидальном поле), то

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_{4\pi} = \eta \equiv 0. \quad (26.5.26)$$

Интегрируя уравнение (26.5.9) для случая сферической индикатрисы рассеяния почленно векторно по телесному углу $\Omega = 4\pi$, получаем

$$\mathbf{E}_{4\pi,\lambda} = -(1/k_\lambda) \operatorname{div} \Pi_\lambda, \quad (26.5.27)$$

или для чисто поглощающей и излучающей среды ($\beta_\lambda = 0$)

$$\mathbf{E}_{4\pi,\lambda} = -(1/\varkappa_\lambda) \operatorname{div} \Pi_\lambda. \quad (26.5.28)$$

Здесь $\Pi_\lambda$ — тензор излучения (аффинный ортогональный тензор второго ранга), характеризуется следующими составляющими: $\Pi_{ij}(M) = \int_{4\pi} I(M, S) \times \cos(\widehat{S, i}) \cos(\widehat{S, j}) d\Omega$ ($i, j = x, y, z$), которые определяют нормальные ($i = j$) и касательные ($i \neq j$) напряжения в поле излучения к площадкам, нормально ориентированным к осям координат $x, y, z$, причем $\Pi_{ij} = \Pi_{ji}$ (симметричность тензора), а

$$\sum_{i=x,y,z} \Pi_{ii} = \eta_п. \quad (26.5.29)$$

Если состояние излучающей системы приближается к термодинамическому равновесию, то составляющие тензора $\Pi_\lambda$, определяющие касательные напряжения, становятся малыми. Это позволяет получить упрощенное представление для $\operatorname{div} \Pi_\lambda$:

$$\operatorname{div} \Pi_\lambda = (1/3) \operatorname{grad} \eta_{п,\lambda}. \quad (26.5.30)$$

Здесь числовой коэффициент 1/3 определяется, согласно формуле (26.5.29), приблизительно одинаковыми значениями яркости и $\eta_{п,\lambda}$ для всех направлений. Следовательно, для условий, близких к состоянию термодинамического равновесия, сферический вектор излучения имеет вид

$$\mathbf{E}_{4\pi,\lambda} = -(1/3k_\lambda) \operatorname{grad} \eta_{п,\lambda}. \quad (26.5.31)$$

В соленоидальном поле излучения для поглощающих сред ($\beta_\lambda \equiv 0$) с учетом формулы (26.5.19)

$$\mathbf{E}_{4\pi,\lambda} = (-1/3\varkappa_\lambda) \operatorname{grad} \eta_{0,\lambda} = (-4/3\varkappa_\lambda) \operatorname{grad} E_{0,\lambda}. \quad (26.5.32)$$

Для серой среды $\varkappa_\lambda = \varkappa$ и, следовательно,

$$\mathbf{E}_{4\pi} = -\lambda_P \operatorname{grad} T, \qquad (26.5.33)$$

где $\lambda_P = 16\sigma_0 T^3/3\varkappa$ — коэффициент проводимости излучения. Описанное градиентное представление для вектора излучения применимо лишь для условий, близких к равновесным. Для поглощающих сред с большими температурными градиентами выражение (26.5.31) следует рассматривать как грубую аппроксимацию интегрального уравнения (25.5.20). Степень такой аппроксимации определяется характером конфигурации излучающей системы, а также оптическими свойствами поглощающей среды. В физическом аспекте такое приближение основано на диффузном представлении переноса излучения по аналогии с теплопроводностью в газах. Такая аналогия, однако, возможна только для излучения с малой длиной свободного пробега фотона. Следовательно, приближенные решения, полученные на основе градиентного представления для вектора излучения, пригодны лишь для сильно поглощающих сред простейших конфигураций (плоскопараллельный слой).

## 26.6. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ

При исследовании теплообмена излучением в системах произвольной конфигурации необходим переход к интегральным уравнениям излучения. Полагая плотность объемного эффективного излучения $\eta_{э,\lambda}$ известной функцией точки ($\gamma_\lambda \equiv 1{,}0$), записываем решение уравнения (26.5.9) в следующем виде:

$$I_\lambda(M, S) = I_{э,\lambda}(N, S)\exp(-h_\lambda) + \frac{1}{4\pi}\int_0^r \eta_{э,\lambda}(P)\exp(-\Delta h_\lambda)\,dS; \qquad (26.6.1)$$

$$M \in V; \quad N \in F.$$

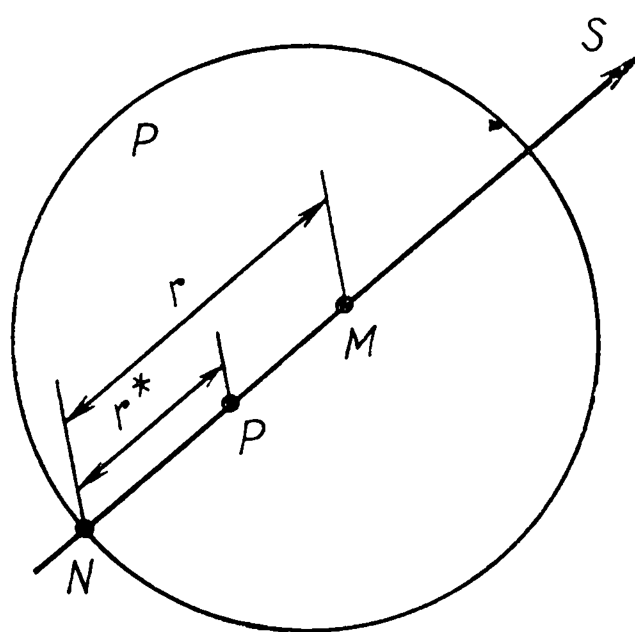



Рис. 26.9. К переносу излучения в поглощающей среде произвольной конфигурации

Здесь $h_\lambda$ и $\Delta h_\lambda$ — оптические толщины сред:

$$\left.\begin{aligned} h_\lambda &= \int_0^r k_\lambda(P)\,dS = \bar{k}_\lambda r; \\ \Delta h_\lambda &= \int_{r^*}^r k_\lambda(P)\,dS = \bar{k}_\lambda \Delta r. \end{aligned}\right\} \qquad (26.6.2)$$

Первый член справа в уравнении (26.6.1) представляет собой долю лучистой энергии, посылаемой граничной поверхностью системы за счет собственного и отраженного излучений в элементарный объем с точкой $M$. При этом ослабление излучения промежуточной средой учитывается коэффициентом лучепрозрачности $\exp(-h_\lambda)$. Второй, интегральный, член учитывает собственное и рассеянное излучение среды, приходящее в объем с точкой $M$ (рис. 26.9). Взаимное экранирование учитывается коэффициентом лучепрозрачности $\exp(-h_\lambda)$. Вывод интегральных уравнений излучения, описывающих переносы излучения в поглощающих и рассеивающих средах произвольных конфигураций, сводится к совместному рассмотрению классификации видов излучения и решения уравнения переноса энергии излучения (26.6.1). Для получения интегральных уравнений относительно плотностей полусферических излучений воспользуемся выражениями (25.5.7) и (25.5.11) соответственно для плотностей эффективного и падающего излучений и составим интегральное уравнение следующего вида:

$$E_{э,\lambda}(M) - R_\lambda(M)\int_{2\pi} I_\lambda(M, S)\cos\theta_M\,d\Omega(M, N) = E_{с,\lambda}(M). \qquad (26.6.3)$$

Для учета процессов, происходящих в поглощающей среде, подставим сюда выражение для интенсивности излучения согласно уравнению (26.6.1).

Вводя при этом обозначения:

$$\left.\begin{aligned} Q(M, N, \overline{k}_\lambda) &= \exp(-h_\lambda)\cos\theta_M \frac{d\Omega(M, N)}{\pi dF_N} = \exp(-h_\lambda)\frac{\cos\theta_M\cos\theta_N}{\pi r_{MN}^2}; \\ L(M, P, \overline{k}_\lambda) &= \exp(-\Delta h_\lambda)\cos\theta_M \frac{d\Omega(M, P)}{4\pi dF_P} = \exp(-\Delta h_\lambda)\frac{\cos\theta_M}{4\pi r_{MP}^2}, \end{aligned}\right\} \tag{26.6.4}$$

а также сворачивая двойной интеграл по поверхности $F$ и лучу $S$ в один интеграл по объему $V$ среды, с учетом диффузности излучения границ получаем:

$$\begin{gathered} E_{э,\lambda}(M) - R_\lambda(M)\int_F E_{э,\lambda}(N)\,Q(M, N, \overline{k}_\lambda)\,dF_N - \\ -R_\lambda(M)\int_V \eta_{э,\lambda}(P)\,L(M, P, \overline{k}_\lambda)\,dV_P = E_{с,\lambda}(M); \qquad (26.6.5) \\ M, N \in F; \quad P \in V. \end{gathered}$$

С помощью выражения (25.5.7) уравнение (26.6.5), записанное для нерассеивающей серой среды ($\eta_{э,к} \equiv \eta_с$), может быть преобразовано к интегральному уравнению относительно плотности падающего излучения $E_п$:

$$\begin{gathered} E_п(M) - \int_F R(N)\,E_п(N)\,Q(M, N, \varkappa)\,dF_N = \int_V \eta_с(P)\,L(M, P, \varkappa)\,dV_P + \\ + \int_F E_с(N)\,Q(M, N, \varkappa)\,dF_N. \qquad (26.6.6) \end{gathered}$$

Вывод интегральных уравнений излучения относительно плотностей потоков объемного излучения основан на совместном рассмотрении выражений (25.5.14) и (25.5.19) либо (26.5.9) (если среда рассеивает излучение произвольным образом), в которых учитывается значение $I_\lambda\,(M, S)$ согласно уравнению (26.6.1). Вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned} Q_1(M, N, \overline{k}_\lambda) &= \exp(-h_\lambda)\frac{d\Omega(M, N)}{\pi dF_N} = \exp(-h_\lambda)\frac{\cos\theta_N}{\pi r_{MN}^2}; \\ L_1(M, P, \overline{k}_\lambda) &= \exp(-\Delta h_\lambda)\frac{d\Omega(M, P)}{4\pi dF_P} = \exp(-\Delta h_\lambda)\frac{1}{4\pi r_{MP}^2} \end{aligned}\right\} \tag{26.6.7}$$

и осуществляя преобразования, аналогичные тем, которые проводились при выводе уравнения (26.6.5), применительно к изотропной среде ($\gamma_\lambda = 1$) и диффузно излучающим граничным поверхностям получаем интегральное уравнение относительно плотности сферического или объемного эффективного излучения при условии задания на границах излучающей системы значений $E_{э,\lambda}$:

$$\begin{gathered} \eta_{э,\lambda}(M) - \beta_\lambda(M)\int_F E_{э,\lambda}(N)\,Q_1(M, N, \overline{k})\,dF_N - \\ -\beta_\lambda(M)\int_V \eta_{э,\lambda}(P)\,L_1(M, P, \overline{k}_\lambda)\,dV_P = \eta_{с,\lambda}(M); \qquad (26.6.8) \\ M, P \in V; \quad N \in F. \end{gathered}$$

Воспользовавшись соотношением (25.5.14), уравнение (26.6.8) преобразуем в интегральное уравнение относительно плотности объемного падающего излучения и запишем его для случая серой поглощающей среды ($\beta \equiv 0$):

$$\begin{gathered} \eta_п(M) - \int_F R(N)\,E_п(N)\,Q_1(M, N, \overline{\varkappa})\,dF_N = \int_V \eta_с(P)\,L_1(M, P, \overline{\varkappa})\,dV_P + \\ + \int_F E_с(N)\,Q_1(M, N, \overline{\varkappa})\,dF_N. \qquad (26.6.9) \end{gathered}$$

Сопоставляя интегральное уравнение (26.6.9) с уравнением (26.6.6), отмечаем помимо наличия формальной аналогии их тесную взаимосвязь. Это свидетельствует о том, что при исследовании теплообмена излучением в замкнутых излучающих системах, заполненных поглощающей (и рассеивающей) средой с известными полями температур и оптических констант, задача сводится к рассмотрению системы двух интегральных уравнений, составленных относительно плотностей полусферического и объемного излучений.

Запишем интегральное уравнение (26.6.6) в следующем виде:

$$E_{\text{п}}(M)-\int_F R(N)\,E_{\text{п}}(N)\,Q(M,\ N,\overline{\varkappa})\,dF_N=F(M), \qquad (26.6.10)$$

где

$$F(M)=\int_V \eta_{\text{с}}(P)\,L(M,P,\overline{\varkappa})\,dV_P+\int_F E_{\text{с}}(N)\,Q(M,N,\overline{\varkappa})\,dF_N. \qquad (26.6.11)$$

Подобно (26.1.13), уравнение (26.6.10) является неоднородным интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Следуя Ю. А. Суринову, решаем его методом итераций:

$$E_{\text{п}}(M)=F(M)+\int_F R(N)\,\Gamma(M,N,\overline{\varkappa})\,F(N)\,dF_N. \qquad (26.6.12)$$

Здесь $\Gamma(M,\ N,\ \overline{\varkappa})$ — резольвента ядра $Q(M,\ N,\ \overline{\varkappa})$, определяемая с помощью соотношений вида (26.1.15) или (26.1.22), в которых экранирующий эффект среды учитывается в соответствии с определением $Q(M,\ N,\ \overline{\varkappa})$ согласно уравнению (26.6.4).

Подставляя $F(M)$ в уравнение (26.6.12) и преобразовывая его, получаем решение для $E_{\text{п}}(M)$ в следующем виде:

$$E_{\text{п}}(M)=\int_F \Gamma(M,N,\overline{\varkappa})\,E_{\text{с}}(N)\,dF_N+\int_V Z(M,P,\overline{\varkappa})\,\eta_{\text{с}}(P)\,dV_P, \qquad (26.6.13)$$

где

$$Z(M,\ P,\overline{\varkappa})=L(M,P,\overline{\varkappa})+\int_F R(N)\,\Gamma(M,N,\overline{\varkappa})\,L(N,P,\overline{\varkappa})\,dF_P; \qquad (26.6.14)$$

$$M,N\in F;\quad P\in V.$$

Решается интегральное уравнение (26.6.9) элементарно, так как в данном случае совместное рассмотрение интегральных уравнений для полусферических и объемных излучений сводится к простой подстановке в уравнение (26.6.9) решения для $E_{\text{п}}$. В результате такой подстановки получаем

$$\eta_{\text{п}}(M)=\int_V Z_1(M,P,\overline{\varkappa})\,\eta_{\text{с}}(P)\,dV_P+\int_F \Gamma_1(M,N,\overline{\varkappa})\,E_{\text{с}}(N)\,dF_N; \qquad (26.6.15)$$

$$M,P\in V;\quad N\in F,$$

где

$$Z_1(M,P,\overline{\varkappa})=L_1(M,P,\overline{\varkappa})+\int_F R(N)\,Q_1(M,N,\overline{\varkappa})\,Z(N,P,\overline{\varkappa})\,dF_N; \qquad (26.6.16)$$

$$\Gamma_1(M,N,\overline{\varkappa})=Q_1(M,N,\overline{\varkappa})+\int_F R(P)\,Q_1(M,P,\overline{\varkappa})\,\Gamma(P,\ N,\overline{\varkappa})\,dF_P. \qquad (26.6.17)$$

Воспользовавшись выражениями (25.5.8) и (25.5.15), связывающими результирующие и падающие излучения, и подставляя в них значения $E_{п}$ и $\eta_{п}$ из уравнений (26.6.13) и (26.6.15), получаем соответственно:

$$E(M) = A(M) \int_F \Gamma(M, N, \bar{\varkappa}) E_с(N)\, dF_N + A(M) \int_V Z(M, P, \bar{\varkappa}) \eta_с(P)\, dV_P - E_с(M); \tag{26.6.18}$$

$$M, N \in F; \quad N \in V;$$

$$\eta(M) = -\operatorname{div} \mathbf{E}_{4\pi}(M) = \varkappa(M) \int_F \Gamma_1(M, N, \bar{\varkappa}) E_с(N)\, dF_N +$$

$$+ \varkappa(M) \int_V Z_1(M, P, \bar{\varkappa}) \eta_с(P)\, dV_P - \eta_с(M); \tag{26.6.19}$$

$$M, P \in V; \quad N \in F.$$

Полученные результаты составляют главное содержание теории теплового переноса излучением. В случае соленоидального поля излучения результирующий перенос тепла тождественно равен нулю. В общем случае, когда помимо излучения в теплообмене участвуют и другие виды переноса тепла (теплопроводность, конвекция и др.), под результирующим потоком следует понимать суммарное значение энергии в рассматриваемой точке среды. Такие процессы описываются нелинейным интегро-дифференциальным уравнением энергии, решение которого для конкретных приложений представляет большие трудности математического характера. Поэтому широкое распространение получили приближенные методы, связанные обычно с приближенными представлениями уравнений переноса энергии (дифференциальные методы) или интегральных уравнений излучения (зональный метод). При этом особое внимание приходится уделять оптическим свойствам сред.

## 26.7. ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОГЛОЩАЮЩИХ СРЕД

В связи с объемным характером теплообмена излучением в поглощающих средах оптические свойства последних оказываются тесно связанными с процессами переноса тепла излучением. Это в значительной степени должно определять специфику методов исследования оптических характеристик ослабляющих сред. В их основу может быть положено уравнение переноса энергии (26.5.9), описывающее изменение интенсивности излучения. Эти соображения, однако, ввиду больших методических трудностей используются в исследованиях далеко не полностью. Поглощательная способность обычно определяется по относительному изменению интенсивности излучения:

$$A_\lambda = (I_\lambda^0 - I_\lambda)/I_\lambda^0, \tag{26.7.1}$$

где $I_\lambda^0$ и $I_\lambda$ — соответственно интенсивности входящего в слой и пропущенного им излучений.

Используя закон Бугера (26.5.13) и (26.7.1), определяем поглощательную способность слоя среды толщиною $l$:

$$A_\lambda = 1 - I_\lambda/I_\lambda^0 = 1 - \exp\left(-\int_0^l \varkappa_\lambda\, dS\right), \tag{26.7.2}$$

или, введя понятие оптической толщины (плотности) слоя

$$h_\lambda = \int_0^l \varkappa_\lambda\, dS, \tag{26.7.3}$$

получим

$$A_\lambda = 1 - \exp(-h_\lambda). \tag{26.7.4}$$

В однородной среде с постоянным коэффициентом поглощения по длине луча в пределах слоя $l$

$$A_\lambda = 1 - \exp(-\varkappa_\lambda l). \qquad (26.7.5)$$

Аналогичным образом эта формула записывается и для серой среды. Величину безразмерной оптической толщины среды $h_\lambda = \varkappa_\lambda l$ иногда называют критерием Бугера. Из уравнения (26.7.5) среднее значение монохроматического коэффициента поглощения определяется как

$$\bar{\varkappa}_\lambda = (1/l)\ln(1 - A_\lambda) = (1/l)\ln(I_\lambda/I_\lambda^0). \qquad (26.7.6)$$

Такое сравнительно простое определение коэффициента поглощения объясняется моделью взаимодействия излучения со средой, которая здесь используется. Как известно, поглощение излучения связано с его взаимодействием с частицами (молекулами) тела. Последние в период между столкновениями практически не взаимодействуют друг с другом, и их взаимодействие с излучением является «индивидуальным». В таком случае степень поглощения излучения должна быть прямо пропорциональной количеству частиц (молекул) тела, находящихся на его пути (гипотеза Бера). Эта гипотеза хорошо подтверждается в средах с малыми концентрациями поглощающего вещества. С ростом концентрации увеличивается вероятность взаимодействий между частицами (молекулами) поглощающего вещества, что ведет к заметным отклонениям от гипотезы Бера. Если рассмотренная излучающая система (слой) находится в состоянии радиационного равновесия, то, очевидно, на основании закона Кирхгофа спектральная излучательная способность (степень черноты) слоя в произвольном направлении равна его спектральной поглощательной способности в том же направлении:

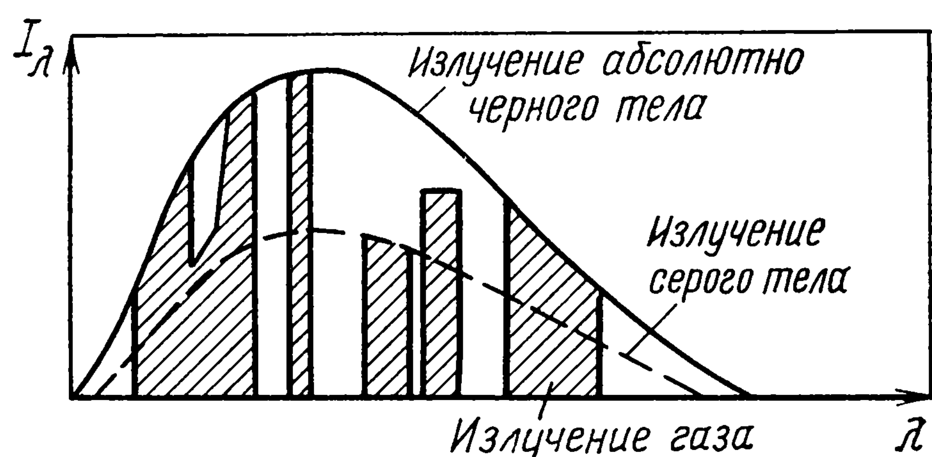



Рис. 26.10. Спектр излучения газа

$$\varepsilon_\lambda = A_\lambda = 1 - \exp(\varkappa_\lambda l). \qquad (26.7.7)$$

Значение коэффициента поглощения в этом случае следует брать при температуре излучения.

Кратко остановимся на анализе оптических свойств некоторых наиболее характерных сред. Испускание и поглощение излучения чистыми газами имеют четко выраженный избирательный, селективный, характер, т. е. их спектр является линейчатым (рис. 26.10).

Появление полос излучения (поглощения) в спектрах газов связано с теми изменениями в состоянии молекул и атомов (переход электронов с одного уровня на другой, квантовые изменения колебательных и вращательных движений атомов, молекул и пр.), которые вызваны их взаимодействием с электромагнитными волнами излучения. Газы обладают высокой степенью проницаемости. Значение коэффициента ослабления луча в двухатомных газах, в частности в азоте, кислороде и водороде, настолько мало, что практически эти газы полностью проницаемы для теплового излучения.

Трехатомные газы имеют более высокую поглощательную способность. Наибольшее практическое значение в теплотехнических приложениях имеют такие трехатомные газы, как углекислый газ и водяной пар. Для каждого из них можно выделить по три наиболее важных с энергетической точки зрения полосы. Граница этих полос приводится в табл. 26.1.

Полное излучение газа слагается из излучения его полос, т. е.

$$E_\text{г} = \sum \int\limits_{\lambda_{1,i}}^{\lambda_{2,i}} E_\lambda \, d\lambda \, (1 \leqslant i \leqslant n), \qquad (26.7.8)$$

где $i$ — номер полосы спектра.

Таблица 26.1

**Основные полосы спектров поглощения углекислого газа и водяного пара ($\lambda$, мкм)**

| $CO_2$ | | | $H_2O$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\Delta\lambda$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\Delta\lambda$ |
| 2,65 | 2,8 | 0,15 | 2,3 | 3,4 | 1,1 |
| 4,15 | 4,45 | 0,30 | 4,4 | 8,5 | 4,1 |
| 13 | 17 | 4,0 | 12 | 30 | 18 |

Обработка экспериментальных данных по формуле (26.7.8) показывает, что излучение газов не подчиняется закону излучения черного и серого тел и различно для разных веществ. Так, полная энергия излучения $CO_2$ пропорциональна абсолютной температуре в степени $\sim$3,5, а энергия излучения водяного пара пропорциональна примерно кубу абсолютной температуры. В практических расчетах условно принимают, что излучение газов, так же как излучение твердых тел, пропорционально четвертой степени их абсолютной температуры.

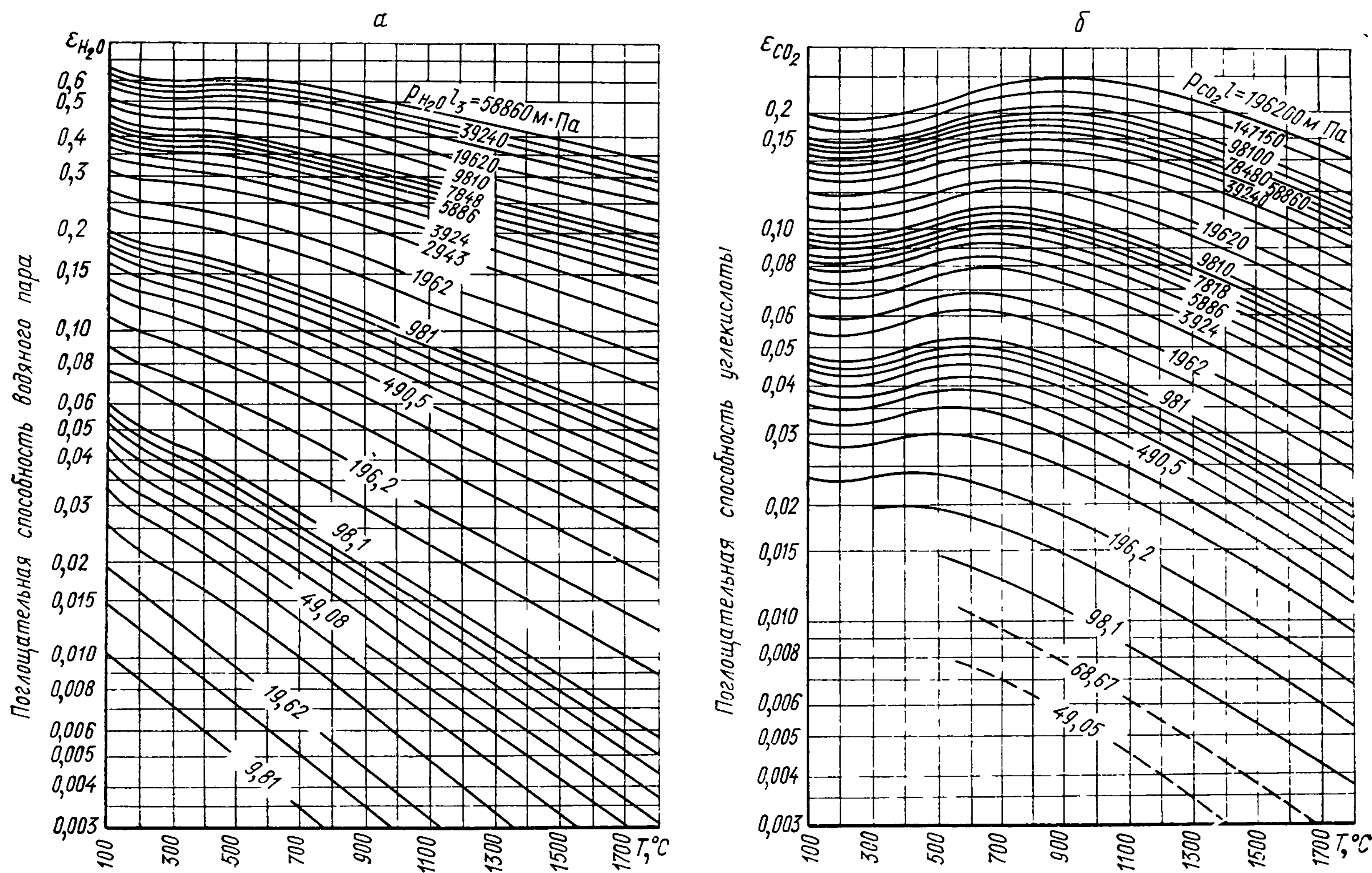



Рис. 26.11. Графики для определения степени черноты $H_2O$ (*а*) и $CO_2$ (*б*)

Ослабление излучения в газовой среде зависит от рода газа, температуры и числа молекул, находящихся на их пути. Согласно гипотезе Бера, степень поглощения излучения определяется парциальным давлением $p_i$ и толщиной $l$ слоя газов:

$$A_\lambda = \varepsilon_\lambda = 1 - \exp(-b_{\lambda,i}\, p_i l), \tag{26.7.9}$$

где

$$b_\lambda = f(T).$$

Таким образом, степень черноты газов определяется как функция от температуры и произведения $pl$, характеризующего эффективность ослабления:

$$\varepsilon_{г,\,i} = f(T,\, p_i l). \tag{26.7.10}$$

На рис. 26.11 даны графики степени черноты различных изотермических слоев $CO_2$ и $H_2O$, соответствующие экспериментальным измерениям Хоттеля. Излучение водяного пара при постоянном $p_{H_2O}\, l$ оказывается зависящим также от $p_{H_2O}$, что свидетельствует об отклонении от гипотезы Бера. Поэтому при определении степени черноты водяного пара вводится поправка $\beta$, определяе-

мая для заданного значения $p_{H_2O}\,l$ в зависимости от парциального давления $p_{H_2O}$ (рис. 26.12). Суммарное излучение смеси газов в общем случае не равно сумме излучений компонентов смеси, взятых порознь. Так, степень черноты смеси углекислого газа и водяного пара меньше суммы их собственных степеней черноты. Это явление связано с частичным взаимным поглощением излучения в области длин волн, в которых полосы спектров $CO_2$ и $H_2O$ перекрывают друг друга. Поправка $\Delta\varepsilon$, на которую надо уменьшить сумму степеней черноты $CO_2$ и $H_2O$ в их смеси, дана на рис. 26.13.

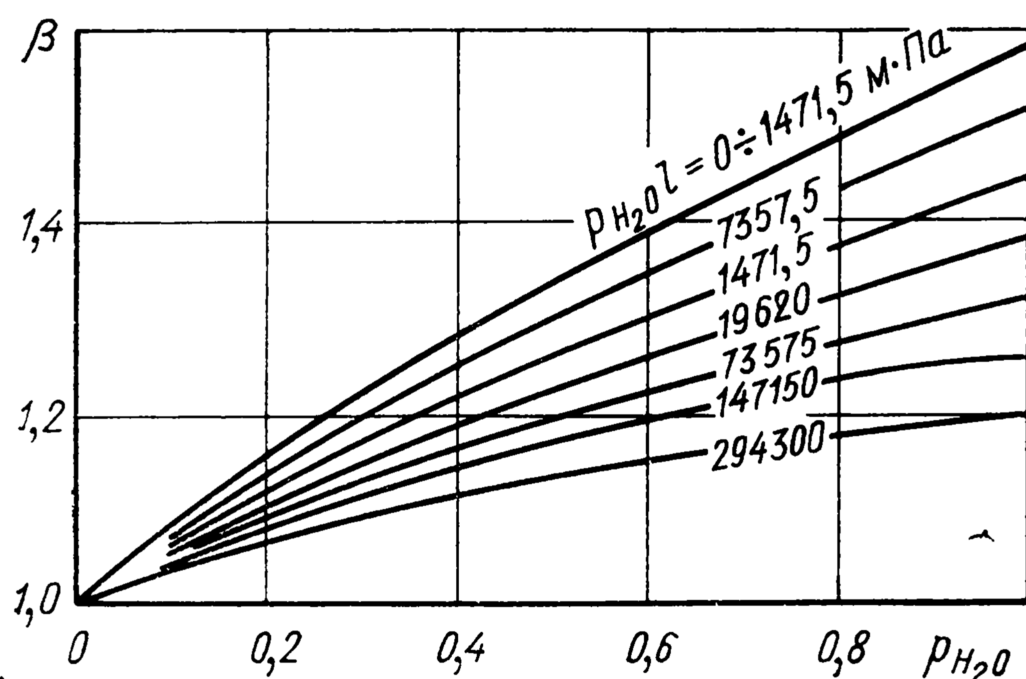



Рис. 26.12 Поправка на парциальное давление водяных паров (общее давление $p=98\cdot10^3$ Па)

А. М. Гурвич и В. В. Митор показали, что расчет суммарной поглощательной способности (степени черноты) трехатомных газов $CO_2$ и $H_2O$ можно производить с достаточной точностью по экспоненциальной зависимости

$$\varepsilon_г = 1 - \exp(-k_г\, p_г\, l_г). \qquad (26.7.11)$$

Здесь $p_г = p_{CO_2} + p_{H_2O}$ — суммарное парциальное давление углекислоты и водяных паров; $k_г$ — коэффициент ослабления лучей дымовыми газами, определяемый эмпирическим соотношением

$$k_г = \frac{0{,}8 + 1{,}6 p_{H_2O}}{\sqrt{p_г l}}\,(1 - 0{,}38\cdot10^{-3}\,T_г). \qquad (26.7.12)$$

В приведенных выше формулах везде предполагается, что длина луча $l$ во всех направлениях одна и та же (газовая полусфера с излучателем в центре ее основания). Для излучающих объемов газа произвольной формы следует ввести понятие эффективной длины луча $l_э$ или эквивалентной толщины слоя излучающей среды.

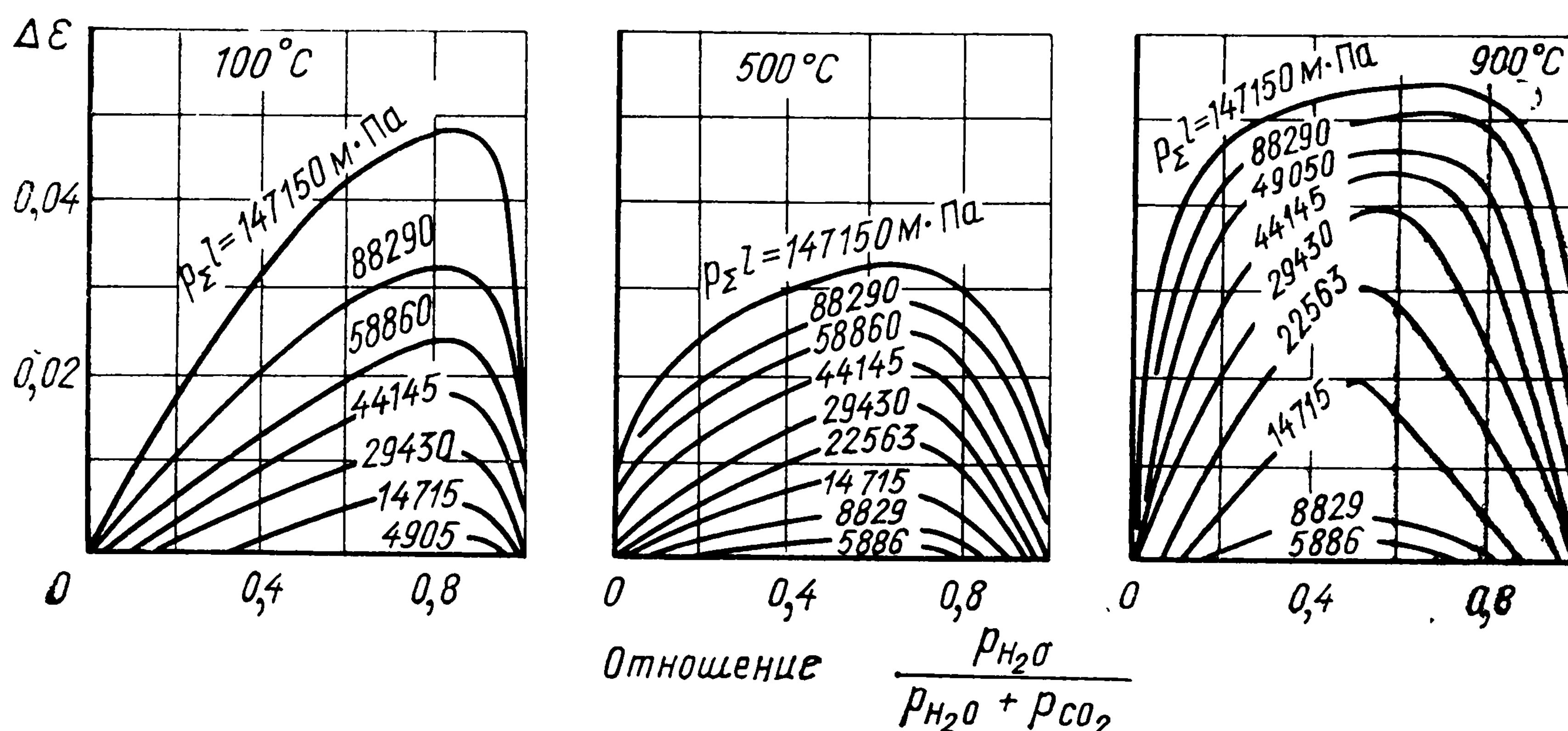



Рис. 26.13. Поправка $\Delta\varepsilon$ к излучению смеси $H_2O$ и $CO_2$

Если излучающий газ, занимающий объем $V$ с граничной поверхностью $F$, находится в состоянии термодинамического равновесия, то нетрудно показать, что эффективная длина луча при малой оптической толщине среды имеет физический смысл средней длины пути пробега фотона (или молекулы в разреженном газе) до поверхности $F$. При этом

$$l_э = 4V/F. \qquad (26.7.13)$$

Влияние оптической толщины газа на $l_э$ учитывается поправочным коэффициентом $m \approx 0,9$:

$$l_э = m4V/F. \qquad (26.7.14)$$

Более точные значения $l_э$ могут быть найдены путем интегрирования длины хода луча по всем направлениям (обычно выполняемого графически).

Во многих случаях наряду с излучением трехатомных газов следует учитывать также собственное излучение взвешенных в газовом потоке твердых частиц. Размеры частиц, содержащихся в таких потоках, обычно значительно превышают длину волны излучения. Так, размеры частиц золы и угольной пыли в дымовых газах в среднем составляют 5—100 мкм. Поглощательная (излучательная) способность запыленных потоков, образованных твердыми частицами, взвешенными в полупрозрачном газе, определяется в условиях заданных температур и толщин слоя концентрацией, размерами и физическими свойствами самих частиц:

$$A_п = 1 - \exp(-k_п \mu F l). \qquad (26.7.15)$$

Здесь $k_п$ — интегральный коэффициент ослабления лучей частицами; $F$ — средняя удельная поверхность пыли, м$^2$/г; $\mu$ — концентрация пыли, г/м$^3$. Произведение $k_п F$ называется интегральным эффективным сечением ослабления. По данным А. М. Гурвича, А. Г. Блоха и А. И. Носовицкого, эффективное сечение ослабления излучения определяется как

$$k_п F = \frac{0,42\,B}{\rho} \sqrt{\frac{T}{d^2}}, \qquad (26.7.16)$$

где $T$ — температура потока, К; $d$ — средний диаметр частиц, мкм; $\rho$ — удельная плотность пыли, г/см$^2$; $B$ — коэффициент, зависящий от рода топлива.

Зависимость экспериментального коэффициента $B$ от рода топлива вызвана различиями в электролитических свойствах веществ и геометрических характеристиках пылевых частиц топлива (табл. 26.2).

Таблица 26.2

**Значение коэффициента $B$ для различных топлив**

| Род топлива | Численное значение коэффициента $B$ | Род топлива | Численное значение коэффициента $B$ |
|---|---|---|---|
| Зола печорского угля | 0,25—0,20 | Зола антрацитового штыба | 0,08 |
| Зола подмосковного бурого и донецкого газового углей, зола эстонского сланца | 0,15 | Угольная пыльца различных твердых топлив | 0,15—0,10 |

Определение эффективных сечений ослабления $k_п F$ и соответственно коэффициентов поглощения $A_п$ для золовой пыли может быть проведено по номограмме (рис. 26.14). Если запыленными являются непрозрачные для излучения трехатомные газы, то коэффициент ослабления такой среды складывается из ослабления трехатомными газами ($CO_2$ и $H_2O$) и взвешенными в них твердыми частицами. Суммарная поглощательная способность такого слоя определяется по формуле

$$A_{г+п} = 1 - \exp[-(k_г p_\Sigma + k_п F_\mu) l]. \qquad (26.7.17)$$

Эффективное сечение ослабления излучения при встречающихся в котельной практике условиях сгорания пылевидного топлива определяется по формуле

$$k_п F = 7\sqrt{1/(T^2 d^2)}, \qquad (26.7.18)$$

где $d$ — средний диаметр золовых частиц (зависит от рода топлива, размола и способа сжигания).

В пламени наряду с излучением трехатомных газов имеет место излучение находящихся в нем частиц топлива и золы (диаметром до 300 мкм) и сажи (диаметром 0,03—0,5 мкм). Вопросами излучения сажи занимались Шак, Саке, Яги, Пепперхофф и др. Установлено, что спектральный коэффициент поглощения слоя, заполненного частицами сажи, зависит от концентрации этих частиц и длины волны излучения. Коэффициент ослабления излучения в такой среде обычно представляется степенной зависимостью

$$k_\lambda = \mathrm{const}/\lambda^n. \quad (26.7.19)$$

Показатель степени $n$ зависит от вида пламени. По данным Саке, Яги, $n = 0,3$. Большинство других авторов дают для светящихся пламен $n > 0,9$. Как видно, коэффициент ослабления излучения сажистыми частицами умень-

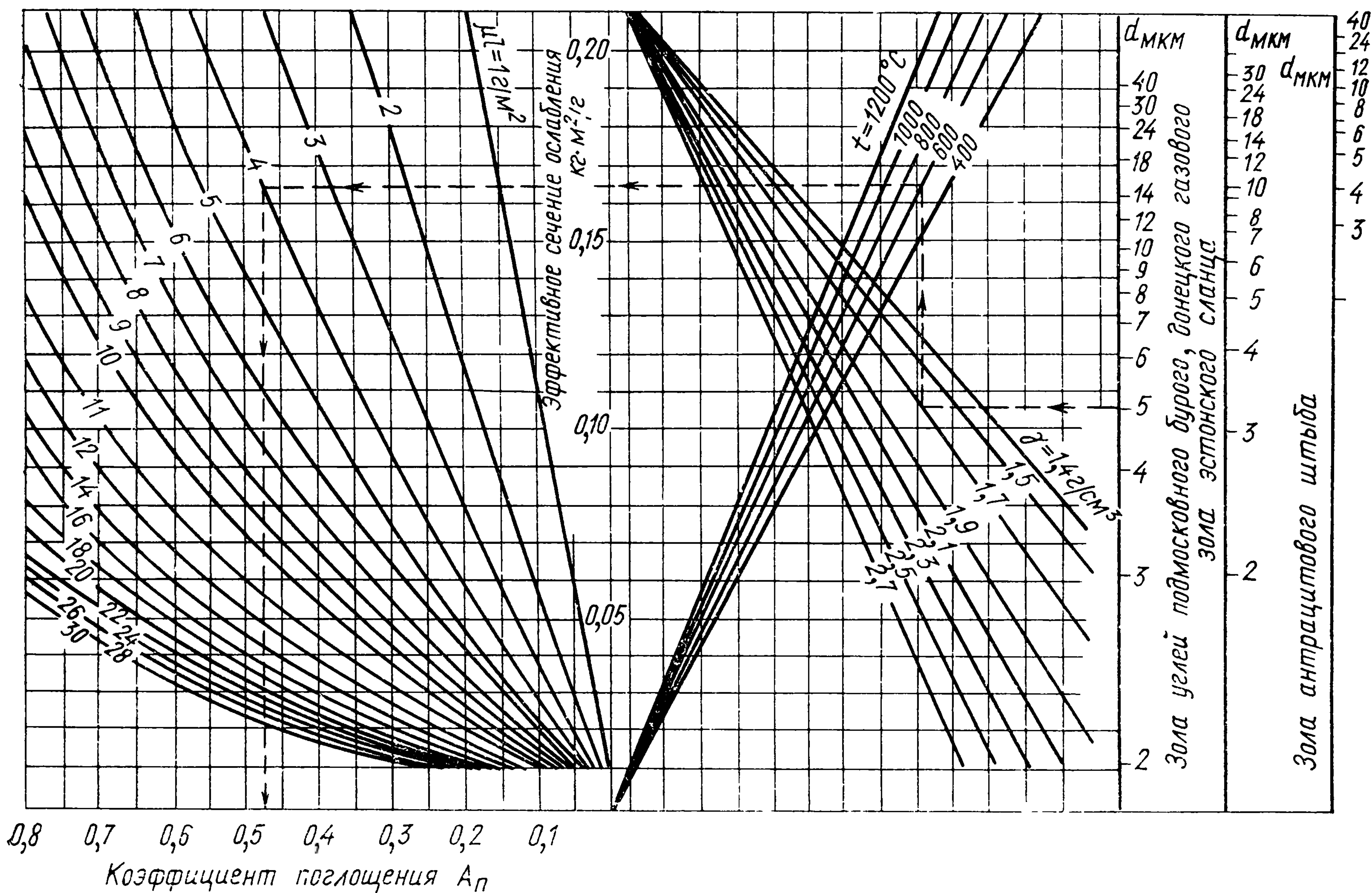



Рис 26.14. Номограмма для определения эффективного сечения ослабления луча ($k_п F$) золовой пылью

шается с ростом длины волны. Поэтому селективность поглощения излучения сажистым пламенем нарастает с увеличением $\lambda$. Когда длина волны становится соизмеримой с размерами частиц, последние огибаются волной, т. е. в области длинных волн (среднее и далекое инфракрасное излучение) сажистое пламя почти прозрачно для теплового излучения.

Так как размеры частиц дробленого топлива и золы весьма значительны, то поглощение излучения пламенем, содержащим такие частицы, мало отличается от серого поглощения. Для условий сажеобразования, характерных для топок, работающих на жидком топливе, возможен приближенный расчет коэффициента ослабления, А. М. Гурвич, В. В. Митор и В. Д. Терентьев показали, что интегральный коэффициент ослабления в этих условиях зависит только от температуры пламени:

$$k = 1,6 \cdot 10^{-3}\, T - 0,5. \quad (26.7.20)$$

Несмотря на отчетливо выраженную выше зависимость оптических характеристик поглощающих сред от длины волны, при расчете теплообмена излучением широко используется гипотеза о серости вещества среды. Однако даже в тех случаях, когда это предположение является достаточно условным, его ис-

пользование оказывается оправданным теми сложностями, с которыми приходится сталкиваться в исследованиях переноса тепла излучением (излучение в условиях комбинированного переноса тепла, сложной конфигурации границ и пр.).

## 26.8. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛ В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ (ЗОНАЛЬНЫЙ МЕТОД)

Пусть замкнутая излучающая система, заполненная поглощающей средой, состоит из $n$ граничных и $m$ объемных однородных и изотермических серых тел (рис. 26.15). Решение для плотности полусферического падающего излучения в таком случае легко преобразуется (умножением на $dF_{N_k}$, интегрированием в пределах $F_k$ и делением на площадь зоны $F_k$ всех членов уравнения (26.6.13)) в систему интегральных уравнений следующего вида ($1 \leqslant k \leqslant n$; $1 \leqslant j \leqslant m$):

$$E_{\text{п}}(M_i) = \Sigma E_{\text{с},k}\, \Psi(M_i,\ F_k) + \Sigma \eta_{\text{с},j}\, \chi(M_i, V_j). \tag{26.8.1}$$

Здесь $\Psi(M_i,\ F_k)$ и $\chi(M_i,\ V_j)$ — локальные разрешающие угловые коэффициенты излучения между элементом поверхности $i$-й зоны в точке $M_i$ и соответственно граничной $k$-й и объемной $j$-й зонами:

$$\left.\begin{aligned} \Psi(M_i, F_k) &= \int\limits_{F_k} \Gamma(M_i, N_k, \bar{\varkappa})\, dF_{N_k};\\ \chi(M_i, V_j) &= \int\limits_{V_j} Z(M_i, P_j, \bar{\varkappa})\, dV_j. \end{aligned}\right\} \tag{26.8.2}$$

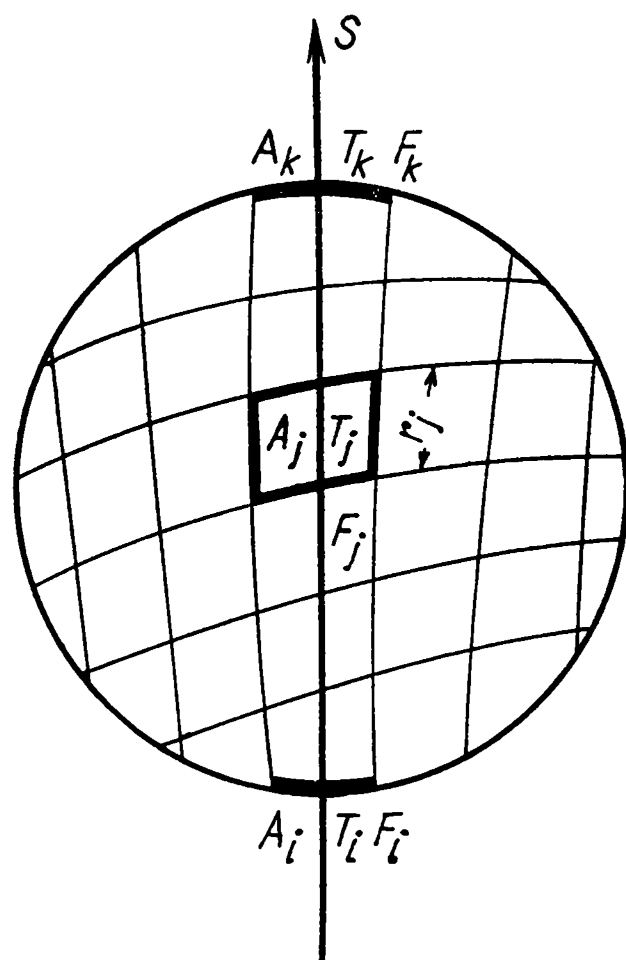



Рис. 26.15. К зональному методу расчета теплообмена в поглощающих средах

При таком рассмотрении объемные зоны среды воспринимают локальный пучок направленного излучения своей внешней поверхностью (сечением ослабления зоны $F_j$) (см. рис. 26.15). Поглощательная способность (степень черноты) каждой объемной изотермической зоны $j$ определяется как

$$A_j = 1 - \exp(-\varkappa_j Z_j). \tag{26.8.3}$$

Это позволяет представить объемную зону с поглощательной способностью $A_j$ как бы граничной. Принимая это во внимание, а также учитывая, что $\eta_{\text{с},\,j} = 4\varkappa_j E_{0,\,j}$, записываем уравнение (26.8.1) в следующем виде ($1 \leqslant k \leqslant n+m$):

$$E_{\text{п}}(M_i) = \Sigma E_{\text{с},k}\, \Psi(M_i, F_k), \tag{26.8.4}$$

где $\Psi(M_i,\ F_k)$ — локальный разрешающий угловой коэффициент излучения, учитывающий промежуточную поглощающую среду и многократные отражения на границе. Определяется он с помощью системы интегральных уравнений следующего вида ($1 \leqslant j \leqslant n$):

$$\Psi(M_i, F_k) = \psi(M_i, F_k) + \Sigma R_j \int\limits_{F_j} \Gamma(M_i, P_j, \bar{\varkappa})\, \psi(P_j, F_k) dF_{P_j} \quad (i = 1, 2, \ldots, n+m), \tag{26.8.5}$$

где $\psi(M_i,\ F_k)$ — локальный угловой коэффициент излучения с учетом поглощающей среды:

$$\psi(M_i, F_k) = \int\limits_{F_k} Q\ (M_i, N_k, \bar{\varkappa})\, dF_{N_k} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{F_k} \exp(-\Delta h)\frac{\cos\theta_{M_i}\cos\theta_{N_k}}{r^2_{M_i,\,N_k}} dF_{N_k}. \tag{26.8.6}$$

Умножив обе части уравнения (26.8.4) на $dF_{M_i}$, а затем проинтегрировав по области $F_i$, найдем значение плотности полусферического излучения, падающего на $i$-ю зону:

$$E_{п,i}=\Sigma\Psi_{ik}E_{с,k}\quad(i=1,2,\dots n+m;\ 1\leqslant k\leqslant n+m). \tag{26.8.7}$$

$\Psi_{ik}$ — средний разрешающий угловой коэффициент излучения между зонами $i$ и $k$ с учетом поглощения в промежуточных зонах — определяется путем очевидных интегральных преобразований с уравнением (26.8.5). Если излучающая система удовлетворяет условию

$$\psi(M_i, F_k)=\psi_{ik}, \tag{26.8.8}$$

то уравнение (26.8.5) вырождается в систему алгебраических уравнений

$$\Psi_{ik}=\psi_{ik}+\Sigma R_j\Psi_{ij}\psi_{jk}\quad(i,k=1,2,\dots,n+m;\ 1\leqslant j\leqslant n), \tag{26.8.9}$$

аналогичную по форме уравнению (26.2.8) в случае, если среда диатермическая. Здесь $\psi_{ik}$ — средний угловой коэффициент излучения с учетом поглощающей среды между $i$-й и $k$-й изотермическими зонами — определяется по формуле

$$\psi_{ik}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{F_i}\int\limits_{F_k}\exp(-\Delta h)\,\frac{\cos\theta_{M_i}\cos\theta_{N_k}}{r^2_{M_i N_k}}\,dF_{N_k}\,dF_{M_i}. \tag{26.8.10}$$

Из выражения для плотности результирующего излучения $E=AE_п-E_с$ получим с помощью (26.8.7)

$$E_i=A_i\Sigma\Psi_{ik}E_{с,k}-E_{с,i}\quad(1\leqslant k\leqslant n+m). \tag{26.8.11}$$

Используя уравнение замкнутости, которое на основании выражения (26.8.7), анализируемого в равновесном состоянии ($E_п=E_0$), имеет вид

$$\Sigma A_k\Psi_{ik}=1\quad(1\leqslant k\leqslant n+m;\ i=1,2,\dots,n+m), \tag{26.8.12}$$

выражение (26.8.11) записываем в следующем, более компактном виде:

$$E_i=A_i\Sigma A_k\Psi_{ik}E_{ki}=A_i\sigma_0\Sigma A_k\Psi_{ik}(T_k^4-T_i^4)\quad(1\leqslant k\leqslant n+m). \tag{26.8.13}$$

Приведенные результаты составляют главное содержание зонального метода расчета теплообмена излучением в поглощающих средах, разработанного Ю. А. Суриновым. Основная идея этого метода, как уже указывалось ранее, заложена в соответствующих аппроксимациях интегральных уравнений излучения, впервые использованных в работах школы советских ученых (О. Е. Власов, А. М. Титов, Г. Л. Поляк, А. С. Невский и др.).

Степень точности расчета зональным методом, определяемая способом аппроксимации интегральных выражений, зависит от числа выделенных зон. С ростом числа зон, очевидно, точность расчетов увеличивается. Дискретное рассмотрение излучающей системы неотделимо от вопросов усреднения параметров в пределах зон и оценок оптимальной погрешности выбранного позонного разбиения. Обычно зональные методы используются в приближенных расчетах теплообмена излучением, когда число выделенных изотермических зон не превышает пяти. Однако даже такое грубое дискретное рассмотрение в ряде случаев оказывается весьма эффективным. Особую ценность приобретают зональные методы при исследовании сложного комбинированного теплообмена в системах лучеобменивающихся тел произвольных конфигураций.

## 26.9. ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ СЛОЕ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЫ

В ряде практически важных случаев представляется возможным воспользоваться результатами строгих аналитических подходов, изложенных выше. Проиллюстрируем это на примере переноса излучения в плоском слое поглощающей среды.

Подобная постановка задачи является фундаментальной в широком классе задач, посвященных проблемам переноса. Рассмотрим перенос тепла в плос-

ком слое серой поглощающей среды, образованном плоскопараллельными диффузно излучающими и отражающими поверхностями. Задача сводится к определению плотности результирующего теплового потока по заданному температурному распределению и температурного распределения в слое по заданным значениям плотности объемного результирующего излучения и температур граничных поверхностей. Для этого воспользуемся уравнениями (26.6.18) и (26.6.19).

Преобразуем указанные интегральные уравнения применительно к рассматриваемым условиям. Эти преобразования сводятся к элементарному учету геометрических особенностей излучающей системы (рис. 26.16). В частности, принимаем во внимание невогнутость поверхностей $F_1$ и $F_2$, составляющих общую поверхность $F$, в связи с чем при анализе соответствующих разрешающих угловых коэффициентов излучения полагаем $Q(P_1, N_1, \varkappa) = Q(P_2, N_2, \varkappa) = 0$. (Здесь $P_1$, $P_2$ — промежуточные точки отражения по поверхностям $F_1$ и $F_2$ соответственно.) Кроме того, принимаем во внимание, что отражающими являются лишь граничные, образующие замкнутую систему поверхности.

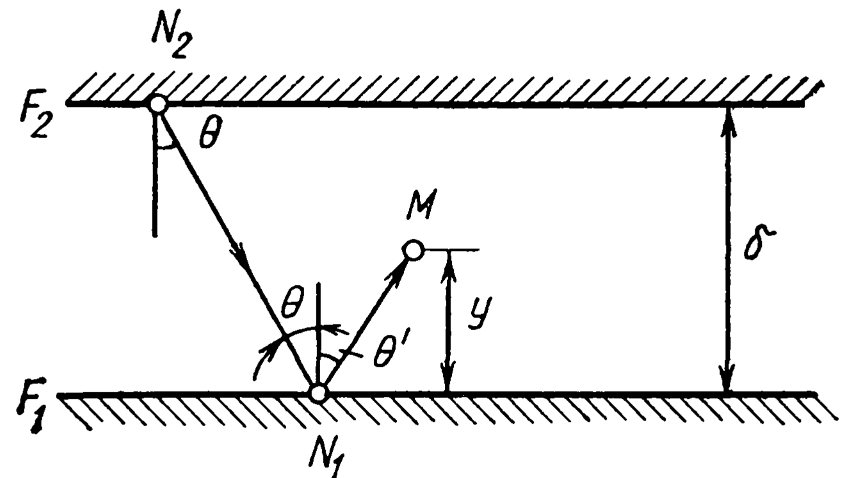


Рис. 26.16. Схема плоского слоя серой поглощающей среды

Воспользовавшись выражениями (26.6.16) и (26.6.17), Н. А. Рубцов показал, что интегральные члены уравнения (26.6.19) могут быть представлены в явном виде с помощью элементарных оптико-геометрических параметров, определяемых согласно уравнениям (26.6.4) и (26.6.7) и преобразуемых с использованием так называемого экспоненциального интеграла $K_п(x)$, весьма характерного для описания переносов произвольной субстанции:

$$K_п(x) = \int_0^1 \exp(-\varkappa/\mu)\, \mu^{n-1}\, d\mu/\mu. \tag{26.9.1}$$

Воспользовавшись понятиями оптической глубины $h$ и толщины $h_0$ слоя

$$h = \int_0^y \varkappa(\xi)\, d\xi; \quad h_0 = \int_0^\delta \varkappa(\xi)\, d\xi, \tag{26.9.2}$$

после ряда несложных преобразований уравнение (26.6.19) можно записать применительно к случаю, когда $F_1$ и $F_2$ являются оптически однородными изотермическими зонами, следующим образом:

$$\eta(h) = \partial E(h)/\partial h = 4E_0(h) - 2A_1(h)E_{0,1} - 2A_2'(h)E_{0,2} - 2\int_0^{h_0} E_0(\xi)\, Z(h, \xi)\, d\xi. \tag{26.9.3}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} A_1'(h) &= (A_1/D_{12})[K_2(h) + 2R_2 K_3(h_0)\cdot K_2(h_0 - h)];\\ A_2'(h) &= (A_2/D_{12})[K_2(h_0 - h) + 2R_1 K_3(h_0) K_2(h)]; \end{aligned}\right\} \tag{26.9.4}$$

$$Z(h, \xi) = K_1|(h-\xi)| + 2A_1'(h)(R_1/A_1)K_2(\xi) + 2A_2'(h)(R_2/A_2)K_2(h-\xi); \tag{26.9.5}$$

$$D_{12} = 1 - 4R_1 R_2 K_3^2(h_0). \tag{26.9.6}$$

Очевидно, выражение для плотности полусферического результирующего излучения $E(h)$ может быть получено из уравнения (26.9.3) путем его почленного интегрирования по $h$:

$$E(h) = 2A_1(h)E_{0,1} - 2A_2(h)E_{0,2} + 2\int_0^h E_0(\xi)\psi(h, \xi)\, d\xi - 2\int_h^{h_0} E_0(\xi)\, \psi(\xi, h)\, d\xi. \tag{26.9.7}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} A_1(h) &= (A_1/D_{12})\,[K_3(h) - 2R_2 K_3(h_0)\, K_3(h_0 - h)];\\ A_2(h) &= (A_2/D_{12})\,[K_3(h_0 - h) - 2R_1 K_3(h_0)\, K_3(h)];\end{aligned}\right\} \quad (26.9.8)$$

$$\psi(h, \xi) = K_2(h-\xi) + 2A_1(h)\,(R_1/A_1)\,K_2(\xi) - 2A_2(h)\,(R_2/A_2)\,K_2(h_0 - \xi); \quad (26.9.9)$$

$$\psi(\xi, h) = K_2(\xi - h) - 2A_1(h)\,(R_1/A_1)\,K_2(\xi) + 2A_2(h)\,(R_2/A_2)\,K_2(h_0 - \xi). \quad (26.9.10)$$

Если излучающая система находится в состоянии термодинамического равновесия, то уравнения (26.9.3) и (26.9.7) вырождаются соответственно в интегральные уравнения замкнутости:

$$\left.\begin{aligned} &A_1(h) - A_2(h) + \int_0^h \psi(h, \xi)\, d\xi - \int_h^{h_0} \psi(\xi, h)\, d\xi = 0;\\ &A_1'(h) + A_2'(h) + \int_0^{h_0} Z(h, \xi)\, d\xi = 2.\end{aligned}\right\} \quad (26.9.11)$$

Воспользовавшись уравнениями (26.9.11), представим интегральные уравнения (26.9.7) и (26.9.3) в безразмерном виде:

$$\tilde{\tilde{E}} = 2A_2(h) - 2\int_0^h \psi(h, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi + 2\int_h^{h_0} \psi(\xi, h)\, \varphi(\xi)\, d\xi; \quad (26.9.12)$$

$$\partial \tilde{\tilde{E}}(h)/\partial h = 4\varphi(h) - 2A_2'(h) - 2\int_0^{h_0} Z(h, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \quad (26.9.13)$$

где

$$\tilde{\tilde{E}}(h) = \frac{E(h)}{E_{0,1} - E_{0,2}}, \quad \varphi(h) = \frac{E_0(h) - E_{0,1}}{E_{0,2} - E_{0,1}}.$$

Уравнения (26.9.12) и (26.9.13) могут быть использованы в общем случае при исследовании переноса тепла в плоском слое теплопроводной и движущейся среды. В частном случае, когда рассматривается только излучение (соленоидальное поле), плотность полусферического результирующего излучения в слое постоянна, а ее производная по $h$, т. е. плотность объемного результирующего излучения, тождественно равна нулю. В связи с этим задача сводится к совместному рассмотрению следующих интегральных уравнений:

$$\varphi(h) = \frac{1}{2}\left[A_2'(h) + \int_0^h Z(h.\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi\right]; \quad (26.9.14)$$

$$\tilde{\tilde{E}} = 2\left[A_2(0) + \int_0^h \psi(h, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi\right], \quad (26.9.15)$$

где

$$A_2(O) = \frac{A_1 A_2 K_3(h_0)}{1 - 4R_1 R_2 K_3^2(h_0)}. \quad (26.9.16)$$

При этом определение $\tilde{\tilde{E}}$ сводится к взятию соответствующих квадратур после подстановки $\varphi(h)$. Используя линейную аппроксимацию распределения $\varphi(h)$ по толщине слоя

$$\varphi(h) = \varphi(O) + \frac{\varphi(h_0) - \varphi(O)}{h_0}\, h, \quad (26.9.17)$$

где $\varphi(0)$ и $\varphi(h_0)$ — функции температурных распределений в околостенных областях соответственно при $h=0$ и $h=h_0$, легко получить в первом приближении решение (26.9.14) применительно к случаю, когда граничные поверхности являются абсолютно черными. Это решение имеет следующий вид:

$$\varphi(h)=\frac{1/2-K_3(h_0)+h\,[1-K_2(h_0)]}{1+h_0\,[1-K_2(h_0)]-2K_3(h_0)}. \qquad (26.9.18)$$

Распределение $\varphi(\xi)=[E_0(\xi)-E_{0,1}]/(E_{0,2}-E_{0,1})$ по толщине слоя ($\xi=h/h_0$) излучающего газа (рис. 26.17) для $h_0$ [illegible]; 0,5; 1,0; 2,0; 5,0; $\infty$, построенное по уравнению (26.9.18) хорошо (с погрешностью <3%) согласуется с численным решением. Следует отметить наличие характерных скачков $\varphi(h)$ в пристенных областях. Указанные температурные скачки объясняются идеализацией процесса переноса тепла излучением, исключающей из рассмотрения молекулярную теплопроводность. В условиях оптической симметрии, когда $A_1=A_2\equiv 1$, функция температурного распределения $\varphi(h)$ обладает характерной симметрией относительно $\varphi(h)$ для диатермической среды ($h_0=0$). В общем случае ($A_1\neq A_2=1$) эта симметрия нарушается, и область пересечения $\varphi(h)$ при $h_0=0$ с $\varphi(h)$ при произвольном $h$ перемещается в сторону поверхности с высоким значением коэффициента, характеризующего излучательную способность стенки. Определение безразмерного потока $\bar{E}$ производим согласно уравнению (26.9.14), которое при $A_1=A_2=1$ имеет вид

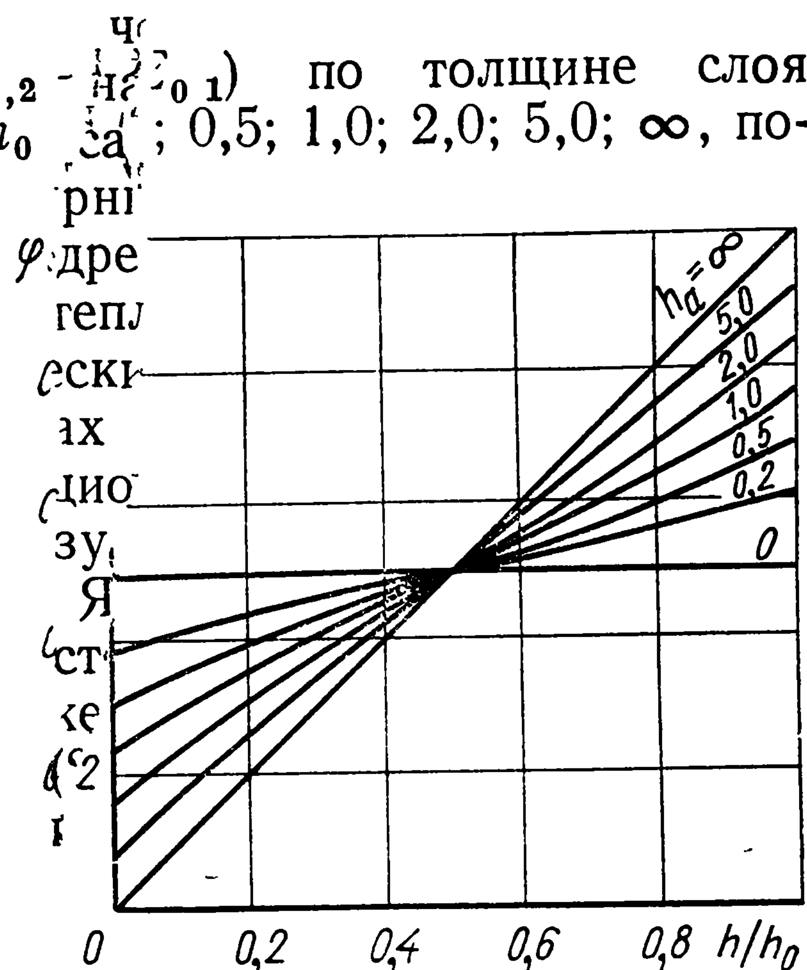



Рис. 26.17. Распределение температурной функции по толщине слоя излучающего газа

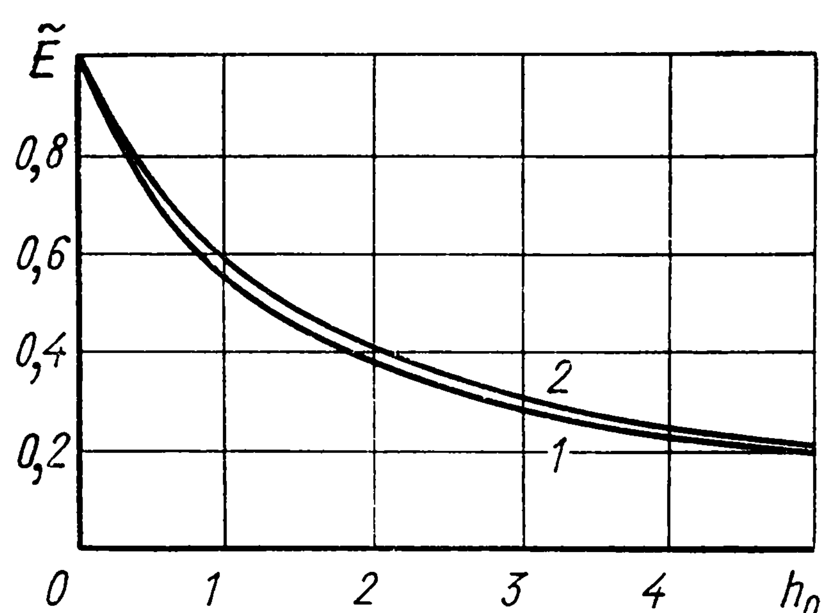



Рис. 26.18. Зависимость безразмерного потока излучения от оптической толщины излучающего слоя газов:

*1* — по формуле (26.9.20); *2* — по формуле (26.9.21) при $A_1=A_2=1$

$$\bar{\bar{E}}=2\left[K_3(h_0)+\int_0^{h_0}K_2(h-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi\right]. \qquad (26.9.19)$$

Для определения интеграла в правой части этого уравнения воспользуемся линейным приближением решения $\varphi(h)$ согласно выражению (26.9.18). После некоторых преобразований получаем выражение для $\bar{\bar{E}}$ в форме сравнительно простого соотношения:

$$\bar{\bar{E}}=\frac{1}{2}+K_3(h_0)+\frac{2}{3}[1-K_2(h_0)]\left[\frac{1-3K_1(h_0)}{1-2K_3(h_0)}\right]\left[1+h_0\frac{1-K_2(h_0)}{1-2K_3(h_0)}\right]^{-1}. \qquad (26.9.20)$$

Результаты расчетов по этой формуле (рис. 26.18) практически совпадают с численным решением задачи, а также аналитическим решением В. Н. Адрианова и Г. Л. Поляка, основанным на непосредственном применении уравнения переноса радиационной энергии (дифференциальный метод). На рис. 26.18 дается также зависимость $\bar{\bar{E}}=f(h_0)$, построенная по приближенному выражению

$$\bar{\bar{E}}=(1/A_1+1/A_2-1+3h_0/4)^{-1} \qquad (26.9.21)$$

при $A_1 = A_2 = 1$. Формула (26.9.21) выводится сравнительно просто на основании использования упрощенного градиентного представления для вектора излучения (26.5.33). Она удовлетворительно согласуется с решением (26.9.20) и успешно применяется в практических расчетах.

## 26.10. КОМБИНИРОВАННЫЙ РАДИАЦИОННЫЙ ТЕПЛООБМЕН

Реальные условия переноса массы и энергии в различного рода теплотехнических процессах и явлениях природы характеризуются сложным комплексом взаимосвязанных (комбинированных) явлений, включающих процессы радиационного, кондуктивного и конвективного теплообмена. Радиационно-кондуктивный теплообмен — один из наиболее распространенных видов теплообмена в природе и технике (

Математическая формулировка задачи о радиационно-кондуктивном теплообмене вытекает из уравнения энергии, дополненного соответствующими граничными условиями. В частности, при исследовании радиационно-кондуктивного теплообмена в плоском слое поглощающей и излучающей среды с непрозрачными серыми границами задача сводится к решению уравнения энергии

$$\frac{d}{d\xi}\left(\beta(\theta)\frac{d\theta}{d\xi}\right) = N_*\frac{d\Phi}{d\xi} \qquad (26.10.1)$$

с граничными условиями

$$\xi = 0,\ \theta = \theta_1;\ \xi = 1,\ \theta = \theta_2. \qquad (26.10.2)$$

Здесь $\Phi = E/(\sigma T H)$ — безразмерная плотность потока результирующего излучения; $N_* = \sigma_0 T_*^3 \delta/\lambda_*$ — критерий радиационно-кондуктивного теплообмена; $\beta(\theta) = \lambda(\theta)/\lambda_*$ — критерий зависимости теплопроводности среды от температуры; $\theta(\xi) = T(\xi)/T_*$ — безразмерная температура в сечении $\xi = y/\delta$ слоя толщиной $\delta$.

Рис. 26.19. Температурное распределение в слое поглощающей среды оптической толщины ($h_0 = 1{,}0$ при $\theta_1 = 0{,}5$)

Уравнение (26.10.1) представляет собой нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, так как $d\Phi/d\xi$ в соответствии с уравнением (26.9.13) описывается интегральным выражением, а искомое значение температуры представлено в уравнении (26.10.1) как в явном, так и в неявном виде через равновесное значение плотности потока излучения: $E_{0\lambda} = \pi I_{0\lambda}$.

На рис. 26.19 даны результаты решения уравнения (26.10.1), полученные Н. А. Рубцовым и Ф. А. Кузнецовой сведением его к интегральному уравнению с последующим численным решением на ЭВМ методом Ньютона. Приведенные результаты по температурному распределению в слое поглощающей среды с осредненным по частоте значением коэффициента объемного поглощения свидетельствуют о принципиальной важности учета совместного, радиационно-кондуктивного взаимодействия в переносе суммарной тепловой энергии.

Обращает на себя внимание чувствительность эффектов взаимодействия к оптическим свойствам границ (особенно для малых значений критерия радиационно-кондуктивного теплообмена: $N = \lambda \varkappa / \sigma_0 T^3$).

Снижение излучательной способности горячей стенки (см. рис. 26.19) ведет к перераспределению ролей радиационной и кондуктивной составляющих потока тепловой энергии. Роль излучения в теплоотдаче горячей стенки падает, и примыкающая к ней среда нагревается за счет кондукции от стенки. Последующий перенос тепловой энергии к холодной стенке складывается из кондукции и излучения за счет собственного излучения среды, при этом температура среды снижается по сравнению с тем значением, которое имела бы среда в случае одного кондуктивного теплопереноса. Смена оптических свойств границ ведет к коренной перестройке температурных полей.

В последние годы в связи с широким внедрением криогенной техники принципиально важной оказалась проблема теплообмена излучением при криогенных температурах (исследования оптических свойств, эффективности теплоизоляции в сверхпроводящих устройствах и криостатах). Однако и здесь трудно представить себе процессы радиационного теплообмена в рафинированном виде. На рис. 26.20 приведены результаты экспериментальных исследований, выполненных Н. А. Рубцовым и Я. А. Бальцевичем и отображающих кинетику температурных полей в системе металлических экранов при температурах жидкого азота и гелия. Там же представлен расчет установившегося температурного поля по уравнениям (26.4.1) в предположении, что основной механизм переноса тепла — излучение. Расхождение экспериментальных и расчетных результатов свидетельствует о наличии дополнительного, кондуктивного механизма переноса тепла, связанного с наличием между экранами остаточных газов. Следовательно, анализ подобной теплопередающей системы также связан с необходимостью рассматривать взаимосвязанный радиационно-кондуктивный теплообмен.

Простейшим примером комбинированного радиационно-конвективного теплообмена является перенос тепла в плоском слое поглощающего газа, вдуваемого в турбулентный поток высокотемпературного газа, обтекающего проницаемую пластину. С подобного рода постановками задач приходится сталкиваться как при рассмотрении течения в окрестности лобовой точки, так и при анализе оттеснения пограничного слоя интенсивным вдувом поглощающего газа через пористую пластину.

Проблема в целом сводится к рассмотрению следующей краевой задачи:

$$\mathrm{Bo}\, f(\xi)\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{1}{N_*}\frac{d^2\theta}{d\xi^2} - \frac{d\Phi}{d\xi}$$

при граничных условиях

$$\xi = 0, \quad \theta = \theta_1; \quad \xi = 1, \quad \theta = \theta_2. \qquad (26.10.4)$$

Здесь $\mathrm{Bo} = C_p \rho w_* / \sigma_0 T_*^3$ — критерий Больцмана, характеризующий радиационно-конвективное соотношение составляющих потока тепла в среде с постоянными теплофизическими свойствами ($\overline{\varkappa} = \mathrm{const}$, $\lambda = \mathrm{const}$); $w_*$, $T_*$ — характеристические значения (в невозмущенной области либо на границе неравновесной системы) соответственно скорости и температуры; $f(\xi)$ — безразмерная функция распределения скорости в области оттеснения пограничного слоя.

На рис. 26.21 представлены результаты численного решения задачи (26.10.3) —(26.10.4) для частного случая: $f(\xi) = 1{,}0$; $N = \lambda \varkappa' / 4\sigma_0 T_*^3 = 0{,}1$; степень черноты проницаемой пластины $\varepsilon_1 = 0{,}2$; излучательная способность набегающего потока $\varepsilon_2 = 1{,}0$ для различных значений Bo. Как видно, в случае малых Bo, характеризующих низкую интенсивность подвода газа через пористую пластину, температурный профиль формируется за счет радиационно-конвективного теплообмена. По мере увеличения Bo роль конвекции в формировании температурного профиля становится преобладающей. С ростом оптической толщи-

ны слоя температура несколько увеличивается при малых Во и соответственно уменьшается по мере увеличения Во.

На рис. 26.22 построена зависимость Во $= f(h_0)$, характеризующая вдув поглощающего газа, потребного для поддержания теплоизолированного состояния пластины в зависимости от оптической толщины слоя оттеснения. Отмечается резко выраженная зависимость критерия Во от $h_0$ при малых $h_0$, когда незначительное присутствие поглощающей компоненты газа позволяет замет-

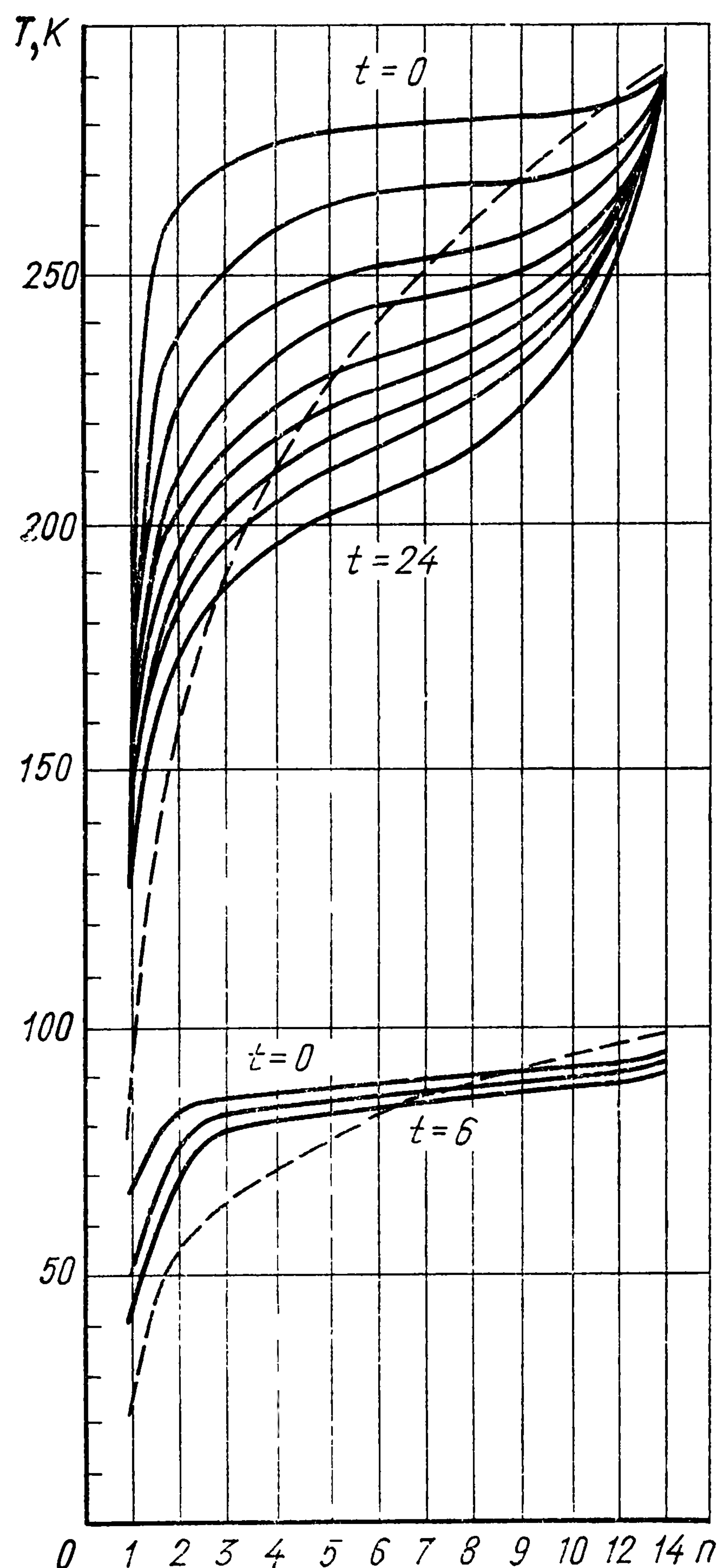



Рис. 26.20. Расчетная (— — —) и экспериментальная (———) кинетика температурных полей в системе металлических экранов при температурах жидкого азота и гелия ($n$ — номер экрана; $t$ — время, ч)

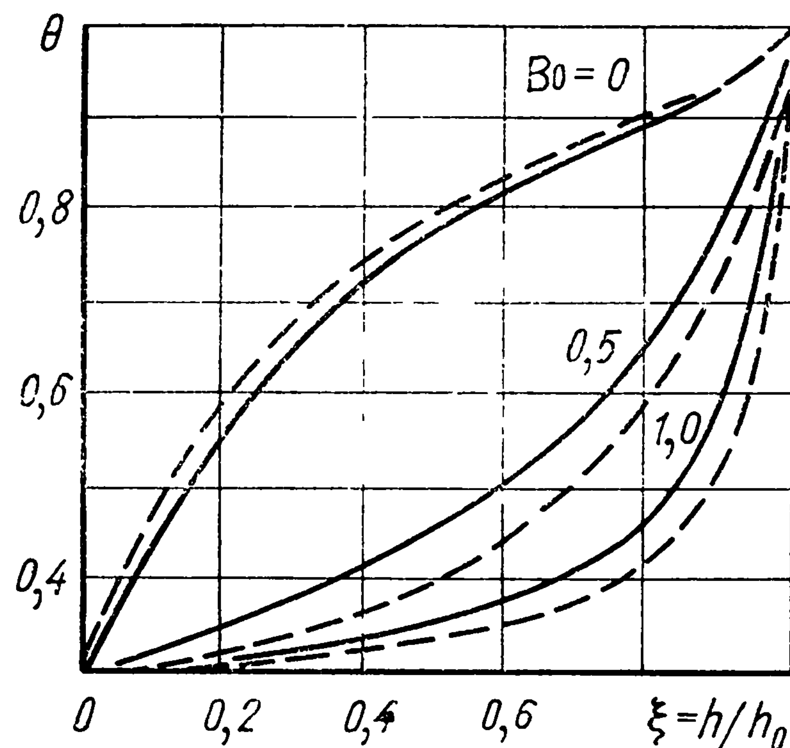



Рис. 26.21. Температурное распределение в слое завесы с оптической толщиной $h_0=0{,}5$ (———) и $h_0=1{,}0$ (— — —)

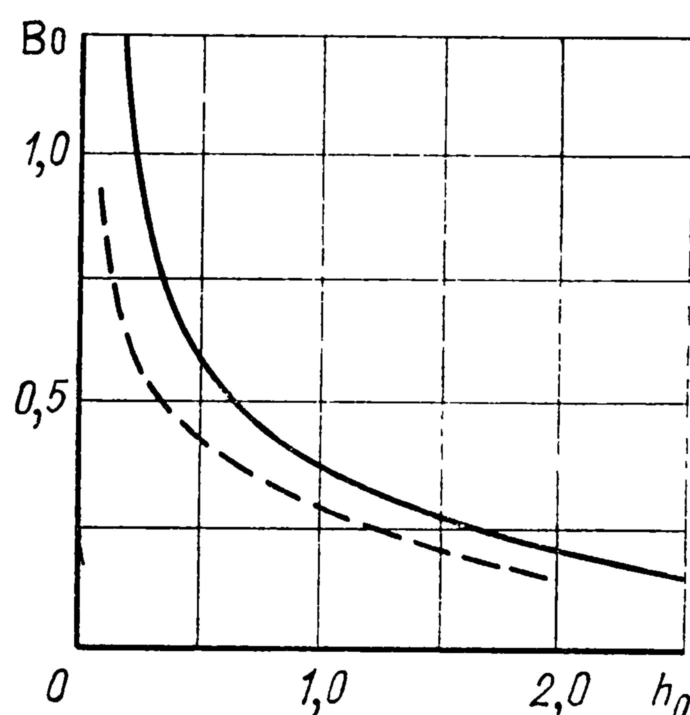



Рис. 26.22. Зависимость Во от оптической толщины слоя $h_0$ при $q=0$, $\theta_1=0{,}3$, $\theta_2=1{,}0$, $N=0{,}1$ и соответственно $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1{,}0$ (———) и $\varepsilon_1=0{,}2$, $\varepsilon_2=1{,}0$ (— — —)

но снизить расход вдуваемого газа. Эффективным оказывается создание высокоотражающей поверхности, при условии что оптическая толщина вдуваемого газа невелика ($h_0 < 1{,}0$). Учет селективного характера поглощения излучения в рассматриваемых условиях не вносит принципиальных изменений в характер температурных профилей. Этого нельзя сказать о потоках излучения, расчет которых без учета оптических окон прозрачности ведет к серьезным погрешностям.

Принципиальная важность учета селективности излучения в тепловых расчетах неоднократно отмечается в работах Л. М. Бибермана, посвященных решению сложных задач радиационной газовой динамики.

Помимо прямых численных методов исследования комбинированного радиационно-конвективного теплообмена определенный практический интерес представляют приближенные способы расчета. В частности, рассматривая предельный закон теплообмена в турбулентном пограничном слое при относительно слабом воздействии теплового излучения

$$\int_0^1 d\vartheta \Big/ \sqrt{\Psi_S \frac{\tilde{q}}{\tilde{q}_0} \frac{\rho_0}{\rho}} \approx 1, \qquad (26.10.5)$$

полагаем, что $\Psi_S = St/St_0$ представляет собой безразмерный комплекс радиационно-конвективного теплообмена, где St — суммарный критерий Стентона, отображающий турбулентно-радиационный перенос тепла на стенку. При этом $\tilde{q} = q/q_{ст}$; $q_{ст} = q_{ст,\,к} + E_{ст}$, где $q_{ст}$ — суммарный тепловой поток на стенке, имеющий конвективную ($q_{ст,\,к}$) и радиационную ($E_{ст}$) составляющие.

Турбулентный тепловой поток $\tilde{q}$ аппроксимируем, как обычно, полиномом третьей степени $\tilde{q} = A + B\xi_T + C\xi_T^2 + D\xi_T^3$, коэффициенты которого определяются из граничных условий:

$$\left.\begin{array}{lll} \xi_T = 0, & \tilde{q} = 1 - \tilde{E}_{ст}; & \partial\tilde{q}/\partial\xi_T = \partial\tilde{E}/\partial\xi_T\,|_{\xi_T \sim 0}; \\ \xi_T = 1, & \tilde{q} = 0; & \partial\tilde{q}/\partial\xi_T = 0, \end{array}\right\} \qquad (26.10.6)$$

где $\tilde{E}$ — безразмерная плотность полусферического результирующего излучения во внутренних граничных точках пограничного слоя.

В граничные условия (26.10.6) включено уравнение энергии, составленное соответственно для условий околостенной области и на границе невозмущенного потока. Учитывая, что $\tilde{q}_0 = 1 - 3\xi_T^2 + 2\xi_T^3$, безразмерный параметр $\tilde{q}_0/\tilde{q}$, необходимый для вычисления $\Psi_S$, записываем следующим образом:

$$\tilde{q}_0/q = \left(1 - \tilde{E}_{ст} + \frac{\partial\tilde{E}}{\partial\xi_T}\xi_T f(\xi_T)\right)^{-1}, \quad \text{где } f(\xi_T) = (2\xi_T + 1)^{-1}. \qquad (26.10.7)$$

Заметим, что граничные условия (26.10.6) определялись принятым условием образования вблизи поверхности, обтекаемой излучающей средой, теплового пограничного слоя. Это существенное обстоятельство позволило полагать $\left.\frac{\partial\tilde{q}}{\partial\xi_T}\right|_{\xi_T \sim 1} = \left.\frac{\partial\tilde{E}}{\partial\xi_T}\right|_{\xi_T \sim 1} = 0$, что выполняется в условиях преобладающей конвекции.

Значчния $\tilde{E}_{ст}$ и $\partial\tilde{E}/\partial\xi_T$ определяются из анализа решений относительно плотности результирующего излучения применительно к условию замкнутой системы, составляющей пограничный слой. Турбулентный пограничный слой рассматривается как серая поглощающая среда с коэффициентом поглощения $\varkappa$, не зависящим от температуры ($\varkappa$ = const). Обтекаемая поверхность — это серое, оптически однородное ($A_{ст}$ = const) изотермическое тело ($T_{ст}$ = const). Невозмущенная часть потока, за пределами пограничного слоя, излучает как объемное серое тело ($\xi_0$ = const), не отражающее со своей поверхности и находящееся при температуре невозмущенного потока ($T_0$ = const). Все это позволяет воспользоваться результатами предыдущего рассмотрения переноса излучения в плоском слое поглощающей среды с той существенной разницей, что здесь может быть учтено лишь однократное отражение от поверхности обтекаемой пластины.

Подставляя в выражение (26.10.5) значения $\rho_0/\rho$ (см. гл.21) и $\Psi_S\tilde{q}/\tilde{q}_0$ для случая абсолютно черной поверхности ($R_{ст} = 1 - A_{ст} \approx 0$), сводим решение задачи к отысканию $\Psi_S$ из интегрального соотношения

$$\int_0^1 [\vartheta(\Psi_S + a - b\vartheta^n + c\vartheta^{4+n})]^{-1/2}\, d\vartheta = 1. \qquad (26.10.8)$$

Решение этого интегрального соотношения относительно $\vartheta$ может быть получено приближенно, путем разложения подынтегральной функции в ряд. Вводя подстановку $\theta = \vartheta^n$, а затем разлагая подынтегральную функцию в биномиальный ряд относительно $(\theta/\Psi_S)(c\theta^{4/n} - b)$ и интегрируя его почленно, сводим уравнение (26.10.8) к ряду, сходящемуся при условии $(\theta/\Psi_S)(c\theta^{4/n} - b) < 1$, что ограничивает его применимость областью $h_0 \leqslant 2{,}0$ и $0 < c/h_0 < 4{,}0$. Ограничиваясь первыми тремя членами, получаем расчетное выражение в виде рекуррентной формулы

$$(\Psi_S + a)_{i+1} = \left[2 - \left(\frac{c}{9+2n} - \frac{b}{1+2a}\right)(\Psi_S + a)_i^{-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{4}\left(\frac{c^2}{17+4n} - \frac{2bc}{9+4n} + \frac{b^2}{1+4n}\right)(\Psi_S + a)_i^{-2}\right]. \qquad (26.10.9)$$

Эта формула позволяет сравнительно просто определять численные значения $\Psi_S$ методом последовательных приближений (порядок приближения $i$ обычно не превышает двух) при условии, что $a$ и $b$ определены. Для случая интенсивного теплообмена, когда $T_0 \gg T_{\text{ст}}$ при $f(\xi_T) \approx 1$ и $\vartheta \approx \xi_T^{1/4}$, коэффициенты, представленные в рекуррентной формуле (26.10.9), определяются следующим образом:

$$a = -\frac{2}{3h_0}\frac{1}{\mathrm{St}_0\,\mathrm{Bo}}[A(h_0) + h_0 k_3(h_0)(3\varepsilon_0 - 2)]; \qquad (26.10.10)$$

$$b = \frac{1}{\mathrm{St}_0\,\mathrm{Bo}}[A(h_0) + h_0 k_2(\tau_0)(2\varepsilon_0 - 1)]; \qquad (26.10.11)$$

$$c = \frac{4h_0}{\mathrm{St}_0\,\mathrm{Bo}}, \qquad (26.10.12)$$

Рис. 26.23. Влияние оптической толщины пограничного слоя на взаимодействие между радиационным и конвективным теплообменом

где $A(h_0) = 1 - \exp(-h_0)$ — поглощательная способность пограничного слоя В качестве примера рассмотрим безразмерный параметр теплообмена для случая обтекания пластины при $n = 7$ излучающим газом, являющимся в своей невозмущенной части оптически плотным ($\varepsilon_0 \approx 1$). Расчет проводим, пользуясь итерационным выражением (26.10.9). Точность расчета ограничивается вторым приближением, а область расчетных значений — условием $h_0 \leqslant 2{,}0$ и $1/\mathrm{St}_0\mathrm{Bo} \leqslant 4{,}0$.

На рис. 26.23 представлены результаты расчетов, хорошо иллюстрирующие существенную роль оптической плотности. Радиационно-конвективное взаимодействие, несколько снижающее конвективную составляющую $\Psi_S + a$, имеет слабо выраженный характер.

## 26.11. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ В ТОПОЧНЫХ УСТРОЙСТВАХ

Тепло, выделяющееся при сгорании топлива в топочных устройствах различного назначения, в значительной мере передается поверхностям нагрева излучением. Точная постановка задачи теплообмена в топочных устройствах в настоящее время практически невозможна, так как в топке помимо радиационного теплообмена излучением протекают также процессы горения топлива, движение газов и частиц, массообмен в объеме факела и на его границах и т. п.

В связи с этим получили распространение приближенные методы рассмотрения теплообмена в топочных устройствах. Теплообмен в топочном устройстве может быть приближенно исследован на основе простой незамкнутой системы уравнений при условии, что процессы сгорания топлива будут учтены при

определении равновесного излучения топочной среды и соответственно ее температуры.

Уравнения баланса энергии и теплопередачи, записанные в интегральной форме для любого текущего сечения потока среды в топке, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} Q_л + Q_к &= B_р V\bar{c}(T_0 - T); \\ Q_л + Q_к &= \varepsilon_T \sigma_0 F_л (\bar{T}^4 - T_{ст}^4) + \alpha_к F_к (\bar{T} - T_{ст}). \end{aligned}\right\} \qquad (26.11.1)$$

Здесь $Q_л$ и $Q_к$ — теплоотдача излучением и конвекцией, отнесенная к текущему сечению потока газов; $B_р$ — расход топлива; $V$ — объем продуктов сгорания; $\bar{c} = (c_0 T_0 - cT)/(T_0 - T)$ — средняя расчетная теплоемкость продуктов сгорания; $c_0$ — средняя теплоемкость продуктов сгорания в интервале от 0 до $T_0$; $T$, $T_0$ — соответственно температура газов в рассматриваемом сечении и теоретическая температура сгорания; $F_л$, $F_к$ — лучистая и конвективная поверхности нагрева в топке; $\varepsilon_T$ — степень черноты топки в рассматриваемой области; $\bar{T}$ — средняя эффективная температура пламени; $T_{ст}$ — температура стенок.

Совмещая уравнения (26.11.1), получаем

$$\varepsilon_T \sigma_0 F_л (\bar{T}^4 - T_{ст}^4) + \alpha_к F_к (\bar{T} - T_{ст}) = B_р V\bar{c}(T_0 - T). \qquad (26.11.2)$$

Приведем уравнение (26.11.2) к безразмерному виду:

$$\frac{\varepsilon_T \sigma_0 F_л T_0^3}{B_р V\bar{c}} (\bar{\theta}^4 - \theta_{ст}^4) + \frac{\alpha_к F_к}{B_р V\bar{c}} (\bar{\theta}^4 - \theta_{ст}) = 1 - \theta. \qquad (26.11.3)$$

Здесь $\theta$ $T/T_0$ — безразмерная температура. Комплекс, стоящий в первом члене этого уравнения, характеризует долю излучаемого тепла от общего тепловыделения в топке. Комплекс, стоящий во втором члене этого уравнения, характеризует долю конвективной теплоотдачи.

Легко заметить, что так как скорость газов в топке пропорциональна $B_р V/F$, то второй комплекс является специфической модификацией критерия, известного из теории конвективного теплообмена:

$$\alpha_к F_к/(B_р V\bar{c}) \sim \alpha_к/(c\rho w). \qquad (26.11.4)$$

Для больших топок, когда конвективный теплообмен мал по сравнению с радиационным, из выражения (26.11.4) запишем

$$\frac{\varepsilon_T \sigma_0 F_л T_0^3}{B_р V\bar{c}} (\bar{\theta}^4 - \theta_{ст}^4) + \theta - 1 = 0, \qquad (26.11.5)$$

или, вводя обозначение режимного критерия Больцмана $B_р V\bar{c}/\sigma_0 F_л T_0^3 = \mathrm{Bo}$, получаем

$$\bar{\theta}^4 - \frac{\mathrm{Bo}}{\varepsilon_T}(1 - \theta) - \theta_{ст}^4 = 0. \qquad (26.11.6)$$

В качестве первого приближения Г. Л. Поляк и С. Н. Шорин предложили связать среднюю эффективную температуру с истинными температурами в данном сечении степенной зависимостью

$$\bar{\theta}^4 = C\theta^{4n}. \qquad (26.11.7)$$

Здесь постоянные $C$ и $n$ определяются условиями сгорания и охлаждения в топке. Уравнение (26.11.6) в таком случае принимает вид

$$C\theta^{4n} - \frac{\mathrm{Bo}}{\varepsilon_T}(1 - \theta) - \theta_{ст}^4 = 0. \qquad (26.11.8)$$

В топках паровых котлов $\theta \gg \theta_{ст}$, и уравнение (26.11.8) еще более упрощается:

$$\theta^{4n} - \frac{\mathrm{Bo}}{C\varepsilon_T}(1 - \theta) = 0. \qquad (26.11.9)$$

Это уравнение впервые было получено Г. Л. Поляком. Приняв за рассматриваемое сечение выходное сечение топки, можно решить его относительно θ, которая в этом случае является безразмерной температурой продуктов сгорания на выходе из топочной камеры. Решение уравнения (26.11.9) может быть представлено в виде функциональной зависимости

$$\theta = f\left(\frac{\mathrm{Bo}}{C\varepsilon_T},\ n\right). \qquad (26.11.10)$$

А. М. Гурвич и А. Г. Блох показали, что коэффициент $C$ мало зависит от режима работы топки, рода топлива и способа сжигания и поэтому может быть принят постоянным. Показатель температурного режима $n$, зависящий от форсировки топочной камеры, определяемой величиной критерия Bo, меняется в весьма широких пределах.

Анализ экспериментального материала по теплообмену дает возможность установить зависимость $n$ от места расположения температурного максимума $\chi_{\text{макс}}$ по длине факела. Это в свою очередь позволяет записать выражение (26.11.10), учитывая постоянство $C$, в следующем виде:

$$\theta = f\left(\frac{\mathrm{Bo}}{\varepsilon_T},\ \chi_{\text{макс}}\right). \qquad (26.11.11)$$

Вид функции (26.11.10) или (26.11.11) может быть установлен на основании опытных данных по теплообмену в топках. Эти данные приводят к формуле вида

$$\theta/(1-\theta) = M\,(\mathrm{Bo}/C\varepsilon_T)^{0,6}, \qquad (26.11.12)$$

в которой для большинства топок коэффициенты $M$ и $C$ являются практически постоянными величинами. По предложению А. М. Гурвича связь безразмерной температуры с основными критериями, определяющими топочный процесс для $\mathrm{Bo}/\varepsilon_T < 10$ или $\theta < 0{,}9$, выражается формулой

$$\theta = \frac{T}{T_0} = \frac{(\mathrm{Bo}/\varepsilon_T)^{0,6}}{0{,}445 + (\mathrm{Bo}/\varepsilon_T)^{0,6}}. \qquad (26.11.13)$$

Степень черноты топки определяется оптической плотностью среды, заполняющей топку, оптическими свойствами поверхностей топки, а также геометрическими характеристиками, учитывающими степень экранирования топки и размеры площадки зеркала горения (в случае слоевой топки):

$$\varepsilon_T = \varepsilon_T\,(kl,\ A_{\text{ст}},\ F_{\text{л}}/\sum F). \qquad (26.11.14)$$

При равномерном распределении поверхности нагрева экранов на стенах топочной камеры степень черноты топок приближенно определяется по следующим формулам:

для слоевой топки

$$\varepsilon_T = \frac{0{,}82\,[\varepsilon_{\text{ф}} + (1-\varepsilon_{\text{ф}})\,\rho\psi]}{1-(1-\psi\xi)\,(1-\rho\psi)\,(1-\varepsilon_{\text{ф}})} \qquad (26.11.15)$$

и для камерной топки

$$\varepsilon_T = \frac{0{,}82\varepsilon_{\text{ф}}}{\varepsilon_{\text{ф}} + (1-\varepsilon_{\text{ф}})\,\psi\xi}. \qquad (26.11.16)$$

Здесь $\varepsilon_{\text{ф}}$ — степень черноты факела; $\psi$ — степень экранирования, указывающая на долю внутренней поверхности топочной камеры, закрытой экранами; $\rho$ — геометрическая характеристика слоевой топки, дающая представление о доле площади зеркала горения, приходящейся на единицу поверхности экранов, $\xi$ — условный коэффициент загрязнения поверхности экранов.

Степень черноты факела подсчитывается по формуле

$$\varepsilon_{\text{ф}} = \varepsilon\beta, \qquad (26.11.17)$$

где степень черноты среды $\varepsilon$ определяется как

$$\varepsilon = A = 1 - \exp(-kl). \qquad (26.11.18)$$

Здесь коэффициент ослабления $k$ находится в зависимости от вида пламени, а толщина $l$ — в соответствии с формулой (26.7.14).

Поправочный коэффициент $\beta$ в формуле (26.11.9) связан с характером заполнения объема топочной камеры пламенем и с теми особенностями, которые определяются горением и теплообменом. На рис. 26.24 приведены результаты исследования температурных полей и полей потоков излучения в мазутной топке. Как видно, неоднородность температурного поля, а также имеющая место неоднородность поля концентраций излучающих твердых частиц приводят к большой неоднородности излучения по сечению камеры. Эта слож-

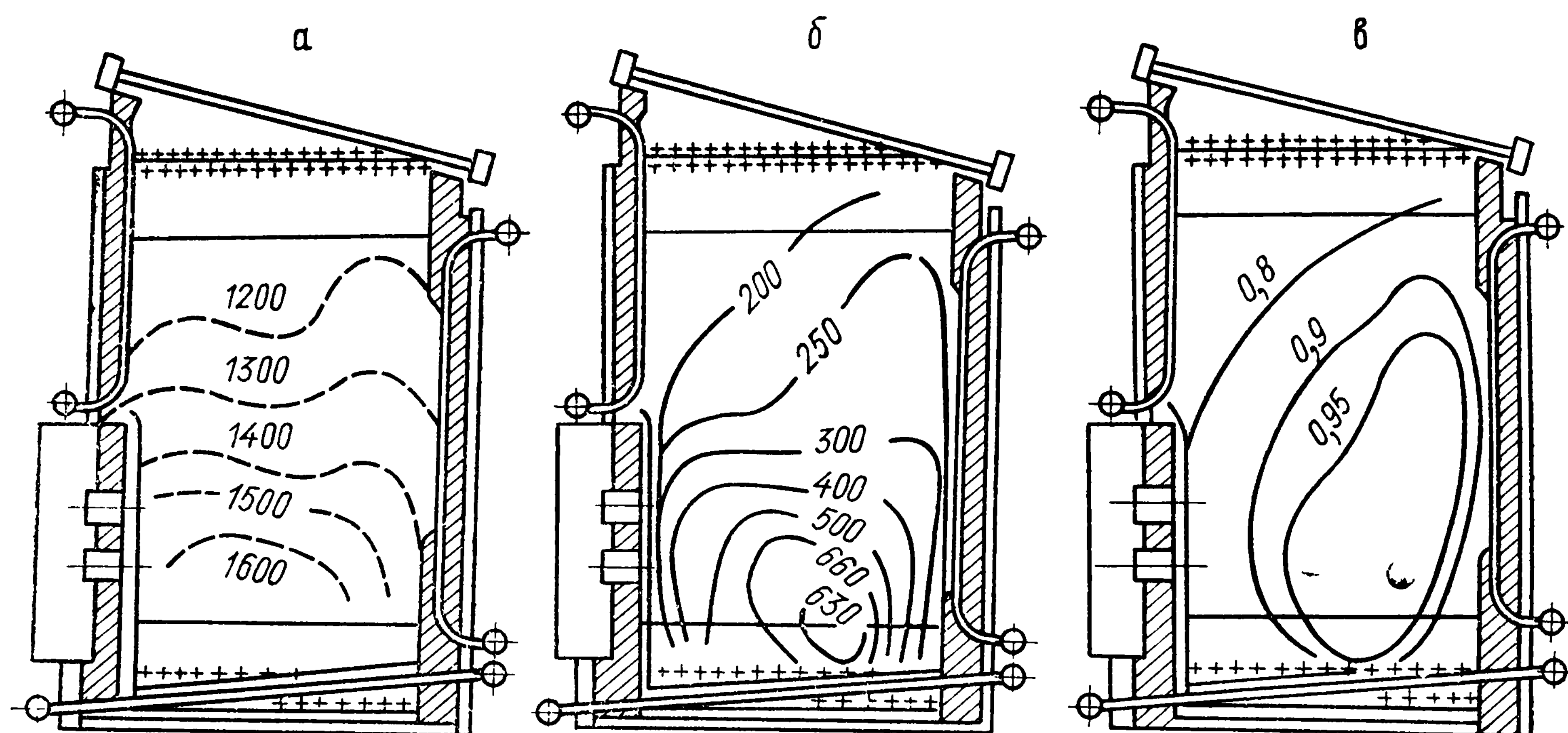



Рис. 26.24. Характер полей температур (*а*), потоков излучения (*б*) и распределения степени черноты (*в*) в топочной камере

ность поля излучения сказывается и на характере распределения степени черноты в объеме топки. Таким образом, оптические характеристики сред, заполняющих топочную камеру, связаны с условиями сгорания топлива и с условиями теплообмена.

Существенное влияние на теплообмен в топке оказывает состояние поверхностей нагрева, расположенных в топке. Обычно такие поверхности бывают покрыты слоем пыли, обладающей низкой теплопроводностью. Это значительно снижает тепловую эффективность поверхностей нагрева. Оценка роли подобного рода загрязнений производится путем введения коэффициента загрязнения в формулу для определения степени черноты топок

$$\xi = \psi_э/\psi_0, \qquad (26.11.19)$$

где $\psi_0$ — коэффициент тепловой эффективности чистой поверхности нагрева при температуре насыщения; $\psi_э$ — коэффициент тепловой эффективности загрязненной поверхности. Последний определяется экспериментальным путем на основании следующего соотношения:

$$\psi_э = (E_п - E_э)/E_п, \qquad (26.11.20)$$

где $E_п$ и $E_э$ — соответственно плотности тепловых потоков, падающих на стенку топочной камеры, и эффективных потоков, посылаемых стенкой в топочное пространство.

А. М. Гурвич и В. В. Митор установили, что коэффициент загрязнения $\xi$ зависит от вида топлива и геометрии поверхности нагрева. Изложенные выше соображения, а также результаты обработки большого экспериментального материала, выполненной А. М. Гурвичем и его сотрудниками, положены в ос-

нову принятого в СССР нормативного метода расчета теплообмена в топках котлов.

Определенный интерес представляет зональный метод расчета теплообмена излучением в топках, предложенный Н. А. Рубцовым. Основная идея подобных расчетов сводится к совместному рассмотрению уравнений теплообмена, составленных для каждой из выделенных в топочном пространстве зон, а также соответствующих (по номеру зоны) балансных топочных уравнений, связывающих эффекты результирующих тепловыделений по зонам с суммарным тепловыделением от сгорания топлива в слое и факеле. Если в слоевой топке

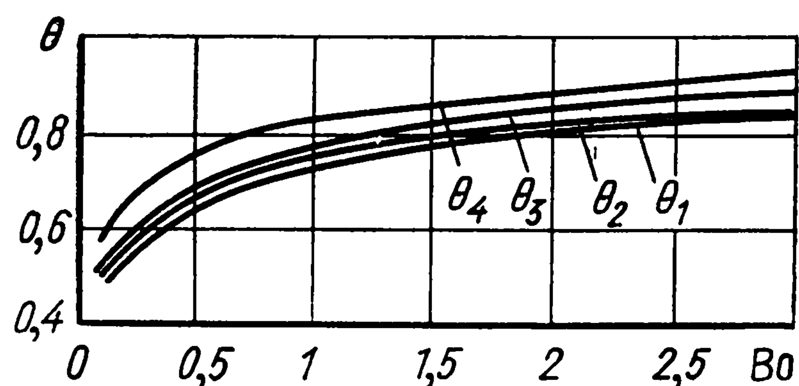



Рис. 26.25. Зависимость безразмерных температур $\theta_i = T_i/T_0$ в слоевой топке от критерия Больцмана ($\varepsilon_3=0{,}3$; $A_1=0{,}8$; $A_2=A_4=1{,}0$; $\eta=0$; $\theta_1=0{,}278$; $h/b=1$, где $h$ — высота топки, $b$ — ширина решетки)

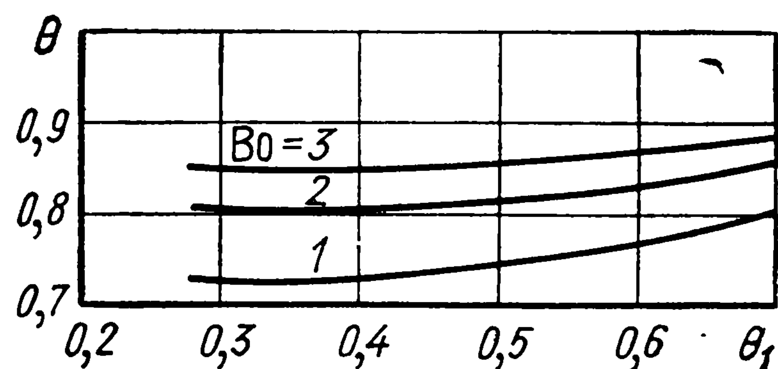



Рис. 26.26. Зависимость безразмерной температуры газов на выходе из слоевой топки от температуры поверхности запыленного экрана при различных режимах нагрузки ($h/b=1$; $\varepsilon_3=0{,}3$; $A_1=0{,}8$; $A_2=A_4=1{,}0$; $\eta=0$)

выделить изотермические зоны (1 — экран, 2 — обмуровка, 3 — факел, 4 — слой горящего топлива), то уравнения теплообмена могут быть расписаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
Q_i &= \sigma_0 A_i E_i \sum A_k \psi_{ik} (T_i^4 - T_k) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq 3}}^{n} \alpha_k (T_3 + T_k) F_k;\\
&i = 1.2, 3, 4;\quad 1 \leqslant k \leqslant n;\\
&Q_1 = B_p V\bar{c}\,(T_0 - T)(1 - \eta);\\
&Q_2 = B_p V\bar{c}(T_0 - T)\,\eta;\\
&Q_3 = -B_p V\bar{c}\,(T_{4,3} - T);\\
&Q_4 = -B_p V\bar{c}\,(T_0 - T_{4,3}).
\end{aligned}\right\} \qquad (26.11.21)$$

Здесь $\eta$ — доля потерь тепла через обмуровку в общем тепловыделении в топке; $T$ — температура газов на выходе из топки; $T_{4,3}$ — температура газов на выходе из слоя горящего топлива, которую в первом приближении можно принять равной $T_4$; $\bar{c}$ — средняя расчетная теплоемкость продуктов сгорания, принятая в первом приближении одинаковой для разных диапазонов температур. Система (26.11.21) должна быть дополнена замыкающим уравнением, отображающим связь температуры газов на выходе из топки с температурами выделенных зон. В качестве такого уравнения можно воспользоваться известным уравнением осреднения газов:

$$T_3^4 = T_4^2 T^2. \qquad (26.11.22)$$

Задавая температуру экрана $T_1$, сводим задачу к рассмотрению четырех нелинейных алгебраических уравнений, составленных относительно неизвестных температур газа на выходе из топки $T$, обмуровки $T_2$, факела $T_3$ и слоя горящего топлива $T_4$.

Аналогичным образом рассматривается теплообмен в камерной топке, где расчет задачи сводится к решению системы из трех нелинейных алгебраических уравнений относительно температуры газов на выходе из топки $T$, обмуровки

$T_2$ и факела $T_з$. В качестве уравнения связи можно воспользоваться соотношением

$$T = aT_з, \tag{26.11.23}$$

где поправочный коэффициент $a$, определяемый экспериментально, принимается близким к единице. Результаты подобных расчетов в части определения температуры газов на выходе из топки удовлетворительно согласуются с экспериментальным материалом, а также с формулами А. М. Гурвича. Точность расчета температур зон, выделенных в топке, очевидно, определяется теми соображениями, которые используются при составлении балансных топочных уравнений энергии, а также замыкающих уравнений связи.

Такой расчетный прием не только дает более полную информацию о тепловом состоянии топки в целом (см. рис. 26.24), но также позволяет проводить сравнительно простые приближенные анализы как оптико-геометрического (конструктивного), так и режимного характера (рис. 26.25). Действительно, из анализа расчетных уравнений легко установить влияние на температуру газов на выходе из топки оптической толщины факела, геометрии топки, температуры поверхности запыленного экрана (рис. 26.26) и т. п.

## *СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ*


1. **Адрианов В. Н., Поляк Г. Л.** Дифференциальные методы исследования теплообмена излучением.— «Инж.-физ. журн.», 1964, № 4, с. 5.

1а. **Биберман Л. М.** Радиационный теплообмен при высоких температурах. — «Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт», 1970, № 3, с. 105.

1б. **Биберман Л. М., Бронин С. Я.** К теории нагрева при гиперзвуковом обтекании. — «Докл. АН СССР», 1968, т. 182, № 3, с. 522.

2. **Блох А. Г.** Основы теплообмена излучением. М., Госэнергоиздат, 1962.
3. **Гурвич А. М.** Теплообмен в топках паровых котлов. Теория и расчет. М.— Л., Госэнергоиздат, 1950.
4. **Гурвич А. М., Блох А. Г., Носовицкий А. И.** Лучистый теплообмен в запыленной газовой среде.— «Теплоэнергетика», 1955, № 2, с. 3.
5. **Гурвич А. М., Блох А. Г.** О температуре топочного пространства.— «Энергомашиностроение», 1956, № 6, с. 11.
6. **Гурвич А. М., Митор В. В.** Тепловая эффективность радиационных поверхностей нагрева.— «Энергомашиностроение», 1957, № 2, с. 5.
7. **Кондратьев К. Я.** Лучистый теплообмен в атмосфере. ГИМИЗ, 1956.
8. **Кутателадзе С. С., Боришанский В. М.** Справочник по теплопередаче. М., Госэнергоиздат, 1959.
9. **Кутателадзе С. С., Рубцов Н. А.** Лучисто-конвективный теплообмен в плоском слое поглощающей завесы.— «Журн. прикл. механ. и техн. физ.», 1968, № 6, с. 57.
10. **Невский А. С.** Теплообмен излучением в металлургических печах и топках котлов. Свердловск, Металлургиздат, 1958.
11. **Поляк Г. Л.** Алгебра однородных потоков.— «Изв. ЭНИН АН СССР», 1935, т. 3, вып. 1—2, с. 53.
12. **Поляк Г. Л.** Лучистый теплообмен тел с произвольными индикатрисами отражения поверхностей.— В сб.: Конвективный и лучистый теплообмен. М., Изд-во АН СССР, 1960, с. 118 (ЭНИН АН СССР).
13. **Поляк Г. Л., Шорин С. Н.** О теории теплообмена в топках. — «Изв. АН СССР, ОТН», 1949, № 12, с. 1832.
14. **Рубцов Н. А.** К расчетам теплообмена в сложных системах лучеобменивающихся серых тел.— «Инж.-физ. журн.», 1960, № 8, с. 96.
15. **Рубцов Н. А.** К расчетам теплообмена излучением в промышленных печах и топках. Канд. дис. Новосибирск, 1961 (Ин-т теплофизики СО АН СССР).
16. **Рубцов Н. А.** К переносу теплового излучения в плоском слое поглощающей среды.— «Журн. прикл. механ. и техн. физ.», 1965, № 5, с. 58.
17. **Рубцов Н. А., Кузнецова Ф. А.** Лучисто-кондуктивный теплообмен в плоском слое серой теплопроводной среды.— «Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук», 1968, вып. 3, № 13, с. 33.
18. **Световое** моделирование лучистого теплообмена.— В сб.: Теплопередача и тепловое моделирование. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 365. Авт.: С. Н. Шорин, Г. Л. Поляк, И. П. Колченогова и др.
19. **Соболев В. В.** Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М., Гостехиздат, 1956.
20. **Суринов Ю. А.** Об основных методах современной теории лучистого теплообмена.— *В сб.: Проблемы энергетики. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 423.*

21. **Суринов Ю. А.** О методах расчета интегральных и локальных коэффициентов излучения.— В сб.: Теплопередача и тепловое моделирование. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 319.
22. **Теоретическая** астрофизика. М., Гостехиздат, 1952. Авт.: В. А. Амбарцумян, Э. Р. Мустель, А. Б. Северный, В. В. Соболев.
23. **Тепловой** расчет котельных агрегатов (нормативный метод). М.— Л., Госэнергоиздат, 1957.
24. **Чандрасекар С.** Перенос лучистой энергии. Пер. с англ. М., Гостехиздат, 1953.
25. **Шорин С. Н.** Теплопередача. М., «Высшая школа», 1964.
26. **Шорин С. Н.** Лучистый теплообмен в поглощающей среде.— «Изв. АН СССР, ОТН», 1951, № 3, с. 389.
27. **Hottel H. C., Mangelsdorf H. G.** Heat transmission by radiation from non-luminous gases. II. Experimental study of carbon dioxide and water vapor.— «Trans. Amer. Inst. Chem. Engng», 1935, v. 31, p. 517.
28. **Hottel H. C., Egbert R. B.** The radiation of furnace gases.— «Trans. ASME», 1941, v. 63, N 4, p. 297.
29. **Hottel H. C., Egbert R. B.** Radiant heat transmissions from water vapor.— «Trans. Amer. Inst. Chem. Engng», 1942, v. 38, N 3, p. 531.
30. **Viskanta R., Grosh R. J.** Heat transfer in a thermal radiation absorbing and scattering medium. — «International Developments in Heat Transfer». Proc. 1961—1962 Heat Transfer Conf., Pt. 4. New York, Amer. Soc. Mech. Eng., 1962, p. 820.

# ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ


Абрамович Г. Н. 279, 280
Авдуевский В. С. 182
Аверин Е. К. 315
Авксентюк Б. П. 283, 319, 322
Адамар 288
Адрианов В. Н. 389, 399
Айанас С. 153
Акатнов Н. И. 209
Актюрк 305
Аладьев И. Т. 173, 303
Алимпиев А. И. 199, 200
Аллен Р. В. 131, 164, 165
Амбарцумян В. А. 400
Амбразявичюс А. Б. 123
Ананьев Е. П. 270, 275
Антуфьев В. М. 212, 221
Арманд А. А. 165
Артым Р. И. 317
Аэров М. Э. 217, 220, 221

Бальцевич Я. А. 391
Бальшисер 321
Барнет В. И. 153
Бартль 185
Бартц Д. Р. 313
Басина И. П. 132, 136
Баум В. А. 157
Бекман В. 232, 254
Белецкий Г. С. 212, 221
Белоусов В. П. 338
Бердников В. С. 239, 240, 242, 244
Берлин И. И. 299, 303
Берман Л. Д. 135, 200, 221, 272
Бернадо 153
Бетчелор Д. 114
Биберман Л. М. 392, 399
Биркебак 206
Бирон 187
Блазиус 117, 249, 337
Блох А. Г. 363, 383, 396, 399
Бобрович Г. И. 303, 308, 317, 319, 322
Бойко Л. Д. 270, 275
Бойлан 253
Болдарев А. М. 342
Больцман Л. 349
Бонилла 290
Боришанский В. М. 136, 157, 173, 215, 221, 244, 290, 291, 302, 303, 399
Бочкарев А. А. 253, 254, 256
Бояринцев Д. М. 244
Брановер Г. Г. 328, 329, 334
Бромлей 299
Бронин С. Я. 399
Булеев Н. И. 104, 114
Будрин Д. В. 76, 87
Бурдуков А. П. 342
Буссинек Ж. 238
Бэк 208
Бэкер 250
Бэнков 284

Валукина Н. В. 309
Ван-Вийк 317
Ван-Дайк 250, 251
Ван-Дрист 108
Ван-Оверкерк 286
Ван-Стрален 317
Варшавский Г. А. 70
Васанова Л. К. 221
Вебер 332
Великанов М. А. 33
Вернот 21
Видал 252, 253
Визельсберг 131, 133
Винярский Л. С. 323
Винников А. А. 85
Виноградов Г. В. 231
Виноградов О. С. 221
Виттинг 126
Власов О. Е. 50, 386
Воленберг 272
Волчков Э. П. 200, 201, 209
Воскресенский К. Д. 157, 262, 275
Вырубов 132

Гаген 137
Гарон 242
Гаррис А. 334
Гаррисон Т. Р. 363
Гартман Ю. 325, 326, 328, 329
Гартнетт 206
Гейзли 187
Генин Л. Г. 173
Гертлер 126
Гершун А. А. 361, 363
Гидеон Л. 153
Гильперт 135
Гиневский А. С. 136
Глебова Л. И. 256
Глушков А. Ф. 272
Глоуб 239, 242, 328—330, 334
Гнам 274
Гогонин И. И. 265, 271—273, 275, 303, 308, 309, 322
Голицын Б. В. 349
Гольдштейн 242
Гольдштик М. А. 104, 218, 221
Гомелаури В. И. 135
Гориславец В. М. 231
Графов В. Н. 342
Гребер Г. Г. 70, 71, 76, 90, 91, 363
Григг 235
Григулль У. 91, 363
Грил М. Д. 153
Гриффитс 285
Гром 213
Гросс 187, 188
Грош 136
Грэгг 336
Грэц 143
Гудемчук 266
Гурвич А. М. 382, 383, 384, 396, 397, 399
Гухман А. А. 42, 46
Гэскилл Х. С. 153

Данилов Ю. И. 182
Девойно А. И. 170
Девятко А. Н. 173
Дейслер 108, 161
Дентон Е. В. 153
Детлаф А. А. 123
Джайятиллака 153
Джейн 252
Джексон М. Л. 153
Джинс 347
Дородницын А. А. 126, 177, 178, 182, 337
Дорохов А. Р. 265, 271—273, 275
Дорощук В. Е. 165, 314, 316
Дрейк Р. М. 200, 250

Дрейцер Г. А. 214, 338, 342
Дропкин Д. 239, 242, 244
Друде 352
Дьюи 247
Дэшман С. 256
Дядякин Б. В. 162, 173

Егер Д. 72, 91
Елфимов Г. И. 173

Жаворонков Н. М. 221
Жедт 252, 253
Жанабаев З. Ж. 132, 136
Жидких В. М. 22, 91
Жиланд Е. Р. 153
Жукаускас А. А. 135, 210, 212, 213, 221
Жуков М. Ф. 246, 334
Жуковский В. С. 174, 175, 182, 232

Забродский С. С. 221
Заварзина И. Ф. 254, 256
Зеленгур А. А. 199, 200
Захаров А. А. 278
Зигель 338
Зидер Е. 163
Зингер Н. М. 279
Зозуля 266
Зоммерфилд М. 164, 165
Зубер Н. 306, 312
Зысин Л. В. 136
Зысина-Моложен Л. М. 136, 175, 182, 285, 303

Ибрагимов М. X. 157, 173, 214
Ивакин В. П. 237, 238, 244
Иванова А. В. 221
Иващенко Л. И. 157, 160
Игл 143, 147
Иевлев В. М. 200
Иен И. Т. 327
Ильин Л. Н. 160, 173
Иоффе И. А. 69
Исатаев С. И. 132, 136
Исаченко В. П. 272, 275
Иселси Ф. Д. 153

Каганер М. Г. 256
Казакова Е. А. 306
Казаченко Л. С. 212
Кайт Дж. 256
Калинин Э. К. 214, 221, 299, 303, 338, 342
Калихман Л. Е. 177, 178, 182, 334
Капица П. Л. 266, 275
Карасина Э. С. 58, 221
Карман Т. 33, 98, 109, 114, 126, 150
Карслоу Г. 71, 72, 91
Каулинг 183, 334
Кауфман С. Ж. 153
Кацнельсон Б. Д. 132, 338, 342
Кейс 203
Кесвел 321
Киприянов И. В. 173
Кирдяшкин А. Г. 237—239, 240, 242, 244
Кириллов В. В. 123
Кириллов П. Л. 156
Кирко Н. М. 334
Кирпичев М. В. 42, 46, 244
Кичелли 290
Клайн 203
Ковалев С. А. 173
Ковнер Д. С. 329
Козырев А. П. 303
Колберн А. П. 153
Колесников А. В. 136
Колченогова И. П. 399
Комаров В. П. 204
Кондратьев Г. М. 87, 91
Кондратьев К. Я. 399
Кондратьев П. С. 157
Конфедератов 274
Коньков А. С. 165
Косинов В. А. 256
Костюк В. В. 299, 303
Коубак А. 153
Кочин Н. Е. 126
Кошкин В. К. 182, 214, 221, 338, 342
Крайдер 291
Крайт Ф. 164, 165
Красин А. К. 170, 173
Краснощеков Е. А. 166, 173
Крейз 274
Кружилин Г. Н. 270, 275, 315
Крылова Н. В. 162
Кудрявцев А. П. 303
Кузнецов Н. В. 212, 221
Кузнецов Ю. И. 338
Кузнецова Ф. А. 390, 399
Кулешов В. А. 243
Куликовский А. Г. 334
Кумо 286
Курата 272, 273
Кэвено 250, 255

Лабунцов Д. А. 261, 262, 275, 286, 291, 303
Ладиев Р. Я. 295
Лазарус Ф. 326, 328, 329
Лайн Р. 147
Лайон 308
Ландау Л. Д. 239
Лапшин 274
Лауфер 247
Лебедев А. В. 132
Левич 108
Лельчук В. Л. 162, 165, 173
Лемберский В. Б. 231
Леонтьев А. И. 127, 130, 136, 162, 166, 173, 182, 200, 201, 209, 311
Леонтьева З. С. 132
Либстер 131
Лидон 185, 196
Лиелаусис О. А. 328, 329
Лин С. С. 108, 153
Линь Цзя-Цзяо 114
Лойцянский Л. Г. 25, 108, 126, 132, 136
Ломоносов М. В. 15, 22
Лоренц Л. 232, 234
Луговской П. П. 191, 195, 199, 200
Лурье 321
Лыков А. В. 71, 72, 85, 91, 231
Любимов Г. А. 334
Любимова Е. А. 91
Людвиг 148
Ляпин М. Ф. 221
Ляховский Д. Н. 46, 132, 242, 244

Макарявичюс В. 210, 212, 221
Мак-Адамс 290, 308
Маккелелан 247
Мак-Интайр 135
Максимов И. А. 132, 136
Маленков И. Г. 288, 291, 303, 305, 307, 323
Мамонов В. Н. 199, 200
Мамонтова Н. Н. 283, 286, 287, 303, 319
Маттинг 181

Медников В. В. 165
Мейерс Г. Е. 209
Меккер 331
Мергетройд 328, 329
Мессон 187
Мигай В. К. 143, 173
Миклей 100, 185, 196
Миллионщиков М. О. 173
Милн Е. 374
Минашин В. Е. 221
Минкевич В. Ж. 188, 200
Минченко Ф. П. 290
Миронов Б. П. 191, 195, 199, 200, 231
Миропольский З. Л. 275, 315
Митор В. В. 382, 384, 396, 397, 399
Михайлов Г. А. 211, 221
Михайлов Ю. А. 91
Михайлова Е. С. 106
Михеев М. А. 135, 157, 164, 173, 232, 235, 244
Монин А. С. 114
Моррис В. Ж. 153
Москвичева В. Н. 317, 319, 323
Мулль 239
Мурин 140
Мустель Э. Р. 400
Мэдден А. 256

Навье 24
Найс 321
Накоряков В. Е. 200, 231, 342
Невский А. С. 361, 363, 386, 399
Нейхолм 181
Нестеренко В. Б. 170, 173
Никайяма С. 283, 290
Никурадзе И. 103, 127, 278
Нишиваки 202, 204
Новиков И. И. 136, 173, 215, 221, 244
Новичкова О. Г. 164
Носовицкий А. И. 383, 399
Нуссельт 141, 143, 154, 238, 260, 266, 269, 271
Нэгль 274

Обливин А. Н. 130
Овечкин Д. М. 303
Окуно 196
Оппенгейм 248
Орнатский А. П. 323
Остроградский М. В. 22

Пайрет Е. 256
Паппас 196
Паппел 206
Пепперхофф 384
Перепелица Б. В. 230
Пермяков В. А. 46
Перси 136
Петровский Ю. В. 221
Петухов Б. С. 123, 144, 154, 161, 163, 164, 165, 170, 173, 242—244, 316
Пехович А. И. 22, 91
Пименов А. К. 162
Пирогов 156
Пито 27
Планк 346, 363
Плессет 286
Поварнин П. И. 323
Польгаузен 126, 177, 234, 235, 254
Поляк Г. Л. 358, 361, 363, 365, 386, 389, 395, 396, 399
Поляк М. П. 136
Поляков А. Ф. 243
Попов В. Д. 273
Попов В. И. 223, 231
Попов В. Н. 154, 161
Прандтль Л. 33, 102, 103, 105, 114
Приходько В. Г. 253, 254, 256
Пробстин 246, 251
Проскуряков А. П. 279
Протопопов В. С. 166, 173
Пуазейль 137
Путнем Ж. Л. 153
Пучков П. И. 221
Пфеффер 217

Райер 239
Ребров А. К. 253—256
Рейнер М. 135, 231
Рейнольдс О. 27, 29, 33, 114, 203
Рейхардт 108, 154
Рибо 153
Романенко П. А. 189, 196
Романенко П. Н. 130, 162
Россби 242
Ротта И. 114
Рубенс 352
Рубцов Н. А. 369, 387, 390, 391, 398, 399
Рыбин Р. А. 316
Рыкалин Н. Н. 91
Рэлей 306, 347

Саке 384
Саундерс 235
Свет Д. Я. 363
Светлова Л. С. 303
Себан 206, 208
Северный А. Б. 400
Седов Л. И. 25, 46
Сезерленд 123, 159
Семенов С. Т. 323
Семенов Ю. П. 189
Семеновкер И. Е. 157, 173
Сергеев В. Л. 334
Сигалл 208
Сиглск Н. Х. 153
Сильвестон 239
Синельников А. С. 69
Смольский Б. М. 231
Смоляков В. Я. 334
Скен 126
Соболев В. В. 400
Сокольский 132
Сомерскейлз 242, 244
Сорин А. Р. 157
Сорокин Д. Н. 283, 303, 321, 322
Сосунов В. И. 272, 275
Спэрроу 235, 336, 338
Сполдинг 153, 305
Стерман Л. С. 296
Стефан Д. 349
Стокс 24, 131
Столдер 246, 247
Страхович К. И. 72, 91
Стригин Б. К. 242, 243
Стырикович М. А. 157, 173, 289, 315
Субботин В. И. 156, 157, 173, 214, 283, 303, 315, 321, 322
Суворов 156
Суринов Ю. А. 356, 361, 363, 378, 386, 399, 400
Суханов Е. Л. 87
Сыроватский С. И. 334

Сыромятников Н. И. 221
Сэсс Р. Д. 342

Тарасова Н. В. 165
Таунсенд А. 114
Тейлор К. 33, 102—105, 114
Терентьев В. Д. 384
Терлеев П. Н. 342
Тзучид 202
Тимофеева-Агафонова Ф. А. 132, 338, 342
Титов А. М. 386
Титова Е. Я. 221
Тихонов А. Н. 71
Тодес О. М. 217, 220, 221
Томс 230
Тохтарова Л. С. 214, 221
Трайбус Н. 312
Траут 206
Троянов 156
Туманов Ю. А. 272
Тэйт Г. 163

Уехара 272, 273
Уилкинсон У. Л. 231
Уинни 136
Уитмен Ф. Х. 153
Уиттлиф 252, 253
Ульзамер 135
Уоллес 285, 289, 305
Урюков Б. А. 332, 334
Ушаков П. А. 173

Фастовский В. Г. 221, 317
Федорович Е. Д. 123
Федынский О. С. 136, 157, 173, 215, 221, 244
Федяевский К. К. 100, 136
Фергюссон 143, 147
Филимонов С. С. 164
Фолкнер 122, 126
Форнем 135
Форхгеймер 61
Фостер 286
Франк-Каменецкий Д. А. 200
Фредгольм 365, 378
Френкель 352
Фреслинг 132
Фрид Ф. П. 314
Фритц 286
Фуджи 272, 273
Фуруа 127
Фурье 71, 74

Хабахпашева Е. М. 106, 156, 200, 223, 230, 231
Хаген 352
Хайтман С. М. 334
Хаккер 196
Хаммел 266
Хапеман 143
Хартнетт 187
Харченко В. Н. 196
Хауерт 117
Хейдей А. А. 188, 200
Хейс 251
Хикман 252, 253
Хинце И. О. 33
Хирата 202
Хо 266
Хоттель 381
Хоуарт 126
Христиансен 369

Хрусталев Б. А. 164
Хэкфорд Г. Л. 363

Цесс 136, 213, 268
Цзян 246
Цинобер А. Б. 326, 327

Чандрасекар С. 400
Чепмен 181, 183
Чанг 299
Ченг 252—254
Черная Р. Г. 278
Черный Г. Г. 275
Чизрайт Р. 237, 244
Чилтон Т. Н. 153
Чиркин В. С. 315
Чхеидзе Б. Ш. 313

Шааф 246
Шак 384
Шауер И. И. 209
Шваб В. А. 132, 150, 173
Швейковский Н. Т. 33
Шервуд Т. К. 153
Шерман 247
Шехтер Ю. А. 243
Ши 274
Шидловский В. П. 249, 256
Шиллер 131
Шиманский Ю. Н. 221
Широков М. Ф. 96
Шицман М. Е. 315
Шлихтинг Г. 25, 114, 136, 244, 339, 342
Шлянчяускас А. 210, 212, 221
Шмидель 131
Шмидт Е. 232, 254
Шнейдерман Л. Л. 157, 312, 313
Шолохов А. А. 221
Шорин С. Н. 70, 363, 395, 399, 400
Штоколов Л. С. 313, 323
Шу 242
Шубин Е. П. 69, 70
Шульман З. П. 231

Щербаков А. З. 221

Эди А. Ж. 153
Эйгенсон Л. С. 46, 135, 232, 244
Эйдимоти 252
Эйкин 308
Эйлер 24
Эккерт Э. Р. 164, 165, 187, 188, 200, 206
Эльзер 143
Эпштейн 246
Эрет 143
Эрк С. 70, 91, 363

Юдин В. Ф. 214, 221
Юкин 315
Юстис Р. Н. 209

Яги 384
Янг 272
Яглом А. М. 114
Якоб М. 287, 291
Яковлев В. В. 164, 165
Янсен 143
Ярхо С. А. 338, 342
Ясько О. И. 333, 334

Adimurthy V. 256
Akiyama M. 303
Akhürk U. 323

Back L. H. 209
Bocker G. H. 256
Bochkarjov A. A. 256
Boldarev A. M. 342
Bosnjakovič F. 303
Burdukov A. P. 342

Cess D. 275
Cheng H. K. 256
Cumo M. 303, 323

Dewey C. F. 256
Drake R. M. 256

Egbert R. B. 400
Evans-Lutterodt K. 323

Fourier I. B. 22
Fujii T. 275

Hartnett J. P. 200
Hermann P. 244
Hickman R. S. 256
Hilpert R. 136
Hirata M. 209
Hori M. 303
Hottel H. C. 400

Gazley C. A. 200
Giedt W. H. 256
Gregg L. L. 342
Grosh R. J. 400
Gross J. E. 200

Jacket H. S. 323
Jain A. C. 256

Kavanau L. L. 256
Kirchhoff G. 22
Kurata Ch. 275
Kutateladze S. S. 256

Latzko H. 173
Lyon R. 173

Mangelsdorf H. G. 400
Masson D. J. 200
Metzner A. B. 231

Nakoryakov V. Ye. 342
Nishiwaki N. 209
Nusselt W. 173, 275

Oppenheim A. K. 256

Pappell S. 209
Prikhodko V. G. 256
Probstein R. F. 256
Pwyer O. B. 303

Rebrov A. K. 256
Richardson P. D. 342
Roarty J. D. 323

Seban R. A. 209
Siennicki S. 221
Sims G. E. 323
Sparrow E. M. 342
Stefanovič M. S. 303

Torikai K. 303
Tribus H. 323
Trout A. M. 209
Tsuchida A. 209

Uehara H. 275
Ulsamer J. 136

Van Driest E. R. 33
Van Ouwerkerk H. J. 303
Van Shrahlen S. J. D. 303, 323
Vernotte P. 22
Viskanta R. 400

Wachters L. H. J. 303
Wallis C. B. 323
Westwater J. W. 323

Zerbe J. E. 323
Zuber N. 323

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ


Автомодельность коэффициента сопротивления 139
— кризиса кипения 308, 309
— теплоотдачи 235
Аналогия кипения и барботажа 291, 305
— Рейнольдса 93, 123
— тройная 184
Аппроксимирующий профиль касательных напряжений 100
— — скоростей 101
— — температур 102

Барботаж 291
— пузырьковый 292
— режимы 292

Волны тепловые 71
Времена сходственные 71
Вязкость 93
— исчезающая 112
— кинематическая 26, 112
— коэффициент 15

Газ разреженный 245
Гипотеза Бера 380
— Био—Фурье 15
— квазистационарности структуры турбулентности 339
— локального термодинамического равновесия 374
— многослойной экранировки взаимодействия частиц 218
— серости материи среды 384
Градиент давления 115, 195
— потенциала 183
— температур 37

Двухфазные системы 273
Джоулево тепло 324, 327
Диаметр гидравлический эквивалентный 168, 214
— пузыря отрывной 286
Диффузия, коэффициент 15
— турбулентная 183
Диффузорность 198
Длина пути перемешивания 103
Дуга плазматрона, вольт-амперная характеристика 333
— — с газовой стабилизацией 334

Жидкость вязкоупругая 222
— насыщенная 311
— неньютоновская 222, 228
— ньютоновская 24, 222, 228
— с нестационарным законом трения 222
— со структурной вязкостью 222
— электропроводящая (расплавленные металлы, электролиты, плазма) 324

Завесы тепловые 201
— — эффективность 202
Закон Бугера 374
— Вина 349, 352
— всплытия пузырей осредненный 287
— диффузного излучения Ламберта 347, 349, 356
— Кирхгофа 351, 374, 380
— Клапейрона—Менделеева 189
— Планка 348
— Стефана—Больцмана 349
— Стокса 131
— трения Кармана логарифмический 122
— трения Ньютона 222

Изотермы 7
Излучение, геометрические инварианты 358
— диффузное 345
— интегральное и монохроматическое 346
— падающее 354
— перенос в поглощающей среде 372
— плотность 344, 354
— поглощенное 344
— полусферическое или поверхностное 344
— равновесное 343, 351
— — аддитивности 359
— — взаимности 359
— — замкнутости 359
— — конгруэнтности или совмещаемости 359
— — существования 359
— селективное 344
— степень черноты 353
— сферический вектор 356
— тепловое 343
— энергия 343
— эффективное 366
— яркость 344
Изоляция вакуумнопорошковая многослойная 256
— коэффициент теплопроводности 50
— критическая толщина 51
— тепловая цилиндрическая 50
Изотахи 237
Источник тепла внутренний 171

Кипение зоны теплообмена в трубах 296, 297
— кризисы 304—310
— — гидродинамический (первого рода) 316
— — высыхания (второго рода) 310, 316
— нестабильное 283
— пленочное 281, 304
— пузырьковое 281, 304
Конвекция 183
— вынужденная 23, 242
— однофазная 319
— определение 6
— свободная тепловая 23, 232
— термокапиллярная 240
Конденсация капельная 257, 274
— пленочная 257
Кондукция 6
Консервативность закона теплообмена 128—130, 167
— закона турбулентного трения 111, 207
Краевые условия временные 34
— — пространственные (граничные первого рода) 34
— — — (второго рода) 35
— — — (третьего рода) 35
Кривая течения 222
Коэффициент внутреннего трения 24
— восстановления 174, 337
— вязкости динамической 24
— вязкости кинематической 26
— гидравлического сопротивления 109, 139, 164
— излучения 353
— лучепрозрачности 376
— независимый угловой 362

— облученности элементарный (угловой коэффициент излучения) 357, 358
— оребрения 89
— ослабления луча 384
— отражения 365
— скачка 249
— степени черноты излучения 353
— температуропроводности 15
— теплообмена жидкостей со структурной вязкостью 228
— теплоотдачи 49, 120, 175, 206
— теплоотдачи относительный 35
— теплопроводности 15
— термической аккомодации 246
— трения 93, 176
— турбулентной теплопроводности 151
— турбулентного переноса количества движения 31
— формы 87
— эффективности оребрения 56
— яркости 365
Критерий гидродинамической гомохронности 45, 336
— неопределяющий 41
— определяющий 41
— подобия 39—46
— режима движения 27, 45
— устойчивости двухфазной системы 45, 306
— фазового превращения тепловой 45, 275

Мера Крофтона 358
Метастабильность пристенного слоя 321
Метод зональный 367, 385, 398
— Кэвено 255
— Монте-Карло 253
— Ньютона 390
— окаймления 369
— расчета геометрических инвариантов 361
— расчета теплообмена нормативный 398
— стробоскопической визуализации 199
Модель свободной тепловой турбулентности 235
— тонкого ударного слоя 252

Напряжение нормальное 24, 36
— сдвига (касательное) 24, 36
— турбулентные (рейнольдсовы) 30, 99, 110, 137
Неизотермичность 125—130, 161
— вдува 195

Обтекание безотрывное 115
— отрывное 115
Оттеснение пограничного слоя 186, 191
— динамическое 196
Охлаждение жидкостное 13—14
— пористое 183

Пакеты коридорный 210
— объемная пористость 216
— оребренных труб 213
— продольно обтекаемые 214, 215
— с разрывами 210
— цилиндров 214
— шаров 215
— шахматный 210
Параметр вдува критический 195
— Польгаузена 100
Паросодержание критическое (граничное) весовое 317
— отрицательное 314
— положительное 314—316
Перегрев критический 320
Переменная Дородницына 178
Плазмотрон, неэлектропроводная область 331
— электропроводная область 331
Пластина адиабатическая с газовой завесой 203, 204
— неадиабатическая 206
— полупроницаемая 189
Пленка конденсата 257
Плотность излучения 344—346
— критическая 283
— теплового потока 283
Поверхность взаимная 358
— вогнутая излучающая 358
— незамкнутая излучающая 355
— оребренная 56, 213
— попарно экранированная 362
Поверхности диффузно излучающие и отражающие 387
— лучеобменивающиеся 363
Пограничный слой 93
— асимптотический 95
— слой бинарный ламинарный 187
— вырождение 199
— гидродинамический 94
— диффузионный 257
— изотермический 167
— изотермический бинарный 194
— интегральные уравнения 99
— квазиизотермический 201, 203
— однородный, неоднородный 194
— отрыв 115, 124, 196
— плоский 94, 95
— пристеночный 206
— тепловой 94
— турбулентное ядро 191
— цилиндрический 166
Подобие концентраций и скоростей течения 181
— полей скоростей и энтальпий торможения 96
— профилей скоростей и температур 92
Подобные процессы 39
Подслой вязкий 106, 163, 164
Поле касательных напряжений 99
— относительных перепадов давления 26
— скоростей 23, 26
— температур 21, 23
Поля безразмерные 43, 85
Постоянная Больцмана 284, 247
— лапласова 305
— Планка 343
Поток невозмущенный 97
— плоский установившийся 32
— развитый турбулентный 32
— спутный 208
— тепловой 7
— — вектор 15
— — время релаксации 21
— — плотность 9, 14
— — первая критическая плотность 14, 283
— — вторая критическая плотность 283
Правило комбинирования критериев подобия 41
— моделирования основное 42
Правила осреднения 29
— охватывающих кривых (нитей) 360
Превращение вещества гетерогенное 43
— гомогенное 43
Предел устойчивости макроструктуры жидкости 223

— скоростей логарифмический 107
— температур интерполяционный 119
Противоток 10
Прямоток 10
Псевдоожижение 217
Пульсации плотности 28, 32
— расхода 28
— скорости 28
— температуры 31

Ребро плоское, круглое 55
— прямое трапециевидное 55
Регенератор 88, 89
Режим регулярный 87

Сечение ослабления интегральное эффективное 383
Сжимаемость среды адиабатическая 174
Сила архимедова подъемная 25
Скачок давления 37
— скорости (скольжения) 249
— температуры 249
Скорость касательных напряжений (динамическая) 102
— превращения вещества 43
— средняя расходная 26
Слой защитный (завеса) 201
— кипящий граничный 284
— мелкомасштабный ячеистый 241
— оттеснения 198
— сращенный 251
— тепловой (концентрационный) пограничный 338
— тонкий ударный 252
— шаров монодисперсный 216
— — — градиент давления 216
— — — кипящий 217—220
— — — пористость 216
— — — — скорость течения 216
Соотношение импульсов интегральное Кармана 98
— интегральное Кутателадзе—Леонтьева 113
— предельное Кутателадзе—Леонтьева 202
Сопротивление переносу радиационной энергии 371
— термическое 49, 69, 149
Среды несжимаемые 26
Стенка дополнительная 35, 69
— плоская 49, 58, 73, 79
— полностью проницаемая 184
— полупроницаемая 184
— пористая 199, 202
— тепловые потери 75
цилиндрическая 49, 50, 59
— шаровая 51
Степень регуляризации температурного режима 87
Стержень (прямое ребро) 52
— бесконечной длины 54
— сплошной круглый 59
— цилиндрический 58
Струя затопленная 205
Сфероид «плоский» 300—302
— пузырчатый 300, 303
Схема турбулентного потока «двухслойная» 152, 155
— трехслойная 150, 163

Текучесть 225
— истинная 226
— кажущаяся 225
— линейный закон 224—228
Тело абсолютно белое 354
— — черное 343
— вогнутое 360
— зеркальное 354
— невогнутое 360
— серое 351
Теорема Стокса 363
Теория тонкого ударного слоя 252
— турбулентности полуэмпирическая 102
Температура восстановления 254
— насыщения 37
— равновесная 174
— средняя разность (средний температурный напор) 10, 11
— стенки адиабатическая 189
— термодинамическая 174
— торможения 21, 96, 174
— фазового превращения 283
Тепло джоулево 324, 327
Тепловое взаимодействие 37
Тепловой баланс тела 88
Теплоемкость, максимум 165, 166
— объемная 21
— удельная 15, 184
Теплоноситель 11
— жидкометаллический 156, 163
Теплообмен излучением 364
— нестационарный конвективный 335
— при криогенных температурах 391
— радиационно-кондуктивный 390
Теплоотдача, коэффициент 8
— при квазиизотермическом стационарном обтекании сфер 132
— при ламинарном течении 140—144
— стабилизированная 157
— стержня бесконечной длины 54
— стержня конечной длины 54
— стержня с изолированным свободным торцом 54
— трубы в коридорном пучке 211
Теплопередача, коэффициент 8—10
— усредненное значение 9
Теплопроводность, анизотропия 17
— газов 15
— изотропная турбулентная 276
— квазитурбулентная 267
— коэффициент 15, 43, 47
— молекулярная 276
— нестационарная 22, 72, 76, 91
— понятие 6
— систем сложной конфигурации 69
— стационарная 47
— турбулентная 32
— уравнения 42, 47, 90
— фононная 17
Теплота перегрева 44
— реакции 44, 169
Термодиффузия определение 183
— эффект 188
Течение безвязкостное 94
— в плазмотроне 330, 331
— вихревое 200
— возвратно-вихревое 196
— возвратное 198
— возвратно-поступательное 199
— гиперзвуковое 251
— двухмерное 104
— заторможенное в продольном направлении 191
— квазиизотермическое 182, 201
— квазиламинарное 235

— квазиячеистое 239
— ламинарно-волновое 267
— ламинарное 26
— напорное 325
— периодическое ячеистое 239
— подъемное и опускное 241
— ползущее 245
— стационарное 99
— турбулентное 26
Тождественность безразмерных полей 40
— механизмов переноса 183
Толщина вытеснения 98, 167
— потери импульса 98
— потери теплосодержания 97
Точка отрыва 115
Точки сходственные 39
Турбулизация потока 27

Угол атаки 135
Упругость жидкости 223
Уравнение Бернулли 160
— Больцмана 248
— Клапейрона—Менделеева 95
— Навье—Стокса 94, 249, 252, 290
— Прандтля 94
— распространения тепла дифференциальное 17
— Рейнольдса 30, 102
— Фурье 72
— Фурье—Кирхгофа 18
— Фурье—Остроградского 20
— Широкова 96
Условия однозначности физического процесса 41
— равновесия поверхности раздела 36
— устойчивости вязкого подслоя 111
Устойчивость двухфазного несжимаемого граничного слоя 305
— турбулентного пограничного слоя 105
Участок пористый 203
— стабилизации 162

Фактор проницаемости стенки 185, 187
— температурный 159, 162
— температурный (первый) 113
— температурный (второй) Сезерленда 123
— температурный кинетический (третий) 113, 179
— теплообмена 113
— проницаемости стенки 185, 187
Формпараметр Бури—Лойцянского 127
Формула Адамара—Рыбчинского 288
— Блазиуса 139
— Вина 347
— Гаусса—Остроградского 18
— Дерси 137
— Друде 352
— Кутателадзе—Леонтьева 311
— Лапласа 37
— Льюиса 185
— Маленкова 288
— Михеева эмпирическая 235
— Накорякова 341
— Никурадзе 139
— Нуссельта 263
— Оствальда 222
— Петухова эмпирическая 164
— Планка 347—349
— Прандтля 103, 109
— Рэлея—Джинса 347, 373
— Стокса для твердых тел 288
— Томсона 274
Формфактор 48
Функции Бесселя 73, 277
Функция пульсации плотности 32
— рассеяния 25

Центр парообразования 284

Число (критерий) Архимеда 273
— Био 21, 46
— Больцмана 391, 395
— Бугера 374, 379
— Вебера 46, 271, 272
— Галилея 46
— Гартмана 325, 330
— Грасгофа 45, 243
— Кармана 31
— Кнудсена 245, 248
— Льюиса 184
— Марангони 240, 241
— Маха 126, 247
— Маха—Маиевского 45, 325
— Нуссельта 46, 95, 142, 147, 228, 274
— Пекле 45, 136, 141, 239, 336
— Прандтля 45, 153, 191, 294
— Рейнольдса 27, 100, 295
— — критическое значение 27, 110
— — магнитное 324
— Рэлея 233, 241
— Стентона 46, 111, 129, 393
— Фруда 45, 310
— Фурье 45, 71, 336
— Эйлера 45

Шероховатость 170, 171

Экраны 371
— защитные 372
— металлические 391
— с низкими коэффициентами поглощения 372
Энтальпия 18
— недогрева 314
— стенки равновесная 175
— торможения 21, 175
Эффект вмороженности магнитного поля 324
— Дюфо 188
— Магнуса 218
— ограниченности объема 254
— «острого дутья» 191
— оттеснения жидкости 305

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3
Список условных обозначений и индексов . . . . . . . . . . . . . . 4

Глава 1. **Основные понятия в теории теплообмена** . . . . . . . . . . . 6
1.1. Предмет теории теплообмена . . . . . . . . . . . . . . . . 6
1.2. Поле температур и поле тепловых потоков . . . . . . . . . 7
1.3. Коэффициенты теплоотдачи и теплопередачи . . . . . . . . 8
1.4. Термическое сопротивление . . . . . . . . . . . . . . . . 8
1.5. Балансные уравнения теплообменного аппарата . . . . . . . 9
1.6. Средний температурный напор . . . . . . . . . . . . . . . 10
1.7. Ход расчета теплопередачи . . . . . . . . . . . . . . . . 12
1.8. Одномерная модель жидкостного охлаждения ядерного реактора 13

Глава 2. **Уравнение распространения тепла в вещественной среде** . . . . . 15
2.1. Гипотеза о прямой пропорциональности вектора теплового потока градиенту температур . . . . . . . . . . . . . . . . . 15
2.2. Уравнение распространения тепла в вещественной среде . . . . . . 17
2.3. Частные случаи уравнения теплопроводности . . . . . . . . . . 19
2.4. Температура торможения . . . . . . . . . . . . . . . . . 21
2.5. Уравнение теплопроводности с конечной скоростью распространения возмущения . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21
Список рекомендуемой литературы . . . . . . . . . . . . . . . . 22

Глава 3. **Уравнения гидродинамики** . . . . . . . . . . . . . . . . 23
3.1. Связь между полем температур и полем скоростей в движущейся среде . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23
3.2. Уравнение сплошности потока жидкости . . . . . . . . . . . 23
3.3. Уравнение движения вязкой жидкости . . . . . . . . . . . . 24
3.4. Подъемная сила, обусловленная неоднородностью температурного поля . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25
Список рекомендуемой литературы . . . . . . . . . . . . . . . . 25

Глава 4. **Уравнения осредненного турбулентного потока** . . . . . . . . . 26
4.1. Турбулентность . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
4.2. Уравнения осредненного турбулентного течения жидкости . . . . . 27
4.3. Уравнение распространения тепла . . . . . . . . . . . . . . 31
4.4. Турбулентное трение и турбулентная теплопроводность в плоском потоке жидкости . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32
Список рекомендуемой литературы . . . . . . . . . . . . . . . . 33

Глава 5. **Краевые условия** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34
5.1. Временные и пространственные краевые условия . . . . . . . . 34
5.2. Краевые условия к уравнениям гидродинамики . . . . . . . . . 34
5.3. Краевые условия к уравнениям теплопроводности . . . . . . . . 35
5.4. Условия механического и теплового взаимодействия на границах фаз в многофазной системе . . . . . . . . . . . . . . . . . 36
5.5. Реактивная сила при фазовом превращении . . . . . . . . . . 38

Глава 6. **Условия подобия процессов теплообмена** . . . . . . . . . . . 39
6.1. Понятие о подобии физических явлений . . . . . . . . . . . . 39
6.2. Критерии подобия . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39
6.3. Зависимые и независимые переменные. Условия однозначности . . 40
6.4. Комбинирование критериев. Собственно критерии подобия . . . . . 41
6.5. Критерии подобия как обобщенные безразмерные переменные . . 42
6.6. Физический смысл некоторых критериев подобия . . . . . . . . 43
6.7. Критерий теплового взаимодействия при физико-химическом превращении вещества . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43
6.8. Безразмерный коэффициент теплоотдачи . . . . . . . . . . . 44
Список рекомендуемой литературы . . . . . . . . . . . . . . . . 46

Глава 7. **Установившийся тепловой поток в твердых телах** . . . . . . . . 47

7.1. Дифференциальное уравнение стационарной теплопроводности . . 47
7.2. Теплопроводность через плоскую стенку . . . . . . . . . . . . 49
7.3. Теплопроводность через цилиндрическую стенку . . . . . . . . 49
7.4. Теплопроводность через шаровую стенку . . . . . . . . . . . . 51
7.5. Теплопроводность вдоль стержня постоянного поперечного сечения 52
7.6. Прямое ребро постоянного теплового напряжения . . . . . . . . 54
7.7. Теплопроводность в прямом трапециевидном и в плоском круглом ребрах . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
7.8. Коэффициент эффективности оребрения . . . . . . . . . . . . . 56
7.9. Теплопроводность в стержне и шаре с внутренними источниками тепла . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
7.10. Суперпозиция полей температур . . . . . . . . . . . . . . . 60
7.11. Учет внешнего термического сопротивления методом дополнительной стенки . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 69
Список рекомендуемой литературы . . . . . . . . . . . . . . . . . 70

Глава 8. **Неустановившийся тепловой поток в твердом теле без внутренних источников** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71

8.1. Уравнение нестационарного температурного поля . . . . . . . . 71
8.2. Решение в виде произведения двух функций . . . . . . . . . . 72
8.3. Температура — функция одной координаты и времени . . . . . . 73
8.4. Монотонный переход к тепловому равновесию . . . . . . . . . . 74
8.5. Температурное поле в теле при температуре внешней среды, линейно меняющейся во времени . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 79
8.6. Регулярный режим охлаждения . . . . . . . . . . . . . . . . . 85
8.7. Охлаждение высокотеплопроводного тела . . . . . . . . . . . . 88
8.8. Тепловые волны. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 90
Список рекомендуемой литературы . . . . . . . . . . . . . . . . . 91

Глава 9. **Основные положения теории конвективного теплообмена** . . . . 92

9.1. Уравнение теплопереноса . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 92
9.2. Связь между теплоотдачей и трением . . . . . . . . . . . . . 92
9.3. Пограничный слой . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 93
9.4. Система основных уравнений теплообмена в потоке сжимаемого газа 95
9.5. Интегральные уравнения плоского стационарного пограничного слоя на непроницаемой поверхности . . . . . . . . . . . . . . . 96
9.6. Распределение касательных напряжений и скоростей в плоском пограничном слое . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99
9.7. Распределение плотности теплового потока и температуры в плоском пограничном слое . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 101
9.8. Полуэмпирические выражения турбулентного обмена в плоском несжимаемом потоке вблизи твердой стенки . . . . . . . . . . . 102
9.9. Связь между коэффициентами турбулентной теплопроводности и вязкости . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 105
9.10. Турбулентный перенос в вязком подслое . . . . . . . . . . . 105
9.11. Распределение скоростей в плоском несжимаемом потоке вблизи стенки . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 107
9.12. Распространение полуэмпирических выражений для турбулентных переносов в несжимаемой жидкости на плоский поток газа . . . . 109
9.13. Порядок величины вязкого подслоя на непроницаемой поверхности 110
9.14. Предельные относительные законы трения и теплообмена . . . . 111
Список рекомендуемой литературы . . . . . . . . . . . . . . . . . 114

Глава 10. **Теплоотдача при внешнем обтекании тел несжимаемой жидкостью** 115

10.1. Характер внешнего обтекания . . . . . . . . . . . . . . . . . 115
10.2. Ламинарный пограничный слой на пластине (точное решение) . 116
10.3. Гидродинамическое сопротивление пластины, обтекаемой ламинарным пограничным слоем (приближенное решение). . . . . . . . . 118
10.4. Теплоотдача пластины, обтекаемой ламинарным пограничным слоем при $\mathrm{Pr} \gg 1$ (приближенное решение) . . . . . . . . . . . . 119
10.5. Теплоотдача пластины, обтекаемой ламинарным пограничным слоем при $\mathrm{Pr} \ll 1$ (приближенное решение) . . . . . . . . . . . . 120
10.6. Гидродинамическое сопротивление пластины, обтекаемой турбулентным пограничным слоем . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 121
10.7. Теплоотдача пластины, обтекаемой турбулентным пограничным слоем с постоянными физическими свойствами . . . . . . . . . . 123
10.8. Неизотермический ламинарный пограничный слой газа на пластине . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 123

10.9. Неизотермический турбулентный пограничный слой газа на пластине . . . 125
10.10. Гидродинамическое сопротивление криволинейной поверхности . 126
10.11. Консервативность закона теплообмена относительно градиента давления . . . 128
10.12. Интеграл уравнения энергии . . . 130
10.13. Теплоотдача при обтекании шара . . . 131
10.14. Теплоотдача при поперечном обтекании одиночного цилиндра . . 133
Список рекомендуемой литературы . . . 136

Глава 11. **Теплоотдача при течении несжимаемой жидкости в трубах** . . . 137

11.1. Распределение скоростей и гидродинамическое сопротивление при изотермическом течении . . . 137
11.2. Теплоотдача при ламинарном течении . . . 140
11.3. Уравнение теплопереноса в турбулентном потоке . . . 144
11.4. Связь между коэффициентами теплоотдачи и трения . . . 145
11.5. Решение при линейном изменении температуры стенки . . . 146
11.6. Теплоотдача к турбулентному потоку при $Pr > 1$ . . . 148
11.7. Теплоотдача к турбулентному потоку при $Pr \ll 1$ . . . 155
11.8. Температурный фактор . . . 157
11.9. Влияние температурного фактора на трение и теплообмен при турбулентном течении газа . . . 160
11.10. Влияние теплового потока на теплоотдачу при течении капельных жидкостей . . . 163
11.11. Теплообмен и трение во входном участке трубы . . . 166
11.12. Теплообмен при продольном течении в каналах нецилиндрической формы . . . 168
11.13. Теплообмен при течении химически реагирующих газовых теплоносителей . . . 168
11.14. Влияние шероховатости стенки трубы на теплоотдачу . . . 170
11.15. Влияние внутреннего источника тепла . . . 171
Список рекомендуемой литературы . . . 173

Глава 12. **Теплообмен при больших скоростях течения газа** . . . 174

12.1. Связь между температурой торможения и скоростью распространения звука в газе . . . 174
12.2. Коэффициент восстановления температуры и обобщенный коэффициент теплоотдачи . . . 174
12.3. Теплоотдача к пластине . . . 175
12.4. Коэффициент трения пластины при ламинарном пограничном слое 176
12.5. Профиль скоростей в турбулентном пограничном слое на непроницаемой пластине . . . 179
12.6. Коэффициент трения и теплоотдачи пластины при турбулентном пограничном слое . . . 180
12.7. Трение и теплообмен в турбулентном пограничном слое диссоциированного газа . . . 181
Список рекомендуемой литературы . . . 182

Глава 13. **Теплообмен и трение при переносе вещества** . . . 183

13.1. Массообмен и теплопередача . . . 183
13.2. Уравнения пограничного слоя . . . 183
13.3. Тройная аналогия . . . 184
13.4. Распределение касательных напряжений и теплового потока в плоском пограничном слое на полупроницаемой поверхности . . . 185
13.5. Предельный закон трения в турбулентном пограничном слое на полупроницаемой пластине . . . 186
13.6. Ламинарный пограничный слой на полупроницаемой пластине . . 187
13.7. Эффект термодиффузии . . . 188
13.8. Турбулентный пограничный слой газа на полупроницаемой пластине при $Re \to \infty$ . . . 189
13.9. Параметры турбулентного пограничного слоя в точке оттеснения от пластины . . . 191
13.10. Два важных частных решения уравнения импульсов для пограничного слоя на пластине . . . 192
13.11. Законы трения и теплообмена в турбулентном пограничном слое газа при конечных числах Рейнольдса . . . 194
Список рекомендуемой литературы . . . 200

Глава 14. **Тепловые завесы** . . . 201

14.1. Типы завес . . . 201
14.2. Пограничный слой втепловой завесе на адиабатической поверхности . . . 201

14.3. Адиабатическая пластина с предвключенным участком теплообмена 203
14.4. Адиабатическая пластина с предключенным пористым участком 203
14.5. Адиабатическая пластина с газовой завесой . . . . . . . . . . . 204
14.6. Неадиабатическая пластина с газовой завесой . . . . . . . . . . . 206
14.7. Интегральное соотношение импульсов при взаимодействии затопленной струи с плоской пластиной . . . . . . . . . . . . . . 206
14.8. Трение и теплообмен при взаимодействии затопленной струи с твердой стенкой . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 207
Список рекомендуемой литературы . . . . . . . . . . . . . . . . . . 209

Глава 15. **Теплообмен в пакетах и засыпках** . . . . . . . . . . . . . 210
15.1. Поперечное обтекание пакетов цилиндров. . . . . . . . . . . . 210
15.2. Продольное обтекание пакетов цилиндров . . . . . . . . . . . 214
15.3. Пакеты шаров . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 215
15.4. Кипящий слой . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 217
15.5. Неоднородности и неустойчивости в слое частиц . . . . . . . . 220
Список рекомендуемой литературы . . . . . . . . . . . . . . . . . . 221

Глава 16. **Гидродинамика и теплообмен в средах с нелинейным законом молекулярного трения** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 222
16.1. Жидкости с нелинейной кривой течения . . . . . . . . . . . . 222
16.2. Связь между текучестью и касательными напряжениями в потоке жидкости со структурной вязкостью . . . . . . . . . . . . . 222
16.3. Распределение скоростей и гидравлическое сопротивление при стабилизированном изотермическом течении жидкости с линейным законом текучести . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 224
16.4. Распределение скоростей и гидравлическое сопротивление при продольном изотермическом обтекании пластины . . . . . . . . . . 225
16.5. Связь между истинной и кажущейся текучестью . . . . . . . . . 226
16.6. Теплоотдача при ламинарном течении жидкостей с линейным законом текучести . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 227
16.7. Гидравлическое сопротивление и теплообмен при турбулентном течении структурно-вязких жидкостей . . . . . . . . . . . . . . 229
16.8. Влияние полимерных добавок на турбулентное течение воды . . . 230
Список рекомендуемой литературы . . . . . . . . . . . . . . . . . . 231

Глава 17. **Теплоотдача при свободной конвекции** . . . . . . . . . . . . 232
17.1. Свободная тепловая конвекция около твердой поверхности . . . . 232
17.2. Теплоотдача в области ламинарного пограничного слоя при $\mathrm{Pr} \geqslant 1$ 233
17.3. Гидродинамика и теплообмен в области развитой тепловой турбулентности при $\mathrm{Pr} \geqslant 1$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 235
17.4. Теплоотдача при $\mathrm{Pr} \ll 1$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 238
17.5. Теплоотдача в жидких и газовых слоях . . . . . . . . . . . . . 238
17.6. Совместное влияние свободной и вынужденной конвекции . . . . . 242
Список рекомендуемой литературы . . . . . . . . . . . . . . . . . . 244

Глава 18. **Теплообмен в разреженных газах** . . . . . . . . . . . . . . 245
18.1. Особенности процессов переноса в разреженном газе . . . . . . . 245
18.2. Взаимодействие молекул с поверхностью. Свободно-молекулярный перенос тепла . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 246
18.3. Течение со скольжением и температурным скачком . . . . . . . . 249
18.4. Особенности теплообмена при гиперзвуковых скоростях . . . . . 251
18.5. Релаксационные эффекты при обтекании тел разреженным газом. . 253
18.6. Свободная конвекция в разреженном газе . . . . . . . . . . . . 254
18.7. Вакуумная изоляция . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 255
Список рекомендуемой литературы . . . . . . . . . . . . . . . . . . 256

Глава 19. **Теплоотдача при конденсации пара на твердых поверхностях** . 257
19.1. Пленочная и капельная конденсация . . . . . . . . . . . . . . 257
19.2. Основные уравнения теплообмена при пленочной конденсации чистого насыщенного пара . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 257
19.3. Ламинарное течение пленки на вертикальной поверхности при медленном движении пара . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 260
19.4. Турбулентное течение пленки на вертикальной поверхности при медленном движении пара . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 263
19.5. Средний коэффициент теплоотдачи при смешанном течении пленки конденсата на вертикальной стенке . . . . . . . . . . . . . . . . 265
19.6. Влияние скорости течения чистого пара на теплоотдачу при конденсации на вертикальной поверхности . . . . . . . . . . . . . . 267
19.7. Теплоотдача при конденсации пара внутри трубы . . . . . . . . 269

19.8. Теплоотдача при конденсации чистого пара на внешней поверхности горизонтальных труб . . . 270
19.9. Пленочная конденсация на нижней поверхности горизонтальной плиты . . . 273
19.10. Влияние влажности и перегрева пара . . . 273
19.11. Капельная конденсация . . . 274
Список рекомендуемой литературы . . . 275

Глава 20. **Конденсация на свободной поверхности жидкости** . . . 276
20.1. Теплообмен в свободно падающей струе . . . 276
20.2. Конденсация на струе, втекающей в паровое пространство с большой скоростью . . . 279
Список рекомендуемой литературы . . . 280

Глава 21. **Теплоотдача при кипении однородных жидкостей** . . . 281
21.1. Два основных режима кипения . . . 281
21.2. Температурное поле . . . 283
21.3. Пузырьковое кипение, частота и скорость роста паровых пузырей 284
21.4. Характер движения парожидкостной смеси в трубах . . . 287
21.5. Теплоотдача при пузырьковом кипении . . . 290
21.6. Пузырьковое кипение при вынужденной конвекции жидкости 294
21.7. Теплоотдача при пленочном кипении . . . 297
21.8. Теплоотдача при свободном растекании жидкости по поверхности нагрева . . . 300
Список рекомендуемой литературы . . . 303

Глава 22. **Критические плотности теплового потока, вызывающие изменения режима кипения** . . . 304
22.1. Гидродинамическая природа кризисов в механизме кипения жидкости . . . 304
22.2. Критерий устойчивости двухфазного граничного слоя при свободной конвекции в большом объеме кипящей жидкости (первый кризис режима кипения) . . . 305
22.3. Влияние размера и состояния поверхности нагрева на величину $q_{кр}$ 307
22.4. Переход от пленочного режима кипения к пузырьковому режиму (второй кризис режима кипения) . . . 310
22.5. Критерий устойчивости двухфазного граничного слоя при больших скоростях течения жидкости . . . 310
22.6. Влияние недогрева жидкости до температуры насыщения на критическую плотность теплового потока . . . 311
22.7. Критический тепловой поток в области умеренных скоростей течения . . . 313
22.8. Кризис кипения в бинарных смесях . . . 317
22.9. Непосредственный переход от однофазной конвекции к пленочному кипению . . . 319
22.10. Влияние метастабильности пристенного слоя жидкости на первую критическую плотность теплового потока . . . 321
Список рекомендуемой литературы . . . 322

Глава 23. **Элементы магнитной термогидродинамики** . . . 324
23.1. Основные уравнения . . . 324
23.2. Влияние перпендикулярного к течению магнитного поля на гидродинамику и теплообмен в ламинарном потоке . . . 325
23.3. Влияние магнитного поля на турбулентное течение жидкого металла в каналах . . . 328
23.4. Элементы термогазодинамики низкотемпературной плазмы . . . 330
23.5. Обобщенные характеристики электродуговых плазмотронов . . . 333
Список рекомендуемой литературы . . . 334

Глава 24. **Неустановившийся конвективный теплообмен** . . . 335
24.1. Критерии подобия, характеризующие конвективную нестационарность . . . 335
24.2. Ламинарный пограничный слой на пластине с переменной температурой . . . 336
24.3. Теплоотдача при обтекании сферических частиц . . . 338
24.4. Нестационарный теплообмен при турбулентном течении в трубе . . 338
24.5. Влияние осцилляций при $Pr \approx 1$ . . . 339
24.6. Влияние осцилляций при $Pr \to \infty$ . . . 341
Список рекомендуемой литературы . . . 342

Глава 25. **Основные законы теплового излучения** . . . . . . . . . . . . . . 343
25.1. Природа теплового излучения . . . . . . . . . . . . . . . . . . 343
25.2. Основные понятия и определения . . . . . . . . . . . . . . . 344
25.3. Законы излучения абсолютно черного тела . . . . . . . . . . 346
25.4. Излучение реальных тел . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 349
25.5. Классификация видов полусферического и объемного излучений 353
25.6. Геометрия излучения. Геометрические инварианты излучения . . . 356
25.7. Общие свойства потоков излучения . . . . . . . . . . . . . . 358
25.8. Алгебраический метод расчета интегральных геометрических инвариантов излучения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 360
Список рекомендуемой литературы . . . . . . . . . . . . . . . . . . 363
Глава 26. **Теплообмен излучением в прозрачных и поглощающих средах** . 364
26.1. Теплообмен излучением системы тел, разделенных прозрачной средой . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 364
26.2. Теплообмен излучением дискретной системы тел в прозрачной среде (зональный метод) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 367
26.3. Приложение зонального метода к расчету теплообмена излучением между несколькими серыми телами . . . . . . . . . . . . . . 368
26.4. Действие экранов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 371
26.5. Уравнение переноса энергии излучения в поглощающей среде . . 372
26.6. Интегральные уравнения излучения в поглощающей среде . . . . 376
26.7. Оптические свойства поглощающих сред . . . . . . . . . . . . 379
26.8. Теплообмен излучением дискретной системы тел в поглощающей среде (зональный метод) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 385
26.9. Перенос излучения в плоском слое поглощающей среды . . . . . . 386
26.10. Комбинированный радиационный теплообмен . . . . . . . . . . 390
26.11. Теплообмен излучением в топочных устройствах . . . . . . . . 394
Список рекомендуемой литературы . . . . . . . . . . . . . . . . . . 399
Именной указатель . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 401
Предметный указатель . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 406

**ИБ № 521**

**Самсон Семенович Кутателадзе**

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА**

Редактор **Г. Б. Казьмина**
Художественный редактор **А. Т. Кирьянов**
Переплет художника **А. И. Шаварда**
Технический редактор **Н. А. Власова**
Корректоры **Е. В. Журина, Н. А. Музыкантова**

Сдано в набор 26.12.78. Подписано к печати 11.09.79 Т-11998. Формат $70 \times 108^{1}/_{16}$. Бумага тип. № 1. Гарнитура литературная Печать высокая. Усл. печ. л. 36,4. Уч.-изд. л. 34,92. Тираж 5550 экз. Заказ изд. 75051. Зак. тип. 795 Цена 3 р. 20 к.
Атомиздат, 103031 Москва К-31, ул. Жданова, 5

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
129041 Москва, Б. Переяславская, 46